SLOBODNI VEKTORI

Duž AB je skup tačaka koji čine tačke A i B i sve tačke koje se nalaze između tih tačaka na pravoj određenoj sa A i B. Duž čiji se krajevi poklapaju naziva se nulta duž.

Orijentisana duž je duž kod koje je određeno šta je njena početna a šta krajnja tačka. Orijentacija nulte duži se ne definiše

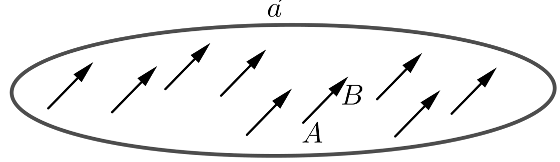
Slobodni nenula vektor je skup svih orijentisanih duži koje su međusobno podudarne, paralelne i isto orijentisane. Svaka od tih orijentisanih duži jeste jedan predstavnik tog slobodnog vektora i zove se **vektor**.

Slobodni nula vektor je skup svih nultih duži.

Slobodni vektori se obeležavaju sa $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

Vektor čija je početna tačka A, a krajnja B obeležava se sa $\overrightarrow{AB}$.

Kako je svaki slobodni vektor jednoznačno određen sa bilo kojim svojim predstavnikom, tj. vektorom, uobičajeno je da se poistovete pojam slobodnog vektora i vektora i piše se $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



Svaki vektror $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom.

Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je određen pravom na kojoj leži taj vektor.

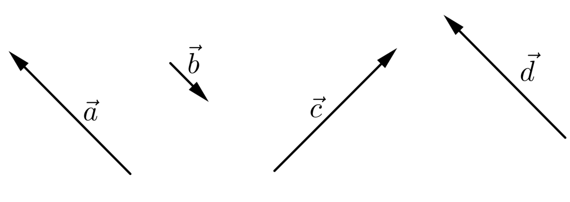
Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ je dužina duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.

Smer vektora $\overrightarrow{AB}$, $A \neq B$ je od tačke A do tačke B.

Vektor čiji je intenzitet jednak jedan naziva se **jedinični vektor**.

Ako se $A \equiv B$, onda je $\overrightarrow{AB}$ nula vektor, u oznaci $\overrightarrow{0}$ ili samo 0. Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.

Nenula vektori su jednaki ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.
Primer:



Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju isti pravac, a suprotan smer. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{d}$ imaju isti pravac, smer i intenzitet, tj. $\vec{a} = \vec{d}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imaju isti intenzitet, ali različit pravac.

Sabiranje vektora

Za bilo koje tri tačke važi:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Proizvod vektora i skalara

Množenjem vektora $\vec{a} \neq 0$ i skalara $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dobija se vektor $\alpha\vec{a}$ čiji je:

(1) pravac isti kao pravac vektora $\vec{a}$,
(2) intezitet $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
(3) smer isti kao smer vektora $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$.
Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = 0$, onda je $\alpha\vec{a} = 0$.

Suprotan vektor vektoru $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ je vektor $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$. Suprotni vektori imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer.

Jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{a}$, dobija se kada se vektor $\vec{a}$ pomnoži sa recipročnom vrednošću svog intenziteta, tj. jedinični vektor koji odgovara vektoru $\vec{a}$ je vektor $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

Za vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važe sledeće osobine:

- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

Dakle, $(V, +)$, gde je V skup svih slobodnih vektora, je Abelova grupa.

- $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
- $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **kolinearni** akko imaju isti pravac, odnosno ako pripadaju istoj pravoj ili dvema paralelnim pravama.

Za kolinearne nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ postoji realni broj α različit od nule tako da je $\vec{a} = \alpha\vec{b}$.

Za dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kaže se da su **ortogonalni** (normalni) akko je ugao između njih prav.

Nula vektor je po definiciji kolinearan sa svakim vektorom i normalan je na svaki vektor.

Za tri nenula vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ kaže se da su **komplanarni** akko su paralelni sa jednom ravni.

Nula vektor je po definiciji komplanaran sa svakim skupom komplanarnih vektora.

Ugao između vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ je ugao $\sphericalangle AOB$, O je koordinatni početak, pri čemu se dogovorno uzima da je $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \in [0, \pi]$.

Skalarni proizvod vektora

Skalarni proizvod nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \cdot \vec{b}$, je skalar (broj) definisan sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Kada je $\vec{a} = 0$ ili $\vec{b} = 0$, tada je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Osobine skalarnog proizvoda:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$,
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
- $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$,

Projekcija vektora

Projekcija vektora $\vec{a} \neq 0$ na pravac vektora $\vec{b} \neq 0$, u oznaci $\text{proj}_{\vec{b}}(\vec{a})$, je vektor koji ima isti pravac kao vektor $\vec{b}$, isti smer kao $\vec{b}$ ako je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oštar, a suprotan smer u odnosu na $\vec{b}$ ako je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tup, a intenzitet mu se dobija na sledeći način:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\operatorname{proj}_{\vec b}(\vec a)\right|}{|\vec a|} \Longrightarrow \left|\operatorname{proj}_{\vec b}(\vec a)\right| = |\vec a|\cos\varphi = |\vec a|\,\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\left|\vec b\right|} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{\left|\vec b\right|},$$

pa je

$$\operatorname{proj}_{\vec b}(\vec a) = \left|\operatorname{proj}_{\vec b}(\vec a)\right|\frac{\vec b}{|\vec b|} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{\left|\vec b\right|}\frac{\vec b}{|\vec b|} = \frac{\vec a\cdot\vec b}{\left|\vec b\right|^2}\vec b.$$

Vektorski proizvod

Vektorski proizvod nenula vektora $\vec a$ i $\vec b$, u oznaci $\vec a\times\vec b$, je vektor čiji je:

(1) pravac normalan na pravce vektora $\vec a$ i $\vec b$, tj. $\vec a\times\vec b\perp\vec a$ i $\vec a\times\vec b\perp\vec b$.

(2) intezitet $|\vec a\times\vec b| = |\vec a||\vec b||\sin\sphericalangle(\vec a,\vec b)|$,

(3) smer takav da vektori $\vec a$, $\vec b$, $\vec a\times\vec b$ tim redom čine desni triedar.

Kada je $\vec a = 0$ ili $\vec b = 0$, tada je $\vec a\times\vec b = 0$.

Osobine vektorskog proizvoda:

- $\vec a\times\vec a = 0$,
- $\vec a\times\vec b = -\vec b\times\vec a$,
- $(\forall\alpha\in\mathbb{R})\ \alpha(\vec a\times\vec b) = (\alpha\vec a)\times\vec b = \vec a\times(\alpha\vec b)$,
- $\vec a\parallel\vec b\Leftrightarrow\vec a\times\vec b = 0$,
- $\vec a\times(\vec b+\vec c) = \vec a\times\vec b+\vec a\times\vec c$,
- Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora $\vec a$ i $\vec b$ jednak je površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima, tj. $P = |\vec a\times\vec b|$.

Mešoviti proizvod

Mešoviti proizvod nenula vektora $\vec a$, $\vec b$ i $\vec c$, u oznaci $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)$ je skalarni proizvod vektora $\vec a$ i $\vec b\times\vec c$.

Osobine mešovitog proizvoda:

- $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = \vec c\cdot(\vec a\times\vec b) = \vec b\cdot(\vec c\times\vec a)$,
- Nenula vektori $\vec a$, $\vec b$ i $\vec c$ su komplanarni akko je njihov mešoviti proizvod jednak nuli, tj. $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = 0$.
- Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora $\vec a$, $\vec b$ i $\vec c$, jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima, tj. $V = |\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|$.

ZADACI

(1) Neka su vektori $\vec a$ i $\vec b$ takvi da je $|\vec a| = 2$, $\left|\vec b\right| = 1$ i $\sphericalangle\left(\vec a,\vec b\right) = \frac{\pi}{3}$. Izračunati: $\vec a\cdot\vec b$, $\left(\vec a+2\vec b\right)\cdot\left(\vec a-\vec b\right)$ i $\left(\vec a-\vec b\right)\cdot\left(\vec a+\vec b\right)$.

(2) Naći intenzitet vektora $\vec a = \vec p-2\vec q$, ako je $|\vec p| = 2$, $|\vec q| = \sqrt3$ i $\sphericalangle(\vec p,\vec q) = \frac{\pi}{6}$.

(3) Odrediti realan parametar α tako da vektori $\vec p = \alpha\vec a+17\vec b$ i $\vec q = 3\vec a-\vec b$ budu uzajamno normalni, ako je $|\vec a| = 2$, $\left|\vec b\right| = 5$ i $\sphericalangle\left(\vec a,\vec b\right) = \frac{2\pi}{3}$.

(4) Koji ugao obrazuju jedinični vektori $\vec a$ i $\vec b$ ako su vektori $\vec p = \vec a+2\vec b$ i $\vec q = 5\vec a-4\vec b$ uzajamno normalni?

(5) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec p = 2\vec b-\vec a$ i $\vec q = 3\vec a+2\vec b$ ako je $|\vec a| = \left|\vec b\right| = 5$ i $\sphericalangle\left(\vec a,\vec b\right) = \frac{\pi}{4}$.

(6) Za koje vrednosti realnog parametra k će vektori $\vec p = k\vec a+5\vec b$ i $\vec q = 3\vec a-\vec b$ biti kolinearni ako vektori $\vec a$ i $\vec b$ nisu kolinearni?

(7) Dati su vektori $\vec a = \vec m-2\vec n$ i $\vec b = 2\vec m+\vec n$, gde je $|\vec m| = 2$, $|\vec n| = 3$ i $\sphericalangle(\vec m,\vec n) = \frac{\pi}{3}$.

   (a) Odrediti projekciju vektora $\vec b$ na vektor $\vec a$.

(b) Izračunati površinu trougla određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Vektori u koordinatnom sistemu

Dekartov (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen:

- ako su date tri prave koje se obično nazivaju x, y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački $O(0,0,0)$;
- na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan;
- na pozitivnim smeroima pravih x, y i $z$su izabrane tačke $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$ i $E_3(0,0,1)$ redom

  i uvedene oznake $\overrightarrow{OE}_1 = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE}_2 = \vec{j}$ i $\overrightarrow{OE}_3 = \vec{k}$.

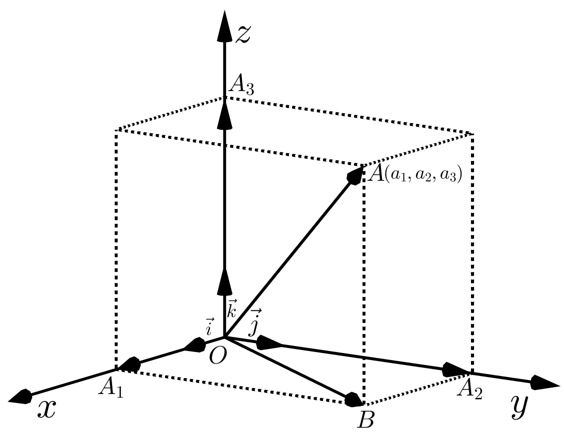
Prava x se naziva x-osa ili apscisa.

Prava y se naziva y-osa ili oordinata.

Prava z se naziva z-osa ili aplikata.

Tačka O se naziva koordinatni početak.

Vektori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sa koordinatnim početkom O, čine desni sistem vektora ili desni triedar, što znači da rotacija vektora $\vec{i}$, ka vektoru $\vec{j}$, oko tačke O, u ravni određenoj vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\vec{k}$.



Svakoj tački $A(a_1, a_2, a_3)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OA}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku O, a krajnja u tački $A(a_1, a_2, a_3)$ i koji senaziva **vektor položaja tačke** A.

Vektor $\overrightarrow{OA}$ može se razložiti kao zbir tri vektora (slika iznad):

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

gde je tačka $B(a_1, a_2, 0)$, a tačke A_1, A_2 i A_3 su projekcije tačke A na x-osu, y-osu i z-osu, redom,

tj. $A_1 = (a_1, 0, 0)$, $A_2 = (0, a_2, 0)$ i $A_3 = (0, 0, a_3)$.

Kako je $\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{j}$ i $\overrightarrow{OA_3} = a_3\vec{k}$, sledi da je

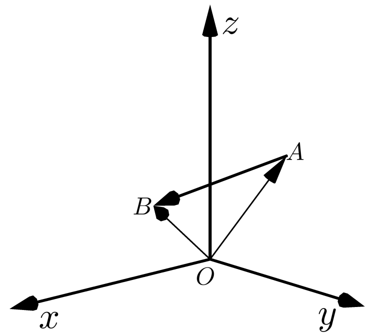
$$\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Umesto $\overrightarrow{OA} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ kraće se piše $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$.

Neka su $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ dve tačke u prostoru čiji su vektori položaja $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, redom. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Neka je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, tada:



- $\vec{a} = \vec{b}$ akko je $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ i $a_3 = b_3$,
- $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$,
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$,
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,
- $$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k},\end{aligned}$$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

ZADACI

(1) Za vektore $\vec{a} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ izračunati: $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $3\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

(2) Dati su vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ i $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Naći vektor $\vec{x}$ tako da važi $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$ i $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$.

(3) Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{q} = \vec{i} - 4\vec{j}$.

(4) Odrediti koordinate temena D paralelograma $ABCD$ i dužinu dijagonale AC ako su data tri uzastopna temena $A(1, -2, 0)$, $B(2, 1, 3)$ i $C(2, 0, 5)$.

(5) Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{k}$ i $\vec{c} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

(6) Date su tačke $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$ i $C(2, 1, 2)$. Izračunati ugao između vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

(7) Odrediti realan parametar α tako da vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{b} = \alpha\vec{i} + 4\vec{j}$ budu ortoonalni.

(8) Odrediti projekciju vektora $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ na vektor $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

(9) Dati su vektori $\vec{a} = (2k - 1, 2, k + 2)$, $\vec{b} = (3, k - 1, -1)$ i $\vec{c} = (p, 1, 3)$, gde su $k \in \mathbb{R}$ i $p \in \mathbb{R}^-$.
   (a) Odrediti vrednost parametara k i p tako da važi $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $|\vec{c}| = \sqrt{26}$.
   (b) Za tako određene k i p pokazati da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

ZA VEŽBU:IZ SKRIPTE
Zadatak 10.12, 10.20, 10.21
Primer: 10.1