RACIONALNA FUNKCIJA

Funkcija $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, gde su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi nad poljem realnih brojeva, naziva se **racionalna funkcija**.

Racionalne funkcije se dele na prave i neprave. **Prava** racionalna funkcija je ona kod koje je $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$, a **neprava** ona kod koje je $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$.

Primer:
$r(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+5}$ je prava racionalna funkcija;

$r(x) = \dfrac{x^3+6}{x-1}$ je neprava racionalna funkcija;

$r(x) = \dfrac{x-7}{x+9}$ je neprava racionalna funkcija;

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije ili samo polinoma.

Prave racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

gde $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$, nazivaju se **parcijalni razlomci**.

Svaka prava racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka.

Rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

- Ukoliko je racionalna funkcija **neprava** vrši se deljenje polinoma u brojiocu sa polinomom u imeniocu. Nakon deljenja dobija se polinom ili zbir polinoma i prave racionalne funkcije.
- **Faktoriše** se polinom u imeniocu prave racionalne funkcije nad poljem realnih brojeva (faktori su linearni ili kvadratni koji nemaju realne nule).
- Prava racionalna funkcija **rastavlja se na zbir parcijalnih razlomaka**. Posmatraju se faktori imenioca prave racionalne funkcije.
  - Faktor oblika $(x-a)^k$ daje sledećih k sabiraka parcijalnih razlomaka sa konstantama u brojiocima:
  $$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$
  - Faktor oblika $(x^2+px+q)^m$, $p^2-4q<0$, daje sledećih m sabiraka parcijalnih razlomaka sa opštim linearnim polinomima u brojiocima:
  $$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \ldots, \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Primer: Na sledećim pravim racionalnim funkcijama, sa faktorisanim imeniocima prikazano je kako se vrši rastavljanje na zbir parcijalnih razlomaka.

$$\frac{x^2-5x+3}{(x+4)(x-3)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2},$$

$$\frac{2x^2+4x-3}{(x+1)x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2},$$

$$\frac{3x^3+x+7}{(x^2+4)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2},$$

$$\frac{5x^4+3x-7}{(x^2+5)^2(x-7)} = \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)^2} + \frac{E}{(x-7)},$$

$$\frac{2x^3+3}{(x+1)^3(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)}.$$

Nepoznate konstante određuju se tako što se cela jednakost pomnoži sa imeniocem prave racionalne funkcije i potom se izjednače koeficijenti uz iste stepene promenljive sa leve i desne strane.

(1) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalne funkcije:

(a) $r(x) = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$;

(b) $r(x) = \dfrac{x^3-x}{(x-1)^2(x^2+1)}$;

(c) $r(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^5+2x^4+2x^3+x^2}$;

(d) $r(x) = \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-5x+5}{x^3-2x^2+2x-4}$.

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE

Zadatak 8.43