POLINOMI

Polinom nad proizvoljnim poljem $\mathbb{F}=(F,+,\cdot)$ je uređena k-torka elemenata tog polja kod koje je poslednja komponenta različita od "nule" polja, tj. polinom je

$$p=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n)\,,\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\,,\ a_i\in F,\ a_n\neq 0.$$

- $a_n,a_{n-1},\ldots,a_0$ su **koeficijenti** polinoma;
- a_0 je **slobodan član** polinoma;
- a_n je **vodeći koeficijent;**
- ako je $a_n=1$ polinom je **normiran** (normalizovan);
- $n=\deg\big(p\big)$ je **stepen** polinoma p;
- ako je $n=0$ i $a_0\neq 0$, onda je p **konstantan polinom** nultog stepena.
- za $n=0$ i $a_0=0$ polinom p je **nula polinom**. Stepen nula polinoma nije definisan.
- $F\left[x\right]$ je skup svih polinoma nad poljem $\mathbb{F}$.
- $(F\left[x\right],+,\cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom, gde su $+$ i $\cdot$ sabiranje i množenje polinoma.

Polinomu $p=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n)$ nad poljem $\mathbb{F}$ jednoznačno odgovara **polinomski izraz**

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

tj. svaki polinom se može poistovetiti sa odgovarajućim polinomskim izrazom (iako su to formalno različiti pojmovi) pa je uobičajeno da se za polinomski izraz $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, kaže da je polinom.

Polinomska funkcija je funkcija definisana polinomskim izrazom, tj. funkcija

$$p:F\longrightarrow F,\ p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ a_i\in F.$$

Polinomska funkcija se u opštem slučaju ne može poistovetiti sa polinomom jer u slučaju konačnih polja različitim polinomima odgovaraju iste polinomske funkcije. U slučaju beskonačnih polja postoji uzajamno jednoznačna korespodencija između polinoma i polinomskih funkcija, pa se u tom sličaju može koristiti naziv polinom i za polinomsku funkciju.

Kako će ovde biti reči samo o polinomima nad beskonačnim poljima za polinomsku funkciju će biti korišćen termin polinom.

Dva nenula polinoma su **jednaka** akko su istog stepena i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

Sabiranje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x))=n$ i $\deg(q(x))=m$. Sabiranje polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se koeficijenti uz iste stepene promenljive saberu. Stepen polinoma $p(x)+q(x)$ je

$$\deg\big(p(x)+q(x)\big)\leq\max\{n,m\}.$$

Zbir nula polinoma i polinoma $p(x)$ jeste polinom $p(x)$.

Množenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x))=n$ i $\deg(q(x))=m$. Proizvod polinoma $p(x)$ i $q(x)$ vrši se tako što se pomnože svi sabirci polimoma $p(x)$ sa svim sabircima polinoma $q(x)$. Stepen polinoma $p(x)\cdot q(x)$ je

$$\deg\big(p(x)\cdot q(x)\big)=n+m.$$

Proizvod nula polinoma i polinoma $p(x)$ je nula polinom.

Deljenje polinoma

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi takvi da je $\deg(p(x))=n$ i $\deg(q(x))=m$, gde je $n\geq m$. Tada postoje jedinstveni polinomi $s(x)$ i $r(x)$, tako da je

$$p(x)=q(x)s(x)+r(x),$$

gde je $\deg\big(r(x)\big)<\deg\big(q(x)\big)$ ili je $r(x)=0$. Ako je $r(x)=0$, tada je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $q(x)$, tj. polinom $q(x)$ deli polinom $p(x)$, i to se zapisuje $q(x)\mid p(x)$.

Polinom $s(x)$ naziva se količnik, a $r(x)$ ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $q(x)$.

Deljenje polinoma često se piše i u obliku

$$\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}.$$

Količnik pri deljenju nula polinoma $p(x)$ sa proizvoljnim nenula polinomom $q(x)$ je nula polinom.

Primer: Odrediti količnik $s(x)$ i ostatak $r(x)$ pri deljenju polinoma $p(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ polinomom $q(x) = x^2 - x + 2$.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x + 1) : (x^2 - x + 2) = \underbrace{x^3 + 2x^2 - 4}_{\text{količnik}} \\
\underline{-(x^5 - x^4 + 2x^3)} \\
\quad 2x^4 - 2x^3 - 2x + 1 \\
\quad \underline{-(2x^4 - 2x^3 + 4x^2)} \\
\qquad -4x^2 - 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(-4x^2 + 4x - 8)} \\
\qquad\qquad \underbrace{-6x + 9}_{\text{ostatak}}
\end{array}
$$

Polinom $s(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ je količnik, a $r(x) = -6x + 9$ je ostatak pri deljenju $p(x)$ sa $q(x)$. Odnosno,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^5 + x^4 - 2x + 1}{x^2 - x + 2} = x^3 + 2x^2 - 4 + \frac{-6x + 9}{x^2 - x + 2}.$$

ZADACI

(1) Podeliti polinome:

  (a) $p(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ sa $q(x) = x^2 - 2x + 2$;

  (b) $p(x) = x^3 + 2x^2 + 7$ sa $q(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

Bezuova teorema: Ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$, $\deg(p(x)) > 0$, polinomom $x - \alpha$ je $p(\alpha)$, tj. vrednost polinoma $p(x)$ u tački α.

Primer: Odrediti ostatak pri deljenju polinoma

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 1$$

polinomom $x - 1$ i polinomom $x + 2$.
Primenom Bezuove teoreme ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x - 1$ je

$$p(1) = -1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 + 1 = 1.$$

Analogno, ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x + 2$ je

$$p(-2) = -(-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - (-2) + 1 = -29.$$

ZADACI

(1) Za koje realne vrednosti parametra a je polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 5$ deljiv polinomom $x + 1$?

(2) Odrediti koeficijente a, b i c polinoma $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tako da bude deljiv polinomima $x - 1$ i $x + 2$, a da pri deljenju sa polinomom $x - 4$ daje ostatak 18.

(3) Ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x - 1$ je -5, a sa $x - 2$ je -25. Koliki je ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $(x - 1)(x - 2)$?

(4) Ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x + 1$ je 2, sa $x - 1$ je 3, a sa $x - 2$ je -1. Koliki je ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$?

Hornerova šema: Pri deljenju polinoma n-tog stepena

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

polinomom $x - \alpha$, dobija se količnik $s(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ stepena $n - 1$ i ostatak r, pri čemu je

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = \alpha b_1 + a_1, r = \alpha b_0 + a_0.$$

Ovaj rezultat se zapisuje u obliku sledeće šeme koja se zove Hornerova šema.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
\hline
\alpha & a_n & \alpha b_{n-1} + a_{n-1} & \alpha b_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 + a_1 & \alpha b_0 + a_0 \\
 & \| & \| & \| & & \| & \| \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r
\end{array}
$$

i polinom $p(x)$ se može zapisati u obliku

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - \alpha) \cdot (b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

Primer: Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma

$$p(x) = 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

polinomom $x - 2$.
Deljenjem polinoma:

$$\begin{array}{l}
(3x^3 + x^2 - 2x + 1) : (x - 2) = 3x^2 + 7x + 12, \\
\underline{-(3x^3 - 6x^2)} \\
\qquad 7x^2 - 2x + 1 \\
\qquad \underline{-(7x^2 - 14x)} \\
\qquad\qquad 12x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(12x - 24)} \\
\qquad\qquad\qquad \boxed{25}
\end{array}$$

dobija se količnik $3x^2 + 7x + 12$ i ostatak 25.
Traženi količnik i ostatak mogu se dobiti i primenom Hornerove šeme.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
2 & 3 & 7 & 12 & \boxed{25} \\
 & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 & b_2 & b_1 & b_0 & r
\end{array}$$

Deli se polinom trećeg stepena polinomom prvog stepena, tako da je količnik kvadratni polinom čiji su koeficijenti b_2, b_1 i b_0. Količnik je $3x^2 + 7x + 12$, ostatak je $r = 25$.

Ostatak se može dobiti i primenom Bezuove teoreme, kao vrednost polinoma za $x = 2$, ali na taj način se ne dobija količnik. Ostatak je $p(2) = 3 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 25$.

ZADACI

(1) Koristeći Hornerovu šemu podeliti polinome $p(x) = 3x^5 + 11x^4 + 4x^3 - x^2 + 8x - 22$ i $q(x) = x + 3$.

(2) Napisati polinom $p(x) = -3x^5 - 8x^2 + 8x - 13$ po stepenima od $x + 1$.

Nula ili koren polinoma $p \in F[x]$ je nula odgovarajuće polinomske funkcije, tj. svako $\alpha \in F$ za koji važi da je $p(\alpha) = 0$.

Elemenat $\alpha \in F$ je koren (nula) polinoma $p \neq 0$, $\deg(p) = n \geq 1$ akko je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $(x - \alpha)$,

Elemenat $\alpha \in F$ je **nula (koren) reda** k ($k \in \mathbb{N}$) polinoma $p \in F[x]$ akko je polinom $p(x)$ deljiv sa $(x - \alpha)^k$, a nije deljiv sa $(x - \alpha)^{k+1}$. Za nulu reda $k > 1$ kaže se da je višestruka, a nula reda $k = 1$ je jednostruka.

Primer: U polinomu $p(x) = (x-5)^3(x+2)^4$ broj 5 je koren reda 3 (trostruki koren), a broj -2 je koren reda 4(četvorostruki koren)

Polinom n-tog stepena, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ima tačno n korena u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, pri čemu se svaki koren računa onoliko puta kolika mu je višestrukost.

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nad poljem kompleksnih brojeva znači napisati ga u obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma (x).

Neka je p polinom nad poljem $\mathbb{R}$ (polinom sa realnim koeficijentima) i neka je α koren polinoma p, tada je i konjugovani broj $\overline{\alpha}$ takođe koren polinoma p.

Faktorisati polinom $p(x)$ koji je n-tog stepena, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nad poljem realnih brojeva znači napisati ga kao proizvod polinoma prvog stepena i/ili polinoma drugog stepena koji nemaju realne korene. Dakle, činioci su polinomi oblika $ax + b$ i/ili $cx^2 + dx + e$, $d^2 - 4ce < 0$ za $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Dakle, u faktorizaciji polinoma nad poljem kompleksnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu se pojaviti isključivo polinomi prvog stepena, dok se nad poljem realnih brojeva osim vodećeg koeficijenta mogu pojaviti polinomi prvog stepena i oni polinomi drugog stepena koji nemaju realne nule.

Teorema o racionalnim korenima: Neka je $\frac{p}{q}$ racionalan broj, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ uzajamno prosti brojevi i neka su koeficijenti polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

celi brojevi, pri čemu je $a_n \cdot a_0 \neq 0$. Tada, ako je $\frac{p}{q}$ koren polinoma $p(x)$, onda p deli slobodan član a_0 (tj. $p | a_0$), a q deli koeficijent uz najveći stepen (tj. $q | a_n$).

ZADACI

(1) Naći sve nule polinoma $p(x)$:

  (a) $p(x) = 9x^4 - 12x^3 - 17x^2 + 8x + 4$;

  (b) $p(x) = x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 7x + 6$.

(2) Naći sve nule polinoma $p(x)$, a zatim ga faktorisati nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$:

  (a) $p(x) = 3x^5 + 8x^4 - 10x^2 - 3x + 2$;

  (b) $p(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$.

  (c) $p(x) = 2x^6 + 9x^5 + 22x^4 + 45x^3 + 58x^2 + 36x + 8$;

  (d) $p(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 8x$.

(3) Odrediti realne parametre a i b tako da brojevi -1 i 2 budu koreni polinoma $p(x) = x^4 + (a+1)\,x^3 - 9x^2 + bx + 12$, a zatim za te vrednosti parametara a i b faktorisati polinom $p(x)$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE
Zadatak 8.37, 8.40, 8.41, 8.42, 8.45, 8.49, 8.50, 8.51;
Primer 8.3, 8.5;