KOMPLEKSNI BROJEVI

Kako jednačina $x^2+1=0$ (kao i mnoge druge jednačine) nema rešenje u skupu realnih brojeva (jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$), potrebno je skup realnih brojeva proširiti tako da u novom skupu data jednačina ima rešenje. Zbog toga, se uvodi pojam **imaginarne jedinice** i koja se definiše kao

$$i^2 = -1.$$

Iz ove definicije sledi da za svaki ceo broj k, važi:

$$i^{4k} = 1, \qquad i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1, \qquad i^{4k+3} = -i\ .$$

Primer: $i^{17} = i^{4\cdot 4+1} = i, \quad i^{203} = i^{4\cdot 50+3} = -i, \quad i^{2020} = i^{4\cdot 505} = 1$**.**

ALGEBARSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Kompleksan broj z zapisan **u algebarskom obliku** je broj $z = x + yi$, gde $x, y \in \mathbb{R}$, a i je imaginarna jedinica. Skup svih kompleksnih brojeva označava se sa $\mathbb{C}$, tj.

$$\mathbb{C} = \left\{ x + yi \,|\, x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \land i^2 = -1 \right\}.$$

Realni deo kompleksnog broja $z = x + yi$ je $\mathrm{Re}\,(z) = x$, a **imaginarni deo** je $\mathrm{Im}\,(z) = y$.

Primer:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Re}\,(2+3i) = 2, & \mathrm{Re}\,(-3+7i) = -3, & \mathrm{Re}\,(2-i) = 2, \\
\mathrm{Im}\,(2+3i) = 3, & \mathrm{Im}\,(-3+7i) = 7, & \mathrm{Im}\,(2-i) = -1, \\
\mathrm{Re}\,(5i) = 0, & \mathrm{Re}\,(-3) = -3, & \mathrm{Re}\,(0) = 0, \\
\mathrm{Im}\,(5i) = 5, & \mathrm{Im}\,(-3) = 0, & \mathrm{Im}\,(0) = 0.
\end{array}$$

Dva kompleksna broja data u algebarskom obliku su **jednaka** akko su im jednaki realni i imaginarni delovi, tj.

$$z_1 = z_2 \iff \mathrm{Re}\,(z_1) = \mathrm{Re}\,(z_2) \ \land\ \mathrm{Im}\,(z_1) = \mathrm{Im}\,(z_2)\,.$$

Konjugovano kompleksan broj broja $z = x + yi$ je $\overline{z} = x - yi$.

Primer:

$$\begin{array}{ll}
z = 2+3i \Longrightarrow \overline{z} = 2-3i, & z = -3+7i \Longrightarrow \overline{z} = -3-7i, \\
z = 2-i \Longrightarrow \overline{z} = 2+i, & z = 5i \Longrightarrow \overline{z} = -5i, \\
z = -3 \Longrightarrow \overline{z} = -3, & z = 0 \Longrightarrow \overline{z} = 0.
\end{array}$$

Operacije sa kompleksnim brojevima u algebarskom obliku

Neka je $z_1 = x_1 + y_1 i$, a $z_2 = x_2 + y_2 i$. Tada je:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\, i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\, i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

Primer: Neka je $z_1 = 3 + 5i$ i $z_2 = -1 - 3i$. Tada je:

$z_1 + z_2 = 2 + 2i$,

$z_1 - z_2 = 4 + 8i$,

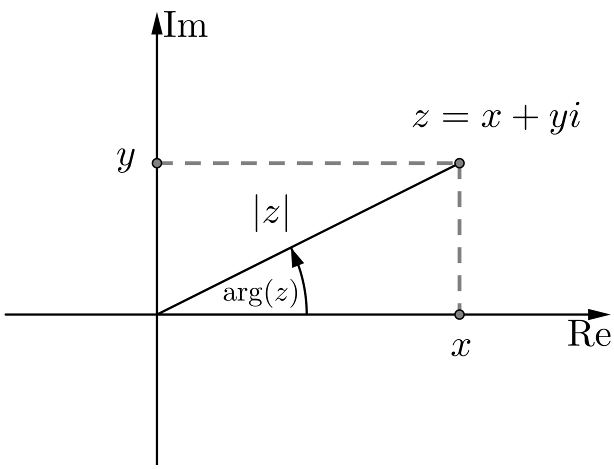
$z_1 \cdot z_2 = (3 + 5i) \cdot (-1 - 3i) = -3 - 9i - 5i - 15i^2 = 12 - 14i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 5i}{-1 - 3i} \cdot \frac{-1 + 3i}{-1 + 3i} = \frac{-3 + 9i - 5i + 15i^2}{1 + 9} = -\frac{9}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Za proizvoljne kompleksane brojeve z i ω važi da je

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\,(z)\,, \qquad z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)\,, \qquad \overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z \pm \omega} = \overline{z} \pm \overline{\omega}, \qquad \overline{z \cdot \omega} = \overline{z} \cdot \overline{\omega}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{\omega}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{\omega}}.$$

Kompleksna (Gausova) ravan



Svaki kompleksan broj se može jednoznačno predstaviti kao tačka u ravni koja se naziva **kompleksna** ili **Gausova ravan**. Kompleksna ravan je određena **realnom** (Re) i **imaginarnom** (Im) osom koje dele ravan na četiri kvadranta.

Moduo kompleksnog broja $z = x + yi$ je rastojanje tačke koja odgovara kompleksnom broju z od koordinatnog početka. Obeležava se sa $|z|$ i izračunava kao $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Primer:

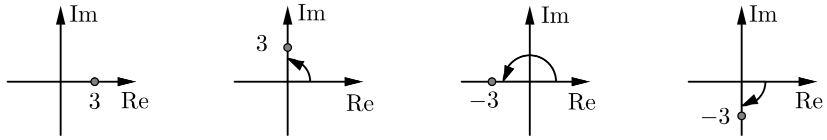
$$|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \qquad |-3 + 7i| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58},$$

$$|2 - i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}, \qquad |5i| = 5, \qquad |-3| = 3.$$

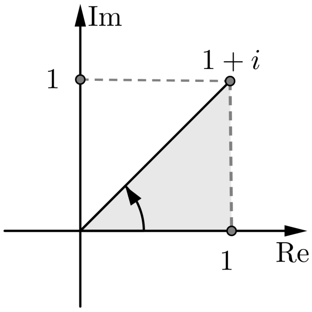
Za proizvoljan kompleksan broj z važi da je $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Argument kompleksnog broja z, u oznaci $\arg(z)$, je merni broj orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivna realna osa, a drugi krak je poluprava $0z$. Argument kompleksnog broja je uvek u intervalu $(-\pi, \pi]$.
Argument kompleksnog broja nula se ne definiše.

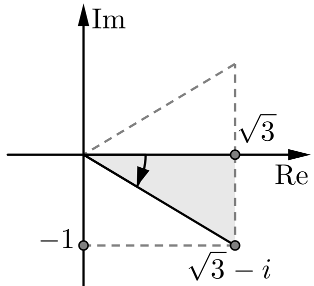
Primer:



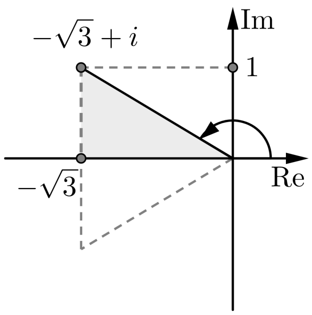
$\arg(3) = 0$ $\qquad \arg(3i) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad \arg(-3) = \pi$ $\qquad \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2}$



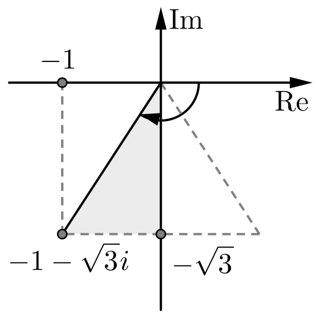
$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$



$\arg(\sqrt{3}-i) = -\dfrac{\pi}{6}$



$\arg(-\sqrt{3}+i) = \dfrac{5\pi}{6}$



$\arg(-1-\sqrt{3}i) = -\dfrac{2\pi}{3}$

Kompleksni brojevi koji se nalaze na istoj polupravoj čija je početna tačka koordinatni početak imaju iste argumente.

Primer:

$\arg(5+5i) = \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \arg(13+13i) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$,

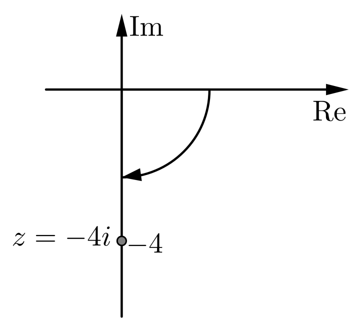
$\arg\left(4\sqrt{3}-4i\right) = \arg\left(\frac{1}{5}\sqrt{3}-\frac{1}{5}i\right) = \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = -\frac{\pi}{6}$,

$\arg\left(-11\sqrt{3}+11i\right) = \arg\left(-\frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4}i\right) = \arg\left(-\sqrt{3}+i\right) = \frac{5\pi}{6}$,

$\arg\left(-21-21\sqrt{3}i\right) = \arg\left(-5-5\sqrt{3}i\right) = \arg\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -\frac{2\pi}{3}$.

Primer: Neka je $z_1 = -4i$ i $z_2 = -3+5i$. Odrediti: $\mathrm{Re}(z_1)$, $\mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1)$, $\mathrm{Im}(z_2)$, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $|z_1|$, $|z_2|$, $\arg(z_1)$, z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1\cdot z_2$ i $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Rešenje: Iz $z_1 = -4i$ sledi da je
$\mathrm{Re}(z_1) = 0$, $\mathrm{Im}(z_1) = -4$,
a $\overline{z_1} = 4i$.
Sa slike se vidi da je $|z_1| = 4$ i $\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{2}$.
Iz $z_2 = -3+5i$ sledi da je
$\mathrm{Re}(z_2) = -3$, $\mathrm{Im}(z_2) = 5$,
$\overline{z_2} = -3-5i$,
a $|z_2| = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{34}$.



Dalje je,

$z_1 + z_2 = -4i + (-3+5i) = -3 + i,$
$z_1 - z_2 = -4i - (-3+5i) = 3 - 9i,$
$z_1 \cdot z_2 = -4i \cdot (-3+5i) = 12i - 20i^2 = 20 + 12i,$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-4i}{-3+5i} \cdot \frac{-3-5i}{-3-5i} = \frac{12i-20}{9+25} = -\frac{10}{17} + \frac{6}{17}i.$

ZADACI

(1) Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 - 2i$ i $z_2 = -4 + 5i$. Odrediti: $\mathrm{Re}\,(z_1)$, $\mathrm{Im}\,(z_1)$, $|z_1|$, $\overline{z_1}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ i $\left|\frac{2z_1 + z_2 + 3 + i}{\overline{z_1}^2 - z_2 - 2} + \sqrt{3}\right|$.

(2) Odrediti kompleksan broj z iz uslova da je

$$\mathrm{Re}\,(z + zi) = 2 \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1-\overline{z}}{i}\right) = -3.$$

(3) Odrediti kompleksan broj z iz uslova da je

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(z-2)\,i + 2\overline{z}}{i-3}\right) = -\frac{13}{10} \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}\left(\frac{(z-2)\,i + 2\overline{z}}{i-3}\right) = -\frac{11}{10}.$$

(4) Odrediti kompleksan broj z iz uslova da je

$$\mathrm{Im}\,((3+i)\cdot\overline{z}) - 2i\mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{1-i}\right) + |4-3i| = -2 + i.$$

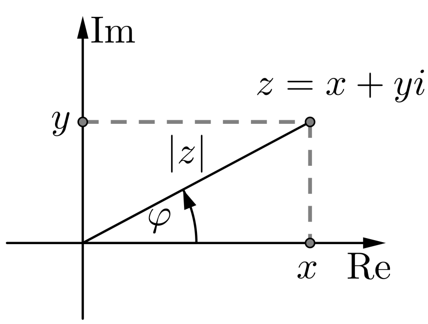
(5) Izračunati $\sqrt{-24-10i}$ i rešenja zapisati u algebarskom obliku.

(6) U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu

$$\left((z-i)^2 - 2i\right)(1+2i) = -7 - 4i.$$

TRIGONOMETRIJSKI I EKSPONENCIJALNI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Kada se kompleksan broj $z = x + yi$, $z \neq 0$, predstavi u kompleksnoj ravni, iz pravouglog trougla sa slike vidi se da je:



$\sin\varphi = \frac{y}{|z|} \implies y = |z|\sin\varphi,$

$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} \implies x = |z|\cos\varphi,$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0,$

gde je $|z|$ moduo kompleksnog broja z, a $\varphi \in (-\pi, \pi]$ njegov argument.

Zamenom ovih jednakosti u algebarski oblik kompleksnog broja dobija se **trigonometrijski oblik kompleksnog broja**

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Napomena: Kako su sinus i kosinus periodične funkcije sa periodom $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ za ugao φ se može uzeti $\varphi = \arg{(z)} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uobičajeno je da se uzima glavna vrednost koja je iz intervala $(-\pi, \pi]$, te će u slučaju da vrednost ugla izlazi iz tog intervala biti potrebno transformisati je u njega.

Na osnovu Ojlerove formule $\cos\varphi + i\sin\varphi \overset{\text{def}}{=} e^{\varphi i}$, iz trigonometrijskog oblika dobija se **eksponencijalni oblik kompleksnog broja**

$$z = |z|e^{\varphi i}.$$

Primer: Predstaviti u eksponencijalnom i trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve

a) $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$, b) $z_2 = -5 + 5i$, c) $z_3 = 4 - 4\sqrt{3}i$,

d) $z_4 = -3 - 3i$, e) $z_5 = 5$, f) $z_6 = -6$,

g) $z_7 = 5i$, h) $z_8 = -6i$.

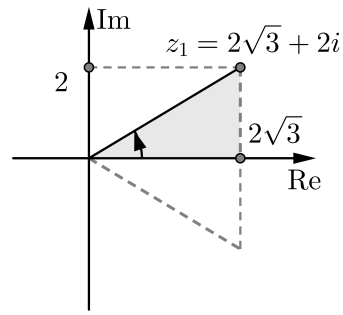
Rešenje: Kako je svaki kompleksan broj u eksponencijalnom (trigonome- trijskom) obliku određen svojim modulom i argumentom, to za svaki od ovih brojeva treba odrediti moduo i argument.

a) Kako je za kompleksan broj

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$$

moduo $|z_1| = \sqrt{12+4} = 4$, a
argument $\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{6}$,
to je

$$z_1 = 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

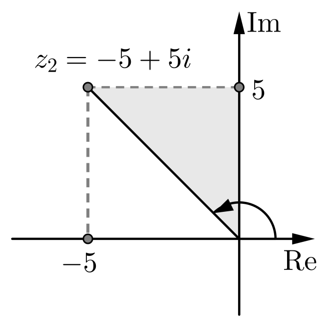


b) Kako je za kompleksan broj

$$z_2 = -5 + 5i$$

moduo $|z_2| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$,
a argument $\arg(z_2) = \dfrac{3\pi}{4}$,
to je

$$z_2 = 5\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

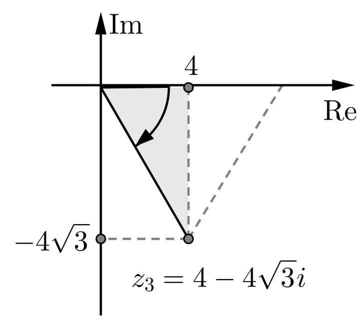


c) Kako je za kompleksan broj

$$z_3 = 4 - 4\sqrt{3}i$$

moduo $|z_3| = \sqrt{16+48} = 8$, a
argument $\arg(z_3) = -\dfrac{\pi}{3}$,
to je

$$z_3 = 8e^{-\frac{\pi}{3}i} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

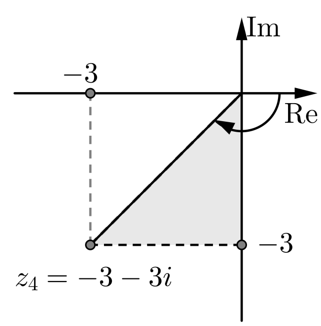


d) Kako je za kompleksan broj

$$z_4 = -3 - 3i$$

moduo $|z_4| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, a
argument $\arg(z_4) = -\dfrac{3\pi}{4}$,
to je

$$z_4 = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

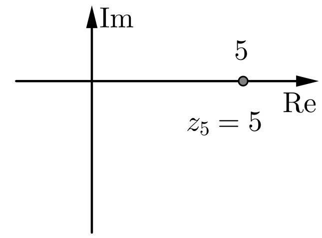


e) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_5 = 5$$

moduo $|z_5| = 5$, a
argument $\arg(z_5) = 0$, pa je

$$z_5 = 5e^{0i} = 5(\cos 0 + i \sin 0).$$

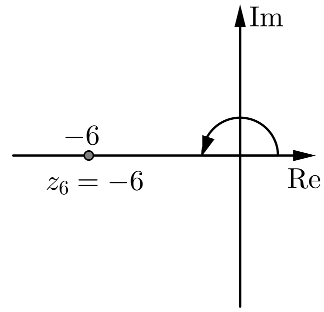


f) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_6 = -6$$

moduo $|z_6| = 6$, a
argument $\arg(z_6) = \pi$, pa je

$$z_6 = 6e^{\pi i} = 6(\cos \pi + i \sin \pi).$$

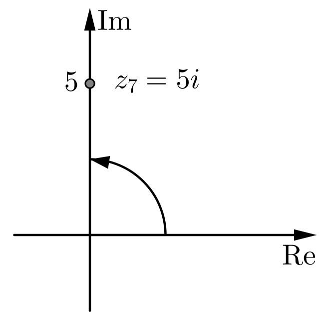


g) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_7 = 5i$$

moduo $|z_7| = 5$, a
argument $\arg(z_7) = \dfrac{\pi}{2}$, pa je

$$z_7 = 5e^{\frac{\pi}{2}i} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

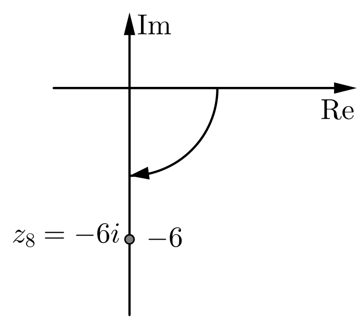


h) Sa slike se vidi da je za kompleksan broj

$$z_8 = -6i$$

moduo $|z_8| = 6$, a
argument $\arg(z_8) = -\dfrac{\pi}{2}$, pa je

$$z_8 = 6e^{-\frac{\pi}{2}i} = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$



Primer: Predstaviti u algebarskom obliku kompleksne brojeve

a) $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$, b) $z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$, c) $z_3 = 3e^{\pi i}$, d) $z_4 = 5e^{-\frac{\pi}{2}i}$

Rešenje:

a) $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$

b) $z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} - i\sin\dfrac{3\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i,$

c) $z_3 = 3e^{\pi i} = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1+0) = -3,$

d) $z_4 = 5e^{-\frac{\pi}{2}i} = 5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 5(0-i) = -5i.$

Kompleksni brojevi

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) = |z_1|e^{\varphi_1 i} \quad \text{i}$$
$$z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = |z_2|e^{\varphi_2 i}$$

su **jednaki** akko je

$$|z_1| = |z_2| \quad \wedge \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Konjugovano kompleksan broj broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{\varphi i}$ je $\overline{z} = |z|(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|e^{-\varphi i}$.

Operacije sa kompleksnim brojevima u eksponencijalnom (trigonometrijskom) obliku

Neka je

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) = |z_1|e^{\varphi_1 i} \quad \text{i}$$
$$z_2 = |z_2|\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = |z_2|e^{\varphi_2 i}.$$

Tada je

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right) = |z_1||z_2|e^{(\varphi_1+\varphi_2)i},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i}.$$

Stepenovanje kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{\varphi i}$ se radi po formuli

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n e^{n\varphi i}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Korenovanje kompleksnog broja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{\varphi i}$ se radi po formuli

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \ n \in \mathbb{N}.$$

Za kompleksan broj z važi da $\sqrt[n]{z}$ $(z \neq 0)$ ima n različitih vrednosti, koje predstavljene u kompleksnoj ravni obrazuju temena pravilnog n-tougla upisanog u kružnicu sa centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{|z|}$. Svako od tih temena može se dobiti od prethodnog temena njegovom rotacijom oko koordinatnog početka za ugao $\dfrac{2\pi}{n}$.

Primer: U skupu kompleksnih brojeva, izračunati $\sqrt[4]{16}$ u algebarskom obliku i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Kako je $16 = 16e^{0i}$, to je

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16e^{0i}} = 2e^{\frac{0+2k\pi}{4}i} = 2e^{\frac{k\pi}{2}i}, \ k = 0, 1, 2, 3.$$

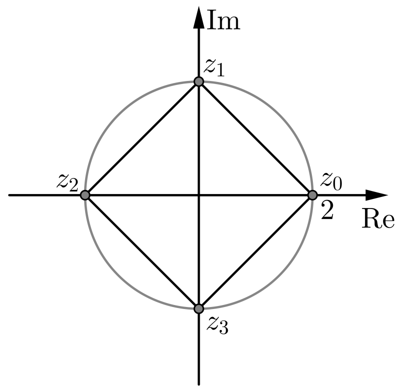
Za svako k dobija se po jedno rešenje:

$k = 0 \implies z_0 = 2e^{0i} = 2,$

$k = 1 \implies z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = 2i,$

$k = 2 \implies z_2 = 2e^{\pi i} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2,$

$k = 3 \implies z_3 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} = 2e^{-\frac{\pi}{2}i} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = -2i.$



Primer: U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu

$$z^3 + 27 = 0.$$

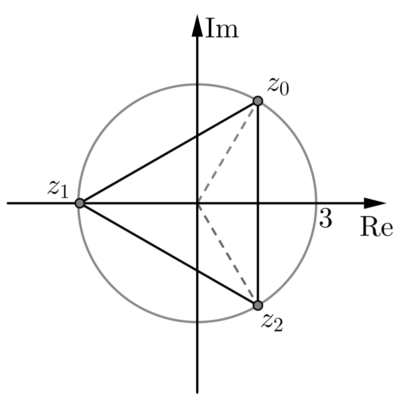
Rešenja napisati u algebarskom obliku i predstaviti u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Jednačina $z^3 + 27 = 0$ ekvivalentna je sa $z = \sqrt[3]{-27}$. Kako je $-27 = 27e^{\pi i}$, to je

$$z = \sqrt[3]{27e^{\pi i}} = 3e^{\frac{\pi + 2k\pi}{3} i}, \ k = 0, 1, 2.$$

Za svako k dobija se po jedno rešenje:

$$\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Longrightarrow \quad z_0 = 3e^{\frac{\pi}{3} i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i, \\
k = 1 \quad &\Longrightarrow \quad z_1 = 3e^{\pi i} = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -3, \\
k = 2 \quad &\Longrightarrow \quad z_2 = 3e^{\frac{5\pi}{3} i} = 3e^{-\frac{\pi}{3} i} = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i.
\end{aligned}$$



ZADACI

(1) Odrediti kompleksan broj z u algebarskom i eksponencijalnom obliku ako je

$$z = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{536} - \left|\overline{3 - 7i} + \overline{3i}\right| + 6}{i^{2011}}.$$

(2) Jedno rešenje jednačine $\left(z - \sqrt{3} + 2i\right)^6 = a$ je $z_1 = -3i$. Odrediti a i ostala rešenja ove jednačine.

(3) U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu

$$(3+4i)\,z^5+4i-5=7i-9.$$

(4) Izračunati u algebarskom obliku

$$\sqrt[3]{8\left(\frac{2-3i}{5-i}\right)^5+1}$$

i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

(5) Izračunati u algebarskom obliku

$$\sqrt[4]{4i\left(\frac{-2+i}{3+i}\right)^6+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

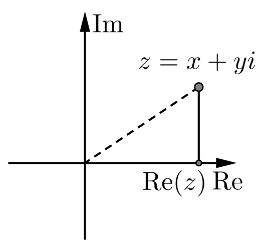
i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.

(6) Neka je kompleksan broj z takav da je $|z|=1$ i $\arg(z)=\dfrac{\pi}{12}$.

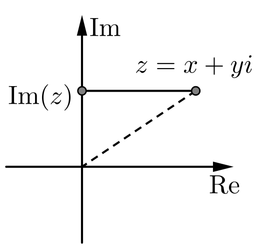
a) Pokazati da je $\dfrac{i\left(1+z^6\right)}{\overline{z}\left(z^2-i\right)}=-\sqrt{2}$.

b) Izračunati $\sqrt[3]{z^3}$.

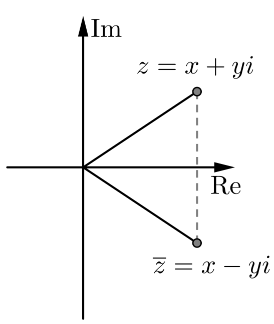
GEOMETRIJSKE INTERPRETACIJE U KOMPLEKSNOJ RAVNI

- 

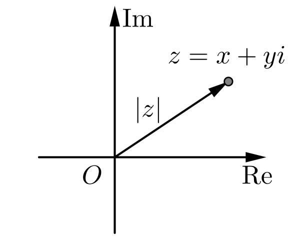
  Projekcija tačke z na realnu osu je $\mathrm{Re}\,(z)$.

- 

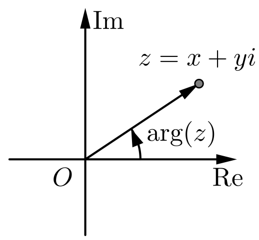
  Projekcija tačke z na imaginarnu osu je $\mathrm{Im}\,(z)$.

- 

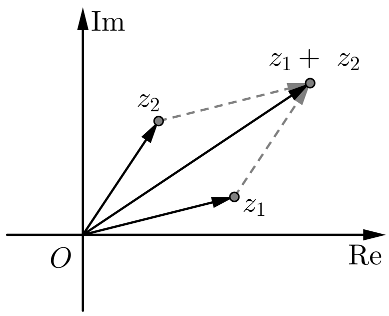
  Konjugovano kompleksan broj $\overline{z}$ je tačka koja je osnosimetrična tački z u odnosu na realnu osu.

- 

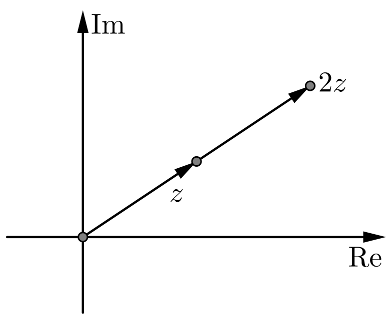
Moduo kompleksnog broja z, $|z|$, je intenzitet vektora $\overrightarrow{Oz}$.

- 

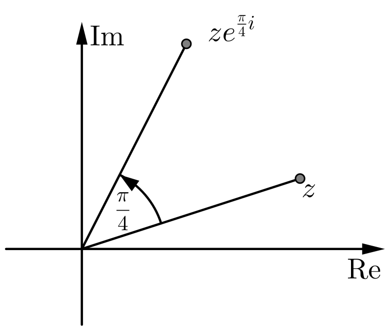
Argument kompleksnog broja z, $\arg(z)$, je mera orijentisanog ugla kojeg zaklapaju pozitivan deo realne ose i vektor $\overrightarrow{Oz}$.

- 

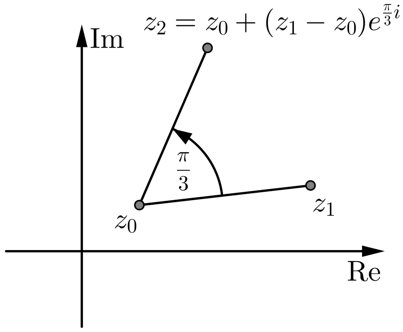
Sabiranje kompleksnog broja z_1 sa kompleksnim brojem z_2 predstavlja translaciju vektora $\overrightarrow{Oz_1}$ za vektor $\overrightarrow{Oz_2}$.

- 

Množenje kompleksnog broja z sa realnim brojem $\alpha \neq 0$ predstavlja homotetiju sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom α. (slika je data za $\alpha = 2$)

- 

Množenje kompleksnog broja z sa kompleksnim brojem $e^{\theta i}$ predstavlja rotaciju broja z oko koordinatnog početka za ugao θ. (slika je data za $\theta = \frac{\pi}{4}$)

- 

Množenje kompleksnog broja $z_1 - z_0$ sa kompleksnim brojem $e^{\theta i}$ predstavlja rotaciju broja z_1 oko kompleksnog broja z_0 za ugao θ (slika je data za $\theta = \frac{\pi}{3}$), tj.

$$\rho_{z_0,\theta}\,(\overrightarrow{z_0 z_1}) = \overrightarrow{z_0 z_2} \iff z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)\, e^{\theta i}.$$

Primer: Odrediti treće teme jednakostraničnog trougla $z_1 z_2 z_3$ koje se nalazi u drugom kvadrantu, ako su data temena $z_1 = 1 + 2i$ i $z_2 = -2 + i$.

Primer: Odrediti preostala temena kvadrata $z_1 z_2 z_3 z_4$, ako se zna da su temena $z_1 = -2 + i$ i $z_3 = 4 - 3i$ naspramna.

Primer: Odrediti preostala temena kvadrata $z_1 z_2 z_3 z_4$, ako se zna da se jedno od njih nalazi u drugom kvadrantu, a temena $z_1 = 1 - 3i$ i $z_2 = 3 + i$ su susedna.

ZADACI

(1) Neka je $z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ teme pravog ugla jednakokrako-pravouglog trougla, a $z_2 = 3i$ drugo teme tog trougla. Naći treće teme trougla koje leži u trećem kvadrantu.
(2) Rešenja jedna čine $z^2 = 3 + 4i$ su temena kvadrata u kompleksnoj ravni. Naći druga dva temena ako se zna da ona imaju negativan imaginaran deo.
(3) Data je jednačina $z^4 = -2 - 2\sqrt{3}i$. Ako su rešenja date jednačine z_0, z_1, z_2 i z_3 odrediti tačku z_4 u prvom kvadrantu tako da trougao $z_0 z_1 z_4$ bude jednakostrani;an.

ZA VEŽBU:IZ SKRIPTE
Zadatak 8.1, 8.2, 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.15, 8.17, 8.18, 8.20, 8.21, 8.23, 8.24 a, 8.25, 8.28, 8.29, 8.30, 8.31a;
Primer 8.11;