GRUPE

Grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ je **grupa** akko

(1) je operacija $*$ asocijativna, tj. ako je $\mathcal{G}$ polugrupa (asocijativni grupoid),

(2) postoji levi neutralni element, tj.
$$\exists e \in G,\, \forall x \in G,\, e * x = x,$$

(3) za svaki element $x \in G$ postoji njemu levi inverzni element $x' \in G$, tj.
$$\forall x \in G,\, \exists x' \in G,\, x' * x = e.$$

Grupa u kojoj važi komutativni zakon zove se **komutativna** ili **Abelova grupa**.

U grupi uvek važi:

- levi neutralni element je istovremeno i desni neutralni element, pa je to onda neutralni element i on je jedinstven,
- levi inverzni elementi su istovremeno i desni inverzni elementi, pa su to inverzni elementi i oni su jedinstveni,
- zakon kancelacije, jer je svaka grupa asocijativa, ima neutralni i inverzne elemente.

Primer: Da li su sledeći uređeni parovi grupe?

$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\{-1, 0, 1\}, +)$, $(\mathbb{I} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Grupa $(A, \cdot)$ se naziva multiplikativna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 1 i čita "jedinica grupe", a inverzni elemenat od x se označava sa x^{-1}.

Grupa $(A, +)$ se naziva aditivna grupa i u njoj se neutralni elemenat označava sa 0 i čita "nula grupe", a inverzni od x se označava sa $-x$.

ZADACI

(1) Da li se date nepotpune Kejlijeve tablice mogu dopuniti do tablica grupovnih operacija?

(a)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a			
b		a	a

,

(b)

$*$	e	a	b	c
e	e			
a	a			e
b	b			
c	c		e	

.

(2) Na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definisana je operacija $*$ sa
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ a * b = abk,$$
gde je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ data konstanta. Ispitati da li je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ Abelova grupa.

(3) Na skupu $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ b \neq 0\}$ definisana je operacija $*$ sa
$$\forall\ (a, b), (c, d) \in G,\ (a, b) * (c, d) = (ad - d + c, bd).$$
Ispitati da li je $(G, *)$ grupa, i da li je komutativna.

(4) Date su funkcije $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Ispitati da li je $(\{f, g, h\}, \circ)$ Abelova grupa.

(5) Date su funkcije $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$ i $u(x) = -\dfrac{1}{x}$. Ispitati da li je $(\{f, g, h, u\}, \circ)$ Abelova grupa.

Neka su $\mathcal{H} = (H, *)$ i $\mathcal{G} = (G, *)$ grupe. Tada je $\mathcal{H}$ **podgrupa** grupe $\mathcal{G}$ akko je $H \subseteq G$ i operacija $*$ iz $\mathcal{H}$ je restrikcija operacije $*$ iz $\mathcal{G}$.

Neutralni elemenat grupe je takođe neutralni elemenat i svake njene podgrupe.

Svaka grupa (osim one koja se sastoji samo od neutralnog elementa) ima bar dve podgrupe, takozvane trivijalne podgrupe:

- podgrupu koja se sastoji samo od neutralnog elementa i

- celu grupu koja je uvek sama sebi podgrupa.

Da bi $\mathcal{H} = (H, *)$ bila podgrupa grupe $\mathcal{G} = (G, *)$, gde je $\emptyset \neq H \subseteq G$, dovoljno je da operacija $*$ bude zatvorena u H, da neutralni element grupe $\mathcal{G}$ pripada skupu H i da za svako $x \in H$ njegov inverzni elemenat u $\mathcal{G}$ pripada skupu H.

Lagranžova teorema: Ako je $\mathcal{G}$ konačna grupa i $\mathcal{H}$ podgrupa grupe $\mathcal{G}$, tada je broj svih elemenata grupe $\mathcal{G}$ deljiv brojem svih elemenata podgrupe $\mathcal{H}$.

Primer: Primeri podgrupa:

- $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{Z}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$,
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $((0, \infty), \cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Primer: Grupoid $(G, \circ)$ kod kog je $G = \{e, a, b, c\}$, a operacija $\circ$ zadata tablicom

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & e & a & b & c \\ \hline e & e & a & b & c \\ a & a & e & c & b \\ b & b & c & e & a \\ c & c & b & a & e \end{array}$$

je Abelova grupa i naziva se Klajnova grupa. Klajnovu grupu karakteriše to da je svaki elemenat sam sebi inverzan.

Primer: Naći sve podgrupe Klajnove grupe.

- trivijalne: $(\{e\}, \circ)$, $(G, \circ)$

- netrivijalne: Kako na osnovu Lagranžove teoreme broj elemenata podgrupe mora da deli broj elemenata grupe, to Klajnova grupa može da ima samo podgrupe sa 1, 2 ili 4 elementa. Sa 1 i 4 elementa su trivijalne podgrupe, a sa 2 moraju sadržati neutralni elemenat pa su kandidati za netrivijalne podgrupe

$$(\{e, a\}, \circ) \qquad (\{e, b\}, \circ) \qquad (\{e, c\}, \circ)$$

$$\begin{array}{c|cc} \circ & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \circ & e & b \\ \hline e & e & b \\ b & b & e \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \circ & e & c \\ \hline e & e & c \\ c & c & e \end{array}.$$

Direktnom proverom iz tablica vidi se da ovo jesu grupe, pa Klajnova grupa osim trivijalnih ima i tri netrivijalne podgrupe.

Napomena: Kako izomorfizam prenosi osobine sa jednog na drugi grupoid to znači da ako su dva grupoida izomorfna i ako je jedan od njih grupa biće i drugi.

ZADACI

(1) Ispitati da li je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definisana se

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ f(k) = 3k,$$

homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$. Da li je izomorfizam?

(2) Ispitati da li je funkcija $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ definisana se

$$\forall\, k \in \mathbb{Z},\ f(k) = (0, k),$$

homomorfizam grupa $(\mathbb{Z}, +)$ i $\left(\mathbb{Z}^2, +\right)$. Da li je izomorfizam?

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:

Zadatak 6.3 (bez c i g), 6.4, 6.6, 6.7, 6.10 (bez onog dela zadatka u kom se traži maksimalan podskup), 6.13