Bulova algebra

October 28, 2021

$B \neq \emptyset$

$+, \cdot : B^2 \to B$

$' : B \to B$

$0 \neq 1$

Neka je $\mathcal{B} = \boxed{(B, +, \cdot, ', 0, 1)}$ uređena šestorka u kojoj je B neprazan skup, $+$ i $\cdot$ dve binarne operacije skupa B, $'$ unarna operacija skupa B, a 0 i 1 dva različita elementa (konstante) skupa B. Tada je $\mathcal{B}$ **Bulova algebra** ako za svako $a, b, c \in B$ važe

$(\{\bot, \top\}, \vee, \wedge, \neg, \bot, \top)$

AKSIOME BULOVE ALGEBRE:

$+ \to \cdot$

$\cdot \to +$

$0 \to 1$

$1 \to 0$

BA1: *komutativnost*

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \qquad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

BA2: *distributivnost*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c);$$

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

2^n

BA3: *neutralni element*

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a;$$

$p \vee \bot \Leftrightarrow p \qquad p \wedge \top = p$

BA4: *inverzni element (komplement)*

$$a + a' = 1, \quad a \cdot a' = 0.$$

$p \vee \neg p \Leftrightarrow \top \qquad p \wedge \neg p \Leftrightarrow \bot$

U svakoj Bulovoj algebri je broj elemenata oblika 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ne postoji Bulova algebra sa na primer 6 elemenata, već samo sa 2, 4, 8, 16, ... elemenata.

Princip dualnosti: Dva tvrđenja su dualna ako se jedno iz drugog može dobiti zamenom svih pojavljovanja $+$ sa $\cdot$, $\cdot$ sa $+$, 0 sa 1 i 1 sa 0. Može se primetiti da su sve aksiome Bulove algebre dualne. Zbog toga će i sve teorema Bulove algebre biti dualane. To znači da ako se dokaže neka teorema time je automatski dokazana i njoj dualna teorema.

OSNOVNE TEOREME BULOVE ALGEBRE $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

BT1: *zakon idempotentnosti*

$a = a + 0 = a + a \cdot a' = (a+a) \cdot (a+a') = (a+a) \cdot 1$
$= a + a$

$$a + a = a, \quad a \cdot a = a;$$

BT2: *ograničenost*

$$\boxed{a + 1 = 1,} \quad \boxed{a \cdot 0 = 0;}$$

BT3: *apsorbcija*

$$a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a;$$

BT4:

$$a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b;$$

BT5: *asocijativnost*

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

BT6: *jedinstvenost komplementa*

$$(a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0) \Longrightarrow x = a';$$

BT7: *involucja*

$$(a')' = a;$$

BT8:

$$0' = 1, \quad 1' = 0;$$

BT9: *De Morganovi zakoni*

$$(a + b)' = a' \cdot b', \quad (a \cdot b)' = a' + b'.$$

Dokaz:

BT1: $a + a = a$

$$a \overset{BA3}{=} a + 0 \overset{BA4}{=} a + a \cdot a' \overset{BA2}{=} (a + a) \cdot (a + a') \overset{BA4}{=} (a + a) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + a;$$

BT2: $a + 1 = 1$

$$a{+}1 \overset{BA3}{=} (a + 1){\cdot}1 \overset{BA1}{=} 1{\cdot}(a + 1) \overset{BA4}{=} (a + a'){\cdot}(a + 1) \overset{BA2}{=} a{+}a'{\cdot}1 \overset{BA3}{=} a{+}a' \overset{BA4}{=} 1;$$

BT3: $a + a \cdot b = a$

$$a + a \cdot b \overset{BA3}{=} a \cdot 1 + a \cdot b \overset{BA2}{=} a \cdot (1 + b) \overset{BA1}{=} a \cdot (b + 1) \overset{BT2}{=} a \cdot 1 \overset{BA3}{=} a;$$

BT4: $a + a' \cdot b = a + b$

$$a + a' \cdot b \overset{BA2}{=} (a + a') \cdot (a + b) \overset{BA4}{=} 1 \cdot (a + b) \overset{BA1}{=} (a + b) \cdot 1 \overset{BA3}{=} a + b;$$

BT5: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$$
\begin{aligned}
(a+b)+c &\overset{BA3}{=} ((a+b)+c)\cdot 1 \overset{BA4}{=} ((a+b)+c)\cdot(a+a') \\
&\overset{BA1,\,BA2}{=} (a\cdot(a+b)+a\cdot c)+(a'\cdot(a+b)+a'\cdot c) \\
&\overset{BT3,\,BA2}{=} (a+a\cdot c)+((a'\cdot a+a'\cdot b)+a'\cdot c) \\
&\overset{BA1,\,BT3,\,BA4}{=} a+((0+a'\cdot b)+a'\cdot c) \\
&\overset{BA1,\,BA3}{=} a+(a'\cdot b+a'\cdot c) \overset{BA2}{=} a+a'\cdot(b+c) \overset{BT4}{=} a+(b+c)\,;
\end{aligned}
$$

BT6: $(a+x=1 \;\wedge\; a\cdot x=0) \Longrightarrow x=a'$
Neka je $a+x=1 \;\wedge\; a\cdot x=0$.

$$
\begin{aligned}
x &\overset{BA3}{=} x\cdot 1 \overset{BA4}{=} x\cdot(a+a') \overset{BA2}{=} x\cdot a+x\cdot a' \overset{BA1}{=} a\cdot x+a'\cdot x \overset{pp.}{=} 0+a'\cdot x \\
&\overset{BA4}{=} a\cdot a'+a'\cdot x \overset{BA1}{=} a'\cdot a+a'\cdot x \overset{BA2}{=} a'\cdot(a+x) \overset{pp.}{=} a'\cdot 1 \overset{BA3}{=} a'\,;
\end{aligned}
$$

BT7: $(a')' = a$
Iz BA4 sledi

$$
a+a'=1 \;\wedge\; a\cdot a'=0 \overset{BA1}{\Longrightarrow} a'+a=1 \;\wedge\; a'\cdot a=0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} a=(a')'\,;
$$

BT8: $0' = 1$
Iz BT2 i BA3 sledi

$$0 + 1 = 1 \ \wedge \ 0 \cdot 1 = 0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} 1 = 0';$$

BT9: $(a + b)' = a' \cdot b'$

$$\begin{aligned}(a + b) + a' \cdot b' &\overset{BA2}{=} ((a + b) + a') \cdot ((a + b) + b') \\ &\overset{BA1,\,BT5}{=} ((a + a') + b) \cdot (a + (b + b')) \\ &\overset{BA4}{=} (1 + b) \cdot (a + 1) \overset{BA1,\,BT2}{=} 1 \cdot 1 \overset{BA3}{=} 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot a' \cdot b' &\overset{BA1,\,BA2}{=} a \cdot (a' \cdot b') + b \cdot (a' \cdot b') \\ &\overset{BA1,\,BT5}{=} (a \cdot a') \cdot b' + (b \cdot b') \cdot a' \\ &\overset{BA4}{=} 0 \cdot b' + 0 \cdot a' \overset{BA1,\,BT2}{=} 0 + 0 \overset{BA3}{=} 0.\end{aligned}$$

Dakle, $(a + b) + a' \cdot b' = 1 \ \wedge \ (a + b) \cdot a' \cdot b' = 0 \overset{BT6}{\Longrightarrow} (a + b)' = a' \cdot b'$.

U Bulovoj algebri $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ **relacija** $\leq \subseteq B^2$ definisana na sledeći način:

$$\forall\, a, b \in B, \boxed{a \leq b \iff a + b = b}$$

je relacija poretka.

R: $\forall a \in B,\ a \leq a$?

$a \leq a \iff a + a = a \leftarrow$ BT1

AS: $\forall x, y \in B\ \ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$?

$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x + y = y \wedge y + x = x$

$\Rightarrow \underline{\underline{x}} = y + x = x + y = \underline{\underline{y}}$

Dokaz:

Refleksivnost: $\forall\, a \in B,\ a \leq a$ jer je po BT1 $a + a = a$.

Antisimetričnost:
$a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a + b = b \wedge b + a = a \Longrightarrow a = b + a \overset{BA1}{=} a + b = b.$

Tranzitivnost:

$$a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a + b = b \wedge b + c = c$$
$$\Longrightarrow a + c = a + (b + c) \overset{BT5}{=} (a + b) + c = b + c = c \Longrightarrow a \leq c.$$

T: $\forall x, y, z \in B,\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$?

$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x + y = y$

$y + z = z$

$x + z = x + y + z = y + z = z$

$\Rightarrow x \leq z$

Kada se govori o relaciji poretka Bulove algebre misli se na ovu relaciju. Pod Haseovim dijagramom Bulove algebre podrazumeva se Haseov dijagram ove relacije poretka. U odnosu na nju 0 je najmanji, a 1 najveći elemenat.

$B \qquad x \leq y \iff x + y = y$

R: $\forall a \in B, \; a \leq a$?

$a \leq a \implies a + a = a \leftarrow$ BT1

AS: $\forall a, b \in B, \; \underbrace{a \leq b \wedge b \leq a} \implies a = b$?

$a \leq b \wedge b \leq a \implies a + b = b \wedge b + a = a$

$\implies \underline{b} = a + b \overset{BA1}{=} b + a = \underline{a}$

$a + c = c$

T: $\forall a, b, c \in B, \; a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$?

$a \leq b \wedge b \leq c \implies a + b = b \wedge b + c = c$

$\implies a + c = a + b + c = b + c = c$

$\implies a \leq c$

Podalgebra Bulove algebre $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je svaka Bulova algebra $\mathcal{B}_1 = (B_1, +, \cdot, ', 0, 1)$ gde je $B_1 \subseteq B$, a operacije iz $\mathcal{B}_1$ su restrikcije operacija iz $\mathcal{B}$.

Konstante 0 i 1 u podalgebri $\mathcal{B}_1$ su iste kao konstante 0 i 1 u Bulovoj algebri $\mathcal{B}$.

Svaka Bulova algebra ima trivijalne podalgebre $(\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i samu sebe.

PRIMERI BULOVIH ALGEBRI:

1. Bulova algebra iskaznog računa je uređena šestorka $(I, \vee, \wedge, \rceil, \bot, \top)$, gde je $I = \{\bot, \top\}$ i gde su $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ poznate operacije iskaznog racuna - disjunkcija, konjukcija i negacija. Umesto $\bot$, $\top$, $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ često se koriste redom oznake 0, 1, $+$, $\cdot$ i $'$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $p \leq q$ akko $p \vee q \iff q$ akko $p \Longrightarrow q$.

Ova Bulova algebra ima smo jednu trivijalnu podalgebru - samu sebe.

$$(\{\bot, \top\}, \vee, \wedge, \rceil, \bot, \top)$$

$$(\{0, 1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$$

$p \leq q$ akko $p \vee q \iff q$ akko $p \boxed{\Longrightarrow} q$

2. Bulova algebra "partitivni skup" je uređena šestorka $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, A)$, gde je A proizvoljan neprazan skup, a $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup, skupa A.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $X \leq Y$ akko $X \cup Y = Y$ akko $X \subseteq Y$.

$X \leq Y$ akko $X \cup Y = Y$ akko $X \boxed{\subseteq} Y$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

3. Bulova algebra delitelja broja 30 je uređena šestorka $\left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Relacija poretka $\leq$ u ovoj algebri je: $x \leq y$ akko $NZS(x, y) = y$ akko $x \mid y$.

$$\begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & \end{array}$$

Podalgebre su osim trivijalnih $\left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ i

$\left(\{1, 30\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ još i

$\left(\{1, 30, 2, 15\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$,

$\left(\{1, 30, 3, 10\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$ i

$\left(\{1, 30, 5, 6\}, NZS, NZD, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$.

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$\cancel{D_8}$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

D_{15} $15 = 3 \cdot 5$

$\cancel{D_{18}}$ $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

D_{124} $124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$

Neka je n prirodan broj različit od 1 i neka je $D_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid n\}$ (skup svih delitelja broja n). Uređena šestorka $\left(D_n, NZS, NZD, \frac{n}{x}, 1, n\right)$ je Bulova algebra akko je $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, gde su p_1, p_2, ..., p_n međusobno različiti prosti brojevi.

Primer: Da li je $\left(D_{18}, NZS, NZD, \frac{18}{x}, 1, 18\right)$ Bulova algebra?

Kako je $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ po prethodnom sledi da ovo nije Bulova algebra.

BULOVI IZRAZI I POLINOMI

Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Bulova algebra

Konstanta skupa B je proizvoljan elemenat skupa B. **Promenljiva** skupa B je simbol koji se može zameniti bilo kojim elementom skupa B.

Bulovi izrazi:

1. Bulove promenljive i Bulove konstante su Bulovi izrazi.
2. Ako su A i B Bulovi izrazi onda su to i $(A + B)$, $(A \cdot B)$, A' i B'.
3. Bulovi izrazi se dobijaju konačnom primenom 1. i 2.

Primer: $\left((x' + y)' \cdot z\right)$ jeste Bulov izraz, dok $x + y' +$ nije Bulov izraz.

Monom je promenljiva ili njena negacija.

Primer: x, y, z, u, x', y', z', u', ...

Elementarna konjukcija (EK) je konjukcija (proizvod) monoma. Elemenat 1 Bulove algebre je elementarna konjukcija.

Primer: x, xy', $x'yzu$, 1, ...

Disjunktivna normalna forma (DNF) je disjunkcija (zbir) konačno mnogo elementarnih konjukcija.

Primer: $xy' + x' + xyz$, xy', 1, $\ldots$

Savršena elementarna konjukcija u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je elementarna konjukcija u kojoj se javlja svaka od tih promenljivih (negirana ili ne).

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je disjunktivna normalna forma u kojoj učestvuju samo (različite) savršene elementarne konjukcije u odnosu na te promenljive.

Primer: $xyz + x'yz + x'y'z$ je SDNF u odnosu na promenljive x, y, z.

Analogno se definišu elementadna disjunkcija (ED), konjuktivna normalna forma (KNF), savršena elementadna disjunkcija i savršena konjuktivna normalna forma (SKNF).

Svaki Bulov izraz se može svesti na DNF i KNF i pri tome DNF i KNF nisu jedinstveno određeni.

SDNF i SKNF su jedinstveno određeni u odnosu na zadati skup promenljivih koje se pojavljuju u izrazu.