RELACIJE

Uređen par elemenata a i b, u oznaci (a, b) je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, gde je a prva komponenta, a b druga komponenta uređenog para.

Napomena: $(b, a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ pa za $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.
$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Dekartov proizvod skupova A i B je skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga komponenta iz skupa B, tj. $A \times B = \{(a, b) \,|a \in A \wedge b \in B\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$
Na osnovu ovog primera može se zaključiti da Dekartov proizvod nije komutativan, tj. $A \times B \neq B \times A$.

Dekartov kvadrat skupa A je $A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \,|a_1, a_2 \in A\}$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Binarna relacija je bilo koji podskup od $A \times B$, tj. $\rho \subseteq A \times B$.

Ako uređen par (x, y) pripada relaciji ρ kaže se da su x i y u relaciji ρ i piše se $(x, y) \in \rho$ ili $x\rho y$.

Binarna relacija skupa A**,** je bilo koji podskup od A^2, tj. $\rho \subseteq A^2$.

Kako je $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ to su $\emptyset$ i A^2 sigurno relacije skupa A, i one se nazivaju prazna i puna relacija.

Relacije koje imaju konačno mnogo elemenata se mogu zadati na više načina. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $\rho \subseteq A^2$ tada se ρ može zadati na sledeće načine:

- nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\}$
- pomoću drugih relacija: $\rho = \left\{(x, y) \in A^2 | x^2 + y \leq 6\right\}$
- tablično:

ρ	1	2	3
1	$\top$	$\top$	$\top$
2	$\top$	$\top$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$

- grafički.

Relacije koje imaju beskonačno mnogo elemenata mogu se zadati pomoću drugih relacija ili se mogu opisati rečima govornog jezika.

*Primer *:* $A = \{1, 2, 3\}$

$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$\rho_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

$\rho_3 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$\rho_4 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

$\rho_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$

Inverzna relacija relacije ρ je $\rho^{-1} = \{(y, x) \,|\, (x, y) \in \rho\}$

Primer: Inverzne relacije relacija iz Primera * su:

$\rho_1^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$

$\rho_2^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3)\}$

$\rho_3^{-1} = \{(1,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)\}$

$\rho_4^{-1} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$\rho_5^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (2,2), (3,2)\}$

Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq 0$:

- **refleksivnost (R)**: $(\forall x \in A)\, x\rho x$
- **simetričnost (S)**: $(\forall x, y \in A)\, (x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- **antisimetričnost (A)**: $(\forall x, y \in A)\, (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$ ili $(\forall x, y \in A)\, ((x\rho y \wedge x \neq y) \Rightarrow \rceil\, (y\rho x))$
- **tranzitivnost (T)**: $(\forall x, y, z \in A)\, ((x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z)$

Primer: Ispitati osobine relacija iz Primera *.

Relacija je u isto vreme simetrična i antisimetrična akko za svaki njen par važi da su mu komponente jednake, jer ako se pojavi par čije su komponente različite $(a, b) \in \rho$, $a \neq b$, tada simetričnost zahteva da njemu simetričan par pripada relaciji, tj. $(b, a) \in \rho$, ali onda antisimetričnost zahteva da bude $a = b$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom da su komponente različite.

ZADACI

(1) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $A = \{a, b, c\}$:

$\rho_1 = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$,

$\rho_2 = \{(a,a)\}$,

$\rho_3 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (a,c), (c,c)\}$,

$\rho_4 = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c)\}$.

(2) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3\}$ i odrediti inverzne relacije datih relacija:

$\rho_1 = \{(1,3), (1,2), (2,1)\}$,

$\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (2,1), (3,3)\}$,

$\rho_3 = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$,

ρ_4 - relacija "deli".

(3) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

$\rho_1 = \{(4,5), (3,4), (5,3), (4,3), (3,3), (4,4)\}$,

$\rho_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (5,5), (6,6)\}$,

$\rho_3 = \{(3,3), (6,6)\}$,

$\rho_4 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$,

$\rho_5 = \{(2,3), (3,2), (3,3), (2,2)\}$,

$\rho_6 = \emptyset$,

$\rho_7 = A^2$.

(4) Date relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ako je moguće, dopuniti tako da budu refleksivne, simetrične, odnosno tranzitivne.

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (3,3), (2,4)\}$,

$\rho_2 = \{(3,3), (5,5)\}$,

$\rho_3 = \{(3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$,

$\rho_4 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (1,3), (2,4)\}$.

(5) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{N}$:

$\rho_1 = \{(x, x+2) \,|\, x \in \mathbb{N}\}$,

$\rho_2 = \{(x, y) \,|\, x + y = 7,\, x, y \in \mathbb{N}\}$,

$\rho_3 = \{(x, y) \,|\, y = 4x + 1,\, x, y \in \mathbb{N}\}$,

$\rho_4 = \{(5x, 5x) \,|\, x \in \mathbb{N}\}$.

$\rho_5 = \{(x, y) \,|\, x + y \text{ je paran broj},\, x, y \in \mathbb{N}\}$,

(6) Ispitati koje od osobina (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost) imaju sledeće relacije skupa $\mathbb{R}$:

$\rho_1 = \{(2, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$,

$\rho_2 = \{(x, y) \,|\, x + y = 3,\, x, y \in \mathbb{R}\}$,

$\rho_3 = \left\{(x, y) \,|\, y^2 = x^2,\, x, y \in \mathbb{R}\right\}$,

$\rho_4 = \{(5x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

$\rho_5 = \{(x, 5x - 4) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

$\rho_6 = \{(x, y) \,|\, x \cdot y > 0,\, x, y \in \mathbb{R}\}$,

$\rho_7 = \{(x, y) \,|\, x \cdot y = 0,\, x, y \in \mathbb{R}\}$,

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija ekvivalencije (RST)** akko je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Primer: relacija jednakosti $=$ na skupu realnih brojeva, relacija paralelnosti $\parallel$ na skupu svih pravih u prostoru, relacija podudarnosti na skupu svih duži, relacija $\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4), (4,3), (5,5)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,....

Svaka relacija ekvivalencije ρ definisana na skupu A vrši particiju tog skupa, tj. jednoznačno određuje neke neprazne podskupove skupa A od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A. Važi i obrnuto. Za datu particiju skupa A može se definisati relacija ρ na skupu A tako što će proizvoljna dva elementa biti u relaciji ρ akko pripadaju istom podskupu te particije. Ovako definisana relacija je RST relacija.

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- RST relaciji $\rho_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (4,5), (5,4)\}$
  jednoznačno odgovara particija $\{\{1,2\}, \{3\}, \{4,5\}\}$,
- RST relaciji $\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$
  jednoznačno odgovara particija $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$,
- RST relaciji $\rho_3 = A^2$ jednoznačno odgovara particija $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$,
- particiji $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije
  $\rho_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3), (4,5), (5,4)\}$,
- particiji $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ jednoznačno odgovara relacija ekvivalencije
  $\rho_5 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4)\}$.

Na nekom konačnom skupu A može se definisati onoliko relacija ekvivalencije koliko ima particija.

Primer: Sve particije skupa $A = \{1, 2, 3\}$ su: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{1, 2, 3\}$, što znači da se na skupu A može definisati najviše 5 različitih RST relacija.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije skupa A , neka $x \in A$ i neka je sa C_x označen skup svih elemenata $y \in A$ koji su u relaciji ρ sa elementom x, tj. $C_x = \{y | x\rho y \wedge y \in A\}$. Tada se skup C_x naziva **klasa ekvivalencije** elementa x, u odnosu na relaciju ρ. Skup svih klasa ekvivalencije zove se **faktor skup** ili količnički skup i označava sa A/ρ.

Osobine klasa ekvivalencije: neka je ρ RST relacija skupa A

- klase ekvivalencije su, zbog refleksivnosti relacije ρ, neprazni skupovi jer $\forall x \in A,\, x \in C_x$,
- zbog simetričnosti relacije ρ važi da za $\forall x, y \in A,\, x \in C_y \Leftrightarrow y \in C_x$.,
- klase ekvivalencije C_x i C_y skupa A se ili poklapaju ili su disjunktne, tj. $\forall x, y \in A,\, C_x = C_y \vee C_x \cap C_y = \emptyset$,

- unija svih klasa ekvivalencije skupa A, u odnosu na relaciju ρ je sam skup A.

Primer: Neka je $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$ relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3\}$,. Klase ekvivalencije skupa A u odnosu na relaciju ρ su $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2,3\} = C_3$, a faktor skup je $A/\rho = \{C_1, C_2\} = \{\{1\}, \{2,3\}\}$.

Na osnovu prethodnih osobina može se zaključiti da su klase ekvivalencije neprazni podskupovi skupa A koji su međusobno disjunktni i čija unija je skup A, tj. da je faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ jedna particija skupa A.

ZADACI

(1) Neka je dat skup $A = \{1,2,3\}$ i jedna njegova particija $\{\{1\}, \{2,3\}\}$. Odrediti relaciju ekvivalencije skupa A koja odgovara datoj particiji.
(2) Neka je dat skup $A = \{1,2,3\}$ i relacija $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$. Proveriti da li je ova relacija relacija ekvivalencije skupa $A = \{1,2,3\}$, i ako jeste odrediti klase ekvivalencije i faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ.
(3) Relaciju $\rho = \{(2,2), (1,3), (5,5), (3,4)\}$, ako je moguće, dopuniti do relacije ekvivalencije ρ_1 skupa $A = \{1,2,3,4,5\}$, a zatim odrediti faktor skup skupa A u odnosu na relaciju ρ_1.
(4) Napisati relaciju ekvivalencije ρ skupa $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ako je njen faktor skup $A/\rho = \{\{1,3,4\}, \{5\}, \{2,6\}\}$.

Relacija $\rho \subseteq A^2$ je **relacija poretka (RAT)** akko je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Uređen par (A, ρ) je parcijalno uređen skup akko je $A \neq 0$ i ρ RAT relacija skupa A.

Primer: relacije $\leq$ i $\geq$ na skupu prirodnih brojeva, relacija deli $|$ na skupu prirodnih brojeva, relacija
$\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (3,4), (3,5)\}$ na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$,....

Neka je ρ relacija poretka skupa A. Tada je:

- $a \in A$ **najmanji** elemenat skupa A akko $\forall x \in A$, $a\rho x$, tj.

  $a \in A$ najmanji elemenat skupa A akko je on u relaciji sa svakim elementom,
- $a \in A$ **najveći** elemenat skupa A akko $\forall x \in A$, $x\rho a$, tj.

  $a \in A$ najveći elemenat skupa A akko je svaki elemenat u relaciji sa njim,
- $a \in A$ **minimalni** elemenat skupa A akko $\rceil\,(\exists x \in A)(x\rho a \wedge x \neq a)$, tj.

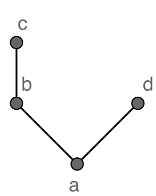
  $a \in A$ minimalni elemenat skupa A akko ni jedan drugi elemenat nije u relaciji sa njim osim njega samog,
- $a \in A$ **maksimalni** elemenat skupa A akko $\rceil\,(\exists x \in A)(a\rho x \wedge x \neq a)$, tj.

  $a \in A$ maksimalni elemenat skupa A akko nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom osim sa samim sobom.

Grafik relacije poretka naziva se **Haseov dijagram**. Svakoj relaciji poretka jednoznačno odgovara jedan Haseov dijagram i obrnuto, na osnovu Haseovog dijagrama se jednoznačno može rekonstruisati relacija poretka kojoj odgovara posmatrani Haseov dijagram.

Primer: Relacija $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,c)\}$ je relacija poretka skupa $A = \{a,b,c,d\}$.

- najmanji elemenat: a
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: a
- maksimalni elemenat: c, d



Ako postoji najmanji elemenat on je jedinstven.
Ako postoji najveći elemenat on je jedinstven.
Minimalnih i maksimalnih elemenata može biti više.
Ako postoji njamanji elemenat on je i jedini minimalni elemenat.
Ako postoji najveći elemenat on je i jedini maksimalni elemenat.

Primer:

- Relacija $\leq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini minimalni i najmanji elemenat je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.
  Relacija $\geq$ u skupu $\mathbb{N}$: jedini maksimalni i najveći elemenat je 1, a najmanjeg i minimalnog elementa nema.
- Relacija deli u skupu $\mathbb{N}$ definisana je sa $m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = km$. Najmanji i jedini minimalni elemenat je 1, a najvećeg i maksimalnog elementa nema.

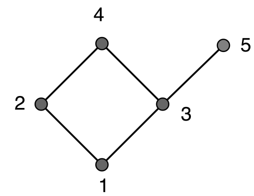
Relacija deli na skupu $A = \{2, 3, 5, 12\}$. Najmanji i najveći elemenat ne postoje, minimalni elementi su 2, 3 i 5, a maksimalni 5 i 12.

- Relacija $\subseteq$ u partitivnom skupu nekog skupa $A \neq 0$. Jedini minimalni i najmanji elemenat je $\emptyset$, a jedini maksimalni i najveći elemenat je A.

ZADACI

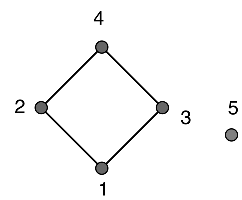
(1) Data je binarna relacija $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (3,4), (3,5)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

- najmanji elemenat: 1
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: 1
- maksimalni elemenat: 4, 5



(2) Data je binarna relacija $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4)\}$ na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

- najmanji elemenat: nema
- najveći elemenat: nema
- minimalni elemenat: 1,5
- maksimalni elemenat: 4, 5



Ako elemenat $a \in A$ nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom skupa A, niti je bilo koji elemenat skupa A u relaciji sa njim, tada je elemenat a istovremeno i minimalni i maksimalni elemenat.

(3) Data je binarna relacija $\rho = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (a,e), (b,a), (b,c), (b,e)\}$ na skupu $A = \{a, b, c, d, e\}$. Dokazati da je ρ relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

(4) Date relacije skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\rho_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$,

$\rho_2 = \{(1,2), (2,3), (1,4), (2,4)\}$,

$\rho_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$,

$\rho_4 = \{(2,1), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$.

dopuniti, ako je moguće, do relacija poretka, a zatim nacrtati njihove Haseove dijagrame i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

(5) Neka je A neprazan skup.
  (a) Dokazati da je $\subseteq$ ("biti podskup") relacija poretka na skupu $\mathcal{P}(A)$.
  (b) Za $A = \{a, b, c\}$ nacrtati Haseov dijagram parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.
  (c) Za $A = \{a, b, c\}$ ispitati najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) parcijalno uređenih skupova $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}, \subseteq)$ i $(\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A, \{a,b\}, \{a,c\}\}, \subseteq)$.

(6) Na skupu $A \subseteq \mathbb{N}$ definisana je relacija " | " (deli) na sledeći način:

$$x \mid y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ y = kx.$$

Dokazati da je relacija " | " relacija poretka i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje) ako je A:

$A = \mathbb{N}$,
$A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$,
$A = D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$,
$A = D_{42} \setminus \{1\}$,
$A = D_{42} \setminus \{1, 42\}$,
$A = \{2, 4, 6, 12, 18\}$.

(7) Neka je :

$A_1 = \{a, b, c, d, e, f\}$, $\rho_1 = \{(x, x) \mid x \in A\} \cup \{(b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, e), (d, e), (d, f)\}$,

$A_2 = \{b, c, d, e, f\}$, $\rho_2 = \rho_1 \setminus \{(a, a)\}$,

$A_3 = \{b, c, d, e\}$, $\rho_3 = \rho_1 \setminus \{(a, a), (f, f), (b, f), (d, f)\}$.

Za one relacije ρ_i koje jesu relacije poretka nad odgovarajućim skupom A_i odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente (ako postoje).

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Zadatak 1.1, 1.2, 1.3, 1.8, 1.10, 1.11