LOGIKA I SKUPOVI

LOGIKA

Iskazi su rečenice za koje se zna da li su tačne ($\top$) ili netačne ($\bot$). Obeležavaju se malim latiničnim slovima: p, q, r, ... koja se nazivaju iskazna slova.

Definicije osnovnih logičkih operacija:

Negacija

$\rceil$	
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Konjukcija

$\wedge$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Disjunkcija

$\vee$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Implikacija

$\Rightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

Ekvivalencija

$\Leftrightarrow$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Rekurzivna definicija iskazne formule:

(1) Iskazne konstante ($\top, \bot$) i iskaznaa slova su iskazne formule.
(2) Ako su A i B iskazne formule, tada su i $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ i $\rceil A$ iskazne formule.
(3) Iskazne formule se mogu dobiti samo konačnom primenom 1. i 2.

Uobičajeno je da se spoljašnje zagrade ne pišu. Kao i da se uzima da su operacije $\wedge$ i $\vee$ prioritetnije.
Iskazne formule koje su tačne za sve vrednosti iskaznih slova nazivaju se **tautologije**.

Primeri tautologija: $p, q, r \in \{\top, \bot\}$

- komutativnost konjukcije i disjunkcije: $\begin{array}{lcl} p \wedge q & \Leftrightarrow & q \wedge p \\ p \vee q & \Leftrightarrow & q \vee p \end{array}$
- asocijativnost konjukcije i disjunkcije: $\begin{array}{lcl} p \wedge (q \wedge r) & \Leftrightarrow & (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) & \Leftrightarrow & (p \vee q) \vee r \end{array}$
- distributivnost konjukcije prema disjunkciji i disjunkcije prema konjukciji:
$$\begin{array}{lcl} p \wedge (q \vee r) & \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) & \Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}$$
- zakon isključenja trećeg: $\begin{array}{lcl} p \wedge \rceil p & \Leftrightarrow & \bot \\ p \vee \rceil p & \Leftrightarrow & \top \end{array}$
- zakon kontrapozicije: $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$
- De Morganovi zakoni: $\begin{array}{lcl} \rceil (p \wedge q) & \Leftrightarrow & \rceil p \vee \rceil q \\ \rceil (p \vee q) & \Leftrightarrow & \rceil p \wedge \rceil q \end{array}$
- zakon uklanjanja dvojne negacije: $\rceil\rceil p \quad \Leftrightarrow \quad p$
- $(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad \rceil p \vee q$

Za iskazivanje tvrđenja osim logičkih operacija, potrebni su i **logički kvantifikatori** $\forall$ (za svako) i $\exists$ (postoji).

- $(\forall x)\, \alpha(x)$: "za svako x tačno je $\alpha(x)$"
- $(\exists x)\, \alpha(x)$: "postoji x tako da važi $\alpha(x)$"

Primer:

- $(\forall x \in \mathbb{R}) \left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \right)$
- $(\exists x \in \mathbb{R})\, (x + 2 = 5)$

Ako ispred x nije napisan nijedan kvantifikator tada se podrazumeva da stoji $\forall$.
Takođe se u svim definicijama podrazumeva ako i samo ako što će skraćeno biti zapisivano sa akko.

SKUPOVI

Skup je osnovni pojam koji se ne definiše.
Skupovi se obeležavaju sa A, B, C, ... a elementi skupa sa a, b, c, ...

Činjenica da je x elemenat skupa S obeležava se sa: $x \in S$ i čita x pripada skupu S, a činjenica da x nije elemenat skupa S obeležava se sa: $x \notin S$ i čita x ne pripada skupu S.

Konačan skup se može definisati nabrajanjem elemenata.

Primer: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili $B = \{a, b\}$ ili $C = \{$●, ○, ◐, ◑$\}$.

Ako je skup S beskonačan, tada se mora pronaći neka osobina π koju imaju elementi skupa S, a koju nema nijedan element koji ne pripada skupu S. Neka $\pi(x)$ znači da x zadovoljava uslov π tada se skup S zapisuje sa $S = \{x|\pi(x)\}$. Ovaj način zapisivanja skupova se može koristiti i za konačne skupove.

Primer: $A = \{x|x < 5 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ ili $S = \{x|2x - 3 = 0\}$.

Skup koji nema elemenata zove se **prazan skup** i obeležava se sa $\emptyset$ ili $\{\}$.
Napomena: $\{\emptyset\}$ - nije prazan skup već skup koji sadrži jedan elemenat (prazan skup).

Skup kome pripadaju svi elementi svih skupova koje posmatramo zove se **univerzalni skup** i obeležava sa $\mathcal{U}$.

Redosled elemenata u skupu nije važan, tj. $\{a, b\} = \{b, a\}$.
U skupu$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata podrazumeva se da su svi elementi tog skupa međusobno različiti.

Kardinalni broj skupa A, je broj elemenata koji pripadaju skupu A, i obeležava se sa $Card\,(A)$.

Primer: $A = \{0, 1\} \Rightarrow Card\,(A) = 2$

Skupovne relacije i operacije se definišu preko odgovarajućih logičkih operacija:

- **jednakost** skupova: $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- skupovna **inkluzija** (podskup): $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U})\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$

  pravi podskup: $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

  Za svaki skup A važi: $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.
- **unija** skupova: $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$
- **presek** skupova: $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$

  Skupovi su disjunktni ako je njihov presek prazan skup, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.
- **komplement** skupa: $\overline{A} = \{x|x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$
- **razlika** skupova: $A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$
- **simetrična razlika** skupova: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Osobine skupovnih operacija:

- $A \cap \emptyset = \emptyset$
  $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \mathcal{U} = A$
  $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
  $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- zakon komutativnosti: $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$
- zakon asocijativnosti: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- zakon distributivnosti: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- zakon idempotentnosti: $A \cap A = A$
  $A \cup A = A$
- zakon apsorpcije: $A \cap (A \cup B) = A$
  $A \cup (A \cap B) = A$
- De Morganovi zakoni: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Partitivni skup, skupa A, je skup svih podskupova skupa A, tj. $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$.

Napomena: $\emptyset$ i A su uvek elementi skupa $\mathcal{P}(A)$.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

Particija skupa A, je skup nepraznih podskupova skupa A, od kojih su svaka dva disjunktna, a njihova unija je skup A.

Primer: $A = \{1, 2, 3\}$
Sve particije skupa A su $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Primer: Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{2, 4, 6\}$. Odrediti: $Card(A)$, $Card(B)$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$ i sve particije skupa B.

Primer: Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x \,|\, x \in \mathbb{N} \wedge x \mid 8\}$ i $C = \{x \,|\, x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 2\}$. Odrediti: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $\mathcal{P}(C)$ i napisati sve particije skupa C.