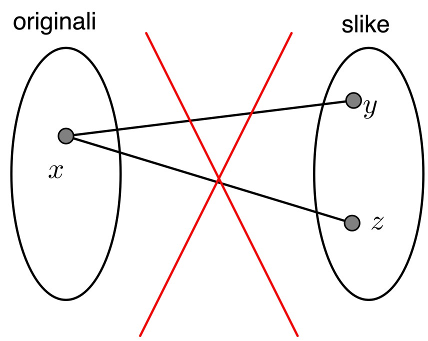
FUNKCIJE

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi

$$\forall x, y, z \ ((x,y) \in f \ \wedge \ (x,z) \in f \Longrightarrow y = z) \,.$$

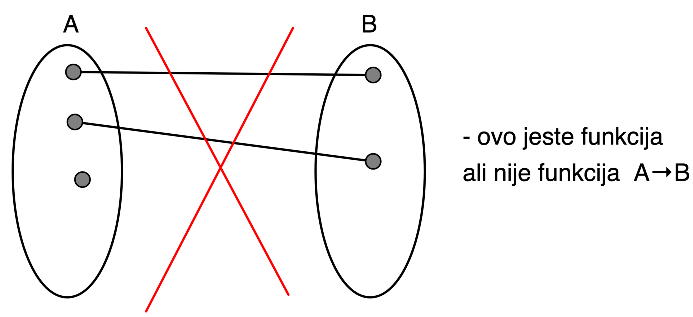


Uobičajeno je da se umesto $(x,y) \in f$ piše $y = f(x)$.

Domen (oblast definisanosti) funkcije f je $\mathcal{D}(f) = \{x \,|\, \exists y, (x,y) \in f\}$, tj. skup svih prvih komponenti parova iz f. Elementi domena se nazivaju originali.

Kodomen (skup vrednosti) funkcije f je $\mathcal{K}(f) = \{y \,|\, \exists x, (x,y) \in f\}$, tj. skup svih drugih komponenti parova iz f. Elementi kodomena se nazivaju slike.

Funkcija f iz skupa A u skup B, u oznaci $f : A \longrightarrow B$, je ona funkcija kod koje je $A = \mathcal{D}(f)$, a $\mathcal{K}(f) \subseteq B$, tj. ona funkcija kod koje je skup svih prvih komponenti tačno skup A, a skup svih drugih komponenti je podskup skupa B.



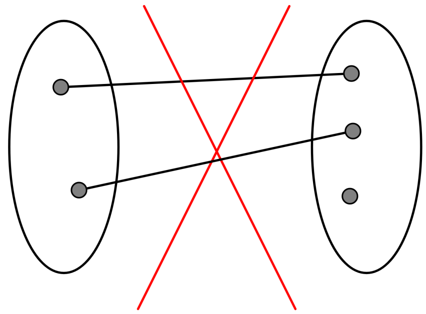
Primer: Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{a,b\}$.

- $f_1 = \{(1,a), (2,b), (3,b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$;
- $f_2 = \{(1,a), (2,b)\}$ jeste funkcija ali nije $f : A \longrightarrow B$ jer elemenat $3 \in A$ nema sliku;
- $f_3 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (3,b)\}$ nije funkcija jer se elemenat $1 \in A$ preslika u dve slike, u a i u b. Čim nije funkcija ne može biti ni $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je **sirjektivna, ("na")**, što se označava sa $f : A \overset{\text{"}na\text{"}}{\longrightarrow} B$, ako je $\mathcal{K}(f) = B$, tj. ako se svaki elemenat skupa B pojavljuje bar jednom kao druga komponenta u f.

Dakle,

$$f : A \overset{\text{"}na\text{"}}{\longrightarrow} B \text{ ako } (\forall y \in B)\, (\exists x \in A)\, y = f(x).$$



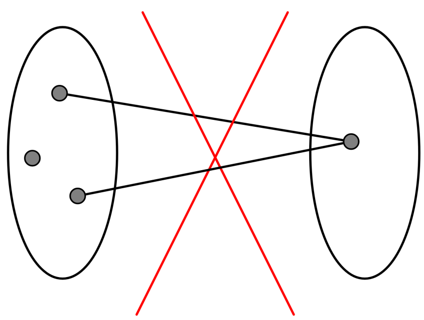
Napomena: Da bi se ispitivala sirjektivnost funkcije nije dovoljno da funkcija bude samo funkcija, neophodno je da bude funkcija skupa A u skup B.

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ jeste $f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$ jer se nijedan elemenat skupa A ne preslika u elemenat $b \in B$;
- $f_3 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste funkcija, ali nije $f : A \longrightarrow B$, pa ne može biti ni $f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$.

Funkcija f je **injektivna (“1-1”)** ako u f ne postoje dva različita uređena para sa jednakim drugim komponentama. Dakle,

$$f \text{ je injektivna funkcija ako } (\forall x, y \in \mathcal{D}(f)) \, (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y) \, .$$



Napomena: Da bi se ispitivala injektivnost funkcije dovoljno je da funkcija bude samo funkcija. Injektivnost se može ispitivati za bilo kakvu funkciju, a može i za funkciju skupa A u skup B.

Injektivna funkcija skupa A u skup B se označava se $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$

Primer: Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ jeste $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$;
- $f_2 = \{(1, a), (2, a)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$ jer se oba elemenat skupa A preslikaju u elemenat $a \in B$;
- $f_3 = \{(1, a)\}$ jeste funkcija i jeste “1-1” iako nije $f : A \longrightarrow B$.

Funkcija f je **bijektivna** ako je u isto vreme sirjektivna i injektivna. Bijektivna može biti samo funkcija skupa A u skup B i tada se ona označava se $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$.

Primer: Neka je , $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$.

- $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ jeste $f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$;

- $f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ jeste $f : A \longrightarrow B$, ali nije $f : A \overset{"1-1"}{\underset{"na"}{\longrightarrow}} B$. jer nije injektivna pošto se elementi 1 i 2 preslikaju u isti elemenat a;
- $f_3 = \{(1,a)\}$ jeste funkcija ali nije bijekcija jer nije $f : A \longrightarrow B$.

Primer: Dati su skupovi $A = \{1,2,3,4,5\}$ i $B = \{a,b,c\}$. Proveriti koje od sledećih relacija su funkcije skupa A u skup B, i ispitati sirjektivnost i injektivnost.

$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(5,c)\}$;

$f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(5,c),(1,c)\}$;

$f_3 = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(5,a)\}$;

$f_4 = \{(1,c),(2,b),(3,b),(4,c),(5,a)\}$;

$f_5 = \{(1,a),(2,b),(4,c)\}$.

ZADACI

(1) Dati su skupovi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$ i relacije:

$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(1,d)\}$,

$f_2 = \{(1,a),(2,a)\}$,

$f_3 = \{(1,d),(2,a),(3,c)\}$.

Popuniti tablicu:

f_i	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	$f_i : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$	$f_i : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$	$f_i : A \overset{"1-1"}{\underset{"na"}{\longrightarrow}} B$
f_1					
f_2					
f_3					

Da li se može definisati sirjektivna funkcija skupa A u skup B?

(2) Dati su skupovi $A = \{x,y,z\}$, $B = \{1,2\}$ i relacije:

$f_1 = \{(x,1)\}$,

$f_2 = \{(x,1),(y,1),(z,1)\}$,

$f_3 = \{(x,1),(y,1),(z,2)\}$.

$f_4 = \{(x,1),(y,2),(x,2)\}$.

Popuniti tablicu:

f_i	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	$f_i : \{x\} \longrightarrow B$	$f_i : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$	$f_i : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$	$f_i : A \overset{"1-1"}{\underset{"na"}{\longrightarrow}} B$
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						

Da li se može definisati injektivna funkcija skupa A u skup B?

(3) Dati su skupovi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ i relacije:

$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$,

$f_2 = \{(1,a)\}$,

$f_3 = \{(1,c),(2,b),(3,a)\}$.

$f_4 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$.

Popuniti tablicu:

f_i	f_i je funkcija	$f_i : A \longrightarrow B$	$f_i : \{1\} \longrightarrow B$	$f_i : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$	$f_i : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$	$f_i : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						

ZAKLJUČAK: Za dva konačna skupa A i B važi:

- $Card\,(A) = Card\,(B) \Longleftrightarrow \exists f, f : A \underset{"na"}{\overset{"1-1"}{\longrightarrow}} B$;
- $Card\,(A) \leq Card\,(B) \Longleftrightarrow \exists f, f : A \overset{"1-1"}{\longrightarrow} B$;
- $Card\,(A) \geq Card\,(B) \Longleftrightarrow \exists f, f : A \overset{"na"}{\longrightarrow} B$.

Identička funkcija $i_A : A \longrightarrow A$ je definisana sa $i_A(x) = x$.

Ako je inverzna relacija f^{-1} funkcije f takođe funkcija onda je f^{-1} **inverzna funkcija** funkcije f.
Napomena: Inverzna funkcija se definiše za bilo koju funkciju, ne mora biti funkcija skupa A u skup B.

Primer: Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, a $B = \{x, y, z\}$.

- Za funkciju $f_1 = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ inverzna funkcija je $f^{-1} = \{(x, 1), (y, 2), (z, 3)\}$.
- Funkcija $f_2 = \{(1, x), (2, x), (3, x)\}$ nema inverznu funkciju jer inverzna relacije ove funkcije nije funkcija.

Inverzna funkcija funkcije f postoji akko je funkcija f injektivna. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ postoji inverzna funkcija $f : B \longrightarrow A$ akko je funkcija f bijektivna.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i neka su $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ date funkcije. Funkcija $g \circ f : A \longrightarrow C$ definisana sa $(\forall x \in A)\,(g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))$ zove se **kompozicija** funkcija f i g.

Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija.

Kompozicija sirjektivnih funkcija $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ je sirjektivna funkcija .

Kompozicija bijektivnih funkcija je bijektivna funkcija.

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow B$ bijektivna i neka je f^{-1} njena inverzna funkcija, tada je $(\forall x \in A)\, f^{-1}\,(f\,(x)) = x$.

Kompozicija funkcija koje preslikavaju skup A u samog sebe je asocijativna operacija.

Načini zadavanja funkcija: Neka je na primer $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \mathbb{N}$. Jedna ista funkcija $f : A \longrightarrow B$ može biti zadata na više načina:

- nabrajanjem elemenata $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$,
- opisno pomoću drugih poznatih relacija i/ili operacija $f = \left\{\left(x, x^2\right) \mid x \in A\right\}$, tj. $f(x) = x^2$, $x \in A$,
- $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$,
- grafički.

Relacija koja je zadata grafički je funkcija akko svaka prava paralelna sa y-osom seče dati grafik u najviše jednoj tački.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je injektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima najviše jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je sirjektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima bar jedan presek sa grafikom funkcije.

Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je bijektivna akko svaka prava paralelna sa x-osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije.

ZADACI

(1) Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = x^3 + 1$ i $g(x) = 2x$, odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

(2) Za funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 1 - 3x$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$, odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

(3) Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$. Odrediti: $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, f^{-1} i g^{-1} ako postoje.

(4) Neka su f i g funkcije definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Odrediti: f^{-1} , g^{-1}, $f \circ g$, $(f \circ g)^{-1}$, $g^{-1} \circ f^{-1}$, ako postoje.

(5) Neka je A najveći podskup skupa $\mathbb{R}$, a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je dobro definisana funkcija $f : A \longrightarrow B$. Za date funkcije f odrediti skupove A i B i ispitati injektivnost, sirjektivnost.

(a) $f(x) = x^2 - x - 2$;
(b) $f(x) = \dfrac{1 - x}{2x + 5}$;
(c) $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$;
(d) $f(x) = \ln \dfrac{1}{1 + x^2}$;
(e) $f(x) = 2^{x^2}$.

(6) Za koje vrednosti realnih parametara a i b formula $f(x) = ax + b$ definiše:

(a) funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
(b) injektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
(c) sirjektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
(d) bijektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

(7) Za koje vrednosti realnih parametara a i b formula $f(x) = ax^2 + bx + c$ definiše:

(a) funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
(b) injektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
(c) sirjektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;
(d) bijektivnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$?

ZA VEŽBU IZ SKRIPTE:
Primer: 2.1
Zadatak 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6