1 Polinomi

Funkcija $P_n(x)$ definisana sa:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gde je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je polinom n-tog stepena. Polinom je nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva ako su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ realni (kompleksni) brojevi.

Nula funkcija tj. funkcija $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) = 0$, jeste polinom i zove se nula polinom tj. $P_n(x)$ je **nula polinom** akko $a_i = 0$ za sve $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Brojevi $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ su **koeficijenti** polinoma $P(x)$, a_n je **vodeći koeficijent** ili koeficijent uz najveći stepen promenljive, a a_0 je **slobodan član** polinoma $P(x)$.

Ako je n stepen polinoma $P(x)$, tada se to označava sa $dg\big(P(x)\big) = n$.

Stepen nula polinoma nije definisan!

Polinom n-tog stepena $P(x)$ je **normiran polinom** (normalizovan) ako je $a_n = 1$.

Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stepena i ako su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene jednaki.

1.1 Operacije sa polinomima

1) **Sabiranje nenula polinoma se vrši tako što se odgovarajući koeficijenti saberu.**

   Jasno je da tada važi da ako je $P_n(x) + Q_m(x) = S_l(x)$ i $n \neq m$, onda je $l = \max\{n, m\}$. Nula polinom je neutralni elemenat za sabiranje polinoma.

   Primer: Zbir polinoma

   $$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ i } Q_3(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

   je polinom $P_2(x) + Q_3(x) = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) + (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = b_3 x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$.

2) **Množenjem polinoma** $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ i $Q_m(x) = b_m x^n + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ dobija se polinom $S_{n+m}(x) = c_{n+m} x^{n+m} + c_{n+m-1} x^{n+m-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, gde za sve $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m+n\}$ važi $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, pri čemu za sve $i > n$ je $a_i = 0$ i za sve $i > m$ je $b_i = 0$.

   Primer: Proizvod polinoma

   $$P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ i } Q_3(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

$$\begin{aligned}&P_2(x)\cdot Q_3(x)=(a_2x^2+a_1x+a_0)\cdot(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)\\&=a_2b_3x^5+(a_1b_3+a_2b_2)x^4+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1)x^3\\&+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_0b_0.\end{aligned}$$

3) **Deljenje polinoma**.

Za svaka dva polinoma $S(x)$ i $P(x)\neq 0$, postoje takvi jedinstveni polinomi $Q(x)$ i $R(x)$, da je

$$S(x)=Q(x)P(x)+R(x) \quad \wedge \quad \Big(R(x)=0 \vee dg\big(R(x)\big)<dg\big(P(x)\big)\Big).$$

Ako je $R(x)=0$, tada se kaže da je polinom $S(x)$ deljiv sa polinomom $P(x)$ ili $P(x)$ deli $S(x)$.

Uobičajeno je da se $S(x)=Q(x)P(x)+R(x)$ piše i u obliku

$$\frac{S(x)}{P(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{P(x)} \ \text{ ili } \ S(x):P(x)=Q(x)+\frac{R(x)}{P(x)}.$$

1. Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma $S(x)=2x^4-x^3+x^2-2x+1$ sa polinomom $P(x)=x^2+x+1$.

Rešenje:

$$+\begin{cases}(2x^4-x^3+x^2-2x+1):(x^2+x+1)=2x^2-3x+2+\frac{-x-1}{x^2+x+1}\\ \underline{-(2x^4+2x^3+2x^2)}\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-3x^3-x^2-2x+1\\ \underline{-(-3x^3-3x^2-3x)}\end{cases}$$

$$+\begin{cases}2x^2+x+1\\ \underline{-(2x^2+2x+2)}\end{cases}$$

$$-x-1.$$

Količnik pri deljenju ova dva polinoma je $Q(x)=2x^2-3x+2$, a ostatak je $R(x)=-x-1$.

Odnosno

$$\frac{S(x)}{P(x)}=\frac{2x^4-x^3+x^2-2x+1}{x^2+x+1}=2x^2-3x+2+\frac{-x-1}{x^2+x+1}.$$

2. Odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma $x^5 - 2x^4 + x - 1$ i $x^3 - x^2 + 1$.

Rešenje

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - 2x^4 + x - 1) : (x^3 - x^2 + 1) = x^2 - x - 1 + \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^3 - x^2 + 1} \\
\underline{\pm x^5 \mp x^4 \pm x^2} \\
\quad -x^4 - x^2 + x - 1 \\
\quad \underline{\mp x^4 \pm x^3 \mp x} \\
\qquad -x^3 - x^2 + 2x - 1 \\
\qquad \underline{\mp x^3 \pm x^2 \mp 1} \\
\qquad\quad -2x^2 + 2x
\end{array}
$$

Količnik pri deljenju ova dva polinoma je $Q(x) = x^2 - x - 1$, a ostatak je $R(x) = -2x^2 + 2x$.

3. Odrediti koeficijente a i b polinoma $P(x) = 2x^3 + x^2 - ax + b$, ako se zna da je polinom $P(x)$ deljiv sa polinomom $x^2 + 3$.

Rešenje

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + x^2 - ax + b) : (x^2 + 3) = 2x + 1 \\
\underline{\pm 2x^3 \pm 6x} \\
\quad x^2 - 6x - ax + b \\
\quad \underline{\pm x^2 \qquad\quad \pm 3} \\
\qquad -(6 + a)x - 3 + b = 0
\end{array}
$$

Pošto je polinom $P(x)$ deljiv sa polinomom $x^2 + 3$ ostatak $-(6 + a)x - 3 + b$ pri deljenju je jednak nuli, tako da slobodni član izjednačavamo sa nulom$-3 + b = 0$ $\Rightarrow b = 3$ i koeficijent uz x izjednačavamo sa nulom $6 + a = 0 \Rightarrow a = -6$.
Traženi polinom je $P(x) = 2x^3 + x^2 + 6x + 3$.

1.2 Koreni polinoma

Realni broj α je nula tj. koren polinoma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

ako i samo ako je $P_n(\alpha) = 0$.

Koren α polinoma $P_n(x)$ je višestrukosti k ako i samo ako je $P_n(x)$ deljiv sa $(x - \alpha)^k$, a nije deljiv sa $(x - \alpha)^{k+1}$.

Teorema o konjugovano kompleksnim korenima polinoma sa realnim koeficijentima: Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima i neka je α koren polinoma $P(x)$. Tada je i konjugovani broj $\overline{\alpha}$ koren polinoma $P(x)$.

1.3 Hornerova shema

Pri deljenju polinoma $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinomom $x - \alpha$, dobija se količnik $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ i ostatak R, pri čemu je $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = \alpha b_1 + a_1$, $R = \alpha b_0 + a_0$.

Ovaj rezultat se zapisuje u obliku sledeće sheme koja se zove Hornerova shema.

$$\begin{array}{c|cccccc} \alpha & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n & \alpha b_{n-1} + a_{n-1} & \alpha b_{n-2} + a_{n-2} & \cdots & \alpha b_1 + a_1 & \alpha b_0 + a_0 \\ & \| & \| & \| & & \| & \| \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & R \end{array}$$

4. Naći sve realne korene polinoma $P_4(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$.

Rešenje

Koeficijenti polinoma $P(x)$ su celi brojevi, pa cemo koristiti sledeću teoremu: Ako je razlomak $\frac{p}{q}$ koren polinoma $P(x)$ sa celobrojnim koeficijentima, onda p deli slobodan clan a q deli vodeci koeficijent.

Pretpostavimo da $P_4(x)$ ima bar jedan racionalan koren i obeležimo ga sa $\frac{p}{q}$. Tada p deli slobodan član a_0, a q deli koeficijent uz najveći stepen a_n.

$p|a_0$ odnosno $p|-2$ to jest $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$, a $q|a_n$ odnosno $q|3$ to jest $q \in \{1, 3\}$. Odatle dobijamo skup $\dfrac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{2}{3}, \pm 2\}$ čiji elementi su jedini mogući kandidati koji mogu biti racionalni koreni datog polinoma $P_4(x)$.

Pomoću Hornerove sheme nalazimo korene polinoma tako što čemo samo za elemente skupa $\dfrac{p}{q}$ proveravati da li jesu koreni polinoma.

$$\begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 1 & 5 & -2 \\ \hline -2 & 3 & 6 & 3 & 6 & 0 \\ & 3 & 0 & 3 & 0 & \\ & \| & \| & \| & \| & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & \mathrm{R} & \end{array}$$

$P_4(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = (x - \frac{1}{3})(3x^3 + 6x^2 + 3x + 6) =$
$(x - \frac{1}{3})(x + 2)(3x^2 + 3)$.

1.4 Bezuova teorema

Vrednost polinoma $P(x)$ u tački α tj. $P(\alpha)$ jednaka je ostatku pri deljenju polinoma $P(x)$ sa polinomom $(x - \alpha)$.

Posledica prethodne Bezuove teoreme je teorema:

Polinom $x-\alpha$ je faktor polinoma $P(x)$ $\big($tj. $P(x)$ je deljiv sa $x-\alpha\big)$ ako i samo ako je α koren polinoma $P(x)$.

Ako je $\alpha = a+bi$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, (tj. α je kompleksan broj koji nije realan) koren polinoma $P(x)$ sa realnim koeficijentima tada važi da $(x-\alpha)\,|\,P(x)$, $(x-\overline{\alpha})\,|\,P(x)$ i njihov proizvod $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ deli polinom $P(x)$.

5. Naći ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x$ sa polinomom $x-1$.

Rešenje

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 + 5x) : (x-1) = 2x^2 + x + 6 + \dfrac{6}{x-1}\\
\underline{\pm 2x^3 \mp 2x^2}\\
\qquad x^2 + 5x\\
\qquad \underline{\pm x^2 \mp x}\\
\qquad\qquad 6x\\
\qquad\qquad \underline{\pm 6x \mp 6}\\
\qquad\qquad\qquad 6 = P(1).
\end{array}
$$

Isto rešenje možemo da dobijemo primenom Bezuove teoreme

$$P(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 + 5\cdot 1 = 6.$$

6. Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom $P(x) = 2x^6 + ax^5 - 4x^4 - 5x^3 - bx^2 + 4x + 3$ bude deljiv sa $(x-1)$ i $(x+3)$, a zatim za tako određene parametre faktorisati $P(x)$ nad poljem realnih brojeva.

Rešenje

Pošto polinom $P(x)$ pri deljenju sa $(x-1)$ i sa $(x+3)$ daje ostatak nula, po Bezuovoj teoremi je $P(1) = 0$ i $P(-3) = 0$.

$$P(1) = 2\cdot 1^6 + a\cdot 1^5 - 4\cdot 1^4 - 5\cdot 1^3 - b\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 3 = 0$$

$$P(-3) = 2\cdot(-3)^6 + a\cdot(-3)^5 - 4\cdot(-3)^4 - 5\cdot(-3)^3 - b\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) + 3 = 0$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & a & - & b & = & 0\\
1260 & - & 243a & - & 9b & = & 0
\end{array}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{array}{rcl}
a & = & b\\
252a & = & 1260
\end{array}
$$

dobijamo $a = 5$ i $b = 5$ tj.

$$P(x) = 2x^6 + 5x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 3$$

Da bismo faktorisali polinom $P(x)$ nad poljem realnih brojeva treba da nađemo sve njegove realne korene. Nađimo prvo sve racionalne korene.

$$\left.\begin{array}{ll} p|3 & p \in \{\pm 1, \pm 3\} \\ q|2 & q \in \{1, 2\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\}$$

1	2	5	−4	−5	−5	4	3
1	2	7	3	−2	−7	−3	0
−3	2	9	12	10	3	0	
$-\frac{1}{2}$	2	3	3	1	0		
	2	2	2	0			

Iz ovoga sledi da su realni koreni polinoma $P(x)$: 1, -3 i $-\frac{1}{2}$. Primetimo da je 1 višestruki koren reda 2 tj. dvostruki koren.
Sada možemo da izvršimo faktorizaciju polinoma $P(x)$ nad poljem realnih brojeva

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2(x+3)(x+\frac{1}{2})(2x^2+2x+2) = \\ &= (x-1)^2(x+3)(2x+1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Polinom $x^2 + x + 1$ nema realnih korena.

7. Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom $P(x) = x^5 + ax^4 + x^3 - x^2 + bx - 4$ bude deljiv sa polinomom $x - 1$, a da pri deljenju sa $x + 1$ daje ostatak -4.

Rešenje

Kako je polinom $P(x)$ deljiv sa $x - 1$ te je 1 koren polinoma $P(x)$, pa je po Bezujevoj teoremi $P(1) = 0$.

$P(1) = 1^5 + a \cdot 1^4 + 1^3 - 1^2 + b - 4 = 0 \Rightarrow a + b = 3.$

Kako polinom $P(x)$ pri deljenju sa $x + 1$ daje ostatak -4 po Bezuovoj teoremi sledi da je $P(-1) = -4$.

$P(-1) = (-1)^5 + a \cdot (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + b - 4 = -4 \Rightarrow a - b = 7.$

Dobili smo dve jednačine sa dve nepoznate

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 3 \\ a & - & b & = & 7 \end{array}$$

iz kojih dobijamo tražene koeficijente polinoma $a = 5$ i $b - 2$.

8. Odrediti realne koeficijente a, b, c polinoma $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 - 6x^2 + 5x + c$, tako da je $P(-1) = -24$ i da zajednički koren polinoma $S(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 4$ i $R(x) = x^2 - 4x + 3$ bude dvostruki koren polinoma $P(x)$.

Rešenje

Prvo tražimo zajedničke korene polinoma $R(x)$ i $S(x)$. Koreni polinoma $R(x) = x^2 - 4x + 3$ su

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad x_1 = 3, x_2 = 1.$$

Sada proveravamo da li je 3 koren polinoma $S(x)$.

$$S(3) = 2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 4 = 162 - 81 + 18 - 14 + 4 = 89 \neq 0,$$

dakle 3 nije koren polinoma $S(x)$. Proveravamo da li je 1 koren polinoma $S(x)$.

$$S(1) = 2 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 2 - 3 + 2 - 5 + 4 = 0,$$

dakle 1 je koren polinoma $S(x)$.

Zaključujemo da je 1 jedini zajednički koren polinoma $S(x)$ i $R(x)$. Sada on treba još da bude i dvostruki koren od $P(x)$.

1	1	a	b	-6	5	c
1	1	$1+a$	$1+a+b$	$-5+a+b$	$a+b$	$a+b+c$
	1	$2+a$	$3+2a+b$	$-2+3a+2b$	$-2+4a+3b$	

Iz Hornerove sheme sledi da je $a + b + c = 0$ i $-2 + 4a + 3b = 0$.
Iz uslova $P(-1) = -24$ dobijamo još jednu jednačinu

$$P(-1) = (-1)^5 + a(-1)^4 + b(-1)^3 - 6(-1)^2 + 5(-1) + c = -24$$

$$-1 + a - b - 6 - 5 + c = -24$$

$$a - b + c = -12.$$

Dakle imamo tri jednačine sa tri nepoznate

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 0 \\ 4a & + & 3b & & & = & 2 \\ a & - & b & + & c & = & -12 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 0 \\ & - & b & - & 4c & = & 2 \\ & & 2b & & & = & -12 \end{array}$$

čija su rešenja $a = -4$, $b = 6$ i $c = -2$.

Traženi polinom je $P(x) = x^5 - 4x^4 + 6^3 - 6x^2 + 5x - 2$.

9. Polinom $P(x)=x^4-2x^3-x^2+3x+2$ napisati po stepenima od $x-2$.

Rešenje

Uradićemo to pomoću Hornerove sheme.

2	1	-2	-1	3	2
	1	0	-1	1	$\boxed{4}$
	1	2	3	$\boxed{7}$	
	1	4	$\boxed{11}$		
	1	$\boxed{6}$			
	$\boxed{1}$				

U gornjem levom uglu tabele nalazi se koren polinoma $x-2$ tj. 2. Desno od njega nalaze se redom koeficijenti polinoma $P(x)$ od najvećeg stepena do slobodnog člana. Koeficijent uz najveći stepen, to je ovde 1, uvek se prepisuje ispod samog sebe. Svi ostali brojevi tabele se dobijaju tako što se saberu broj koji je iznad njega i broj levo od njega prethodno pomnožen sa 2 (tj. brojem iz levog gornjeg ugla tabele). Uokvireni brojevi predstavljaju koeficijente polinoma $P(x)$ po stepenima od $x-2$, odnosno

$$P=x^4-2x^3-x^2+3x+2=(x-2)^4+6(x-2)^3+11(x-2)^2+7(x-2)+4.$$

Kad bi samo gornji uokvireni broj umesto 4 bio 0, to bi značilo da je 2 jednostruki koren polinoma $P(x)$. Kada bi samo prvi i drugi uokvireni broj od gore bili nule, a treći po redu od gore uokvireni broj različit od nule, tada bi broj 2 bio dvostruki koren polinoma $P(x)$..

Odavde se vidi da pomoću Hornerove sheme na ovaj način možemo pronaći višestruke korene ako su nam poznati koreni tog polinoma.

1.5 Vietove formule

Ako je $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ polinom stepena n nad poljem kompleksnh brojeva, pri čemu se svaki koren x_i u $n-$torci $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ pojavljuje tačno onoliko puta kolika mu je višestrukost, tada je
$P(x)=a_n(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ i važi:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+\ldots+x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}\\
x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1x_2\ldots x_k+\ldots+x_{n-k+1}\ldots x_n &= (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} \\ &\vdots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Neka je $a_2x^2+a_1x+a_0=a_2(x-x_1)(x-x_2)$ pri čemu je $a_2\neq 0$. Tada je

$$x_1+x_2=-\frac{a_1}{a_2}$$

$$x_1x_2=\frac{a_0}{a_2}.$$

Neka je $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ pri čemu je $a_3\neq 0$. Tada

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{a_0}{a_3}.$$

10. Napisati normiran polinom $P(x)$ četvrtog stepena ako se zna da je zbir njegovih korena 3, proizvod -1, da pri deljenju sa $(x+1)$ daje ostatak 2 i da pri deljenju sa $(x-1)$ daje ostatak -3.

Rešenje

Normiran polinom četvrtog stepena $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$.
Po Vietovim formulama dobijamo:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{a}{1}=3\Rightarrow a=-3$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{d}{1}=-1\Rightarrow d=-1$$

Sada polinom $P(x)$ močemo zapisati sa $P(x)=x^4-3x^3+bx^2+cx-1$.
Primenom Bezuove teoreme dobijamo:

$$P(-1)=1+3+b-c+1=2$$

$$P(1)=1-3+b+c+1=-3$$

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{ccccc} b & - & c & = & -3 \\ b & + & c & = & -2 \end{array}$$

dobijamo $b = -\frac{5}{2}$, $c = \frac{1}{2}$.
Traženi polinom je $P(x) = x^4 - 3x^3 + -\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$.

1.6 Rastavljanje na parcijalne razlomke

Kod neprave racionalne funkcije (kod koje je stepen polinoma u brojiocu veći ili jednak od stepena polinoma imenioca) vrši se deljenje kojim se od nje dobija zbir polinoma i prave racionalne funkcije (stepen polinoma u brojiocu je niži od stepena polinoma u imeniocu). Nakon toga izvršimo faktorisanje brojioca i imenioca te prave racionalne funkcije, tako da su svi faktori linearni ili kvadratni sa negativnom diskriminantom! U koliko postoji mogućnost nekog skraćivanja to se izvrši, a zatim se ta prava racionalna funkcija rastavlja na zbir parcijalnih razlomaka. Za svaki faktor u imeniocu, ako se pojavljuje samo jednom, naše prave racionalne funkcije dobijamo po jedan sabirak u čijim brojiocima se nalazi konstanta ako je imenilac linearni, a ako je imenilac kvadratni polinom tada u brojiocu stavljamo opšti linearni polinom. Ako se neki faktor $\mathscr{F}$ pojavljuje dva puta, tada se dodaje još jedan razlomak gde je u imeniocu $\mathscr{F}^2$, a u brojiocu konstanta ako je $\mathscr{F}$ linearni, a opšti linearni ako je $\mathscr{F}$ kvadratni. Ako se $\mathscr{F}$ pojavljuje tri puta, tada će on dati tri parcijalna razlomka čiji imenioci su redom $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^2$, $\mathscr{F}^3$ itd. Prema tome prava racionalna funkcija se rastavlja na parcijalne sabirke oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ i } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad \text{gde je } p^2-4q<0.$$

Primeri rastavljanja prave racionalne funkcije na zbir parcijalnih razlomaka:

$$\frac{2x^3+3x-7}{(x^2+4)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2},$$

$$\frac{-5x^3-2x^2+6}{(x+3)(x^2+7)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+7} + \frac{Dx+F}{(x^2+7)^2}.$$

11. Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $R(x) = \frac{2x^3-x^2+x-4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$.

Rešenje

$$R(x) = \frac{2x^3-x^2+x-4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{CX+D}{x^2+1}$$

$$2x^3 - x^2 + x - 4 = A(x-2)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + x - 4 &= Ax^3 + Ax - 2Ax^2 - 2A + Bx^3 + Bx - Bx^2 - B \\ &\quad + Cx^3 - 2Cx^2 - Cx^2 + 2Cx + Dx^2 - 2Dx - Dx + 2D \end{aligned}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa leve i desne strane jednakosti dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 &=& A &+& B &+& C && \\ -1 &=& -2A &-& B &-& 3C &+& D \\ 1 &=& A &+& B &+& 2C &-& 3D \\ -4 &=& -2A &-& B &&&+& 2D \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcr} 2 &=& A &+& B &+& C && \\ 3 &=& && B &-& C &+& D \\ -1 &=& &&&& C &-& 3D \\ 0 &=& && B &+& 2C &+& 2D \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2 &=& A &+& B &+& && \\ 3 &=& && B &-& C &+& D \\ -1 &=& &&&& C &-& 3D \\ -3 &=& &&&& 3C &+& D \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcrcr} 2 &=& A &+& B &+& C && \\ 3 &=& && B &-& C &+& D \\ -1 &=& &&&& C &-& 3D \\ 0 &=& &&&& && 10D \end{array}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$ i $D = 0$.

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2+1}$$

12. Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $R(x) = \frac{2x^4 - x^3 - 11x - 2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$.

Rešenje

Pošto je stepen polinoma u brojiocu jednak sa stepenom polinoma u imeniocu prvo delimo brojiocu sa imeniocem

$$(2x^4 - x^3 - 11x - 2) : (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 2 + \frac{-5x^3 - 4x^2 - 15x - 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$
$$\frac{\pm 2x^4 \pm 4x^3 \pm 4x^2 \pm 4x \pm 2}{\quad -5x^3 - 4x^2 - 15x - 4.}$$

Rezulat deljenja je zbir polinoma i prave racionalne funkcije. Sada pravu racionalnu funkciju treba rastaviti na parcijalne razlomke.

Konstruišemo skup $\frac{p}{q}$ čiji elementi su jedini mogući kandidati koji mogu biti racionalni koreni datog polinoma $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

$$\left.\begin{array}{ll} p|1 & p \in \{\pm 1\} \\ q|1 & q \in \{1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1\}$$

Pomoću Hornerove shema pronalazimo korene polinoma.

-1	1	2	2	2	2
-1	1	1	1	1	0
	1	0	1	0	

Pošto smo pronašli realne korene polinoma, faktorišemo ga

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x+1)^2(x^2+1).$$

Sada rastavljamo pravu racionalnu funkciju na parcijalne sabirke.

$$\frac{-5x^3-4x^2-15x-4}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Množimo celu jednakost sa $(x+1)^2(x^2+1)$ da bi se oslobodili razlomka.

$$\begin{aligned}-5x^3-4x^2-15x-4 &= A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2x+1)\\ -5x^3-4x^2-15x-4 &= Ax^3+Ax+Ax^2+A+Bx^2+B+Cx^3+2Cx^2+Cx+\\ &\quad +Dx^2+2Dx+D\,.\end{aligned}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa leve i desne strane jednakosti dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcl} -5 &=& A + C\\ -4 &=& A+B+2C+D\\ -15 &=& A + C + 2D\\ -4 &=& A+B+D \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcr} A+C &=& -5\\ B+C+D &=& 1\\ 2D &=& -10\\ B-C+D &=& 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} A+C &=& -5\\ B+C+D &=& 1\\ D &=& -5\\ -2C &=& 0 \end{array}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $A=-5$, $B=6$, $C=0$ i $D=5$.

$$R(x)=2-\frac{5}{x+1}+\frac{6}{(x+1)^2}+\frac{-5}{x^2+1}.$$

13. a) Napisati normiran polinom $P(x)$ četvrtog stepena ako se zna da je zbir njegovih korena 1, proizvod -2, da pri deljenju sa $(x-1)$ daje ostatak -4 i da je deljiv sa $(x-2)$.

b) Faktorisati polinom $P(x)$.

c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $\frac{3x^3-4x^2+4x-1}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}$.

Rešenje

a) Normirani polinom četvrtog stepena

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Po Vietovim formulama dobijamo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a}{1} = 1 \Rightarrow a = -1,$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{d}{1} = -2 \Rightarrow d = -2.$$

Primenom Bezuove teoreme dobijamo:

$$P(1) = -4 \Rightarrow b + c - 2 = -4,$$

$$P(2) = 0 \Rightarrow 6 + 4b + 2c = 0.$$

Rešavanjem sistema

$$\begin{array}{rcrcr} 2b & + & c & = & -3 \\ b & + & c & = & -2 \end{array}$$

dobijamo $b = -1$ i $c = -1$. Traženi polinom je $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$.

b) Prvo formiramo skup svih potencijalnih kandidata koji mogu biti racionalni koreni polinoma $P(x)$.

$$\left.\begin{array}{rl} p|(-2) \Rightarrow & p \in \{\pm 1, \pm 2\} \\ q|(1) \Rightarrow & q \in \{1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Pomoću Hornerove sheme nalazimo korene polinoma $P(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$P(x) = (x-2)(x+1)(x^2+1)$$

c) Sada rastavljamo pravu racionalnu funkciju na parcijalne sabirke.

$$\frac{3x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{(x+1)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

Množimo celu jednakost sa $(x+1)(x-2)(x^2+1)$ da bi se oslobodili razlomka.

$$\begin{aligned}
3x^3-4x^2+4x-1 &= A(x-2)(x^2+1)+B(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)(x-2)\\
3x^3-4x^2+4x-1 &= Ax^3+Ax-2Ax^2-2A+Bx^3+Bx+Bx^2+B+Cx^3\\
&\quad -2Cx^2+Cx^2-2Cx+Dx^2-2Dx+Dx-2D\\
3x^3-4x^2+4x-1 &= (A+B+C)x^3+(-2A+B-C+D)x^2\\
&\quad +(A+B-2C-D)x+(-2A+B-2D).
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata sa leve i desne strane jednakosti dobijamo sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
A & + & B & + & C & & & = & 3\\
-2A & + & B & - & C & + & D & = & -4\\
A & + & B & - & 2C & - & D & = & 4\\
-2A & + & B & + & & - & 2D & = & -1
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{rcrcrcrcr}
A & + & B & + & C & & & = & 3\\
 & & 3B & + & C & + & D & = & 2\\
 & & & - & 3C & - & D & = & 1\\
 & & 3B & + & 2C & - & 2D & = & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
A & + & B & + & C & & & = & 3\\
 & & 3B & + & C & + & D & = & 2\\
 & & & - & 3C & - & D & = & 1\\
 & & & & C & - & 3D & = & 3
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{rcrcrcrcr}
A & + & B & + & C & & & = & 3\\
 & & 3B & + & C & + & D & = & 2\\
 & & & & C & - & 3D & = & 3\\
 & & & & & - & 10D & = & 10
\end{array}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $A=2$, $B=1$, $C=0$ i $D=-1$.

$$\frac{3x^3-4x^2+4x-1}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x^2+1}.$$