

# KOMPLEKSNI BROJEVI

23. septembar 2020

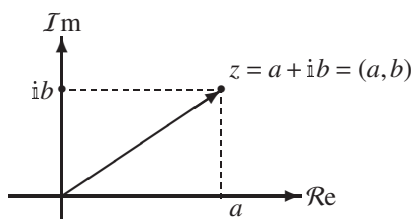
Kompleksni brojevi su uređeni parovi realnih brojeva, pri čemu je uobičajeno da kompleksni broj  $z = (a, b)$  zapisujemo u tzv. **algebarskom obliku**

$$z = a + ib,$$

gde je  $i$  **imaginarna jedinica** koja je definisana kao broj sa osobinom

$$i^2 = -1.$$

Svakom kompleksnom broju  $z = a + ib$  u **kompleksnoj ravni** jednoznačno odgovara vektor  $\vec{Oz}$  čija je početna tačka u koordinatnom početku, a krajnja tačka ima koordinate  $(a, b)$  (vidi sliku 1). U kompleksnoj ravni je uobičajeno da umesto  $x$ -ose i  $y$ -ose



Slika 1: Kompleksni broj kao vektor u kompleksnoj ravni.

koristimo redom nazive **realna osa** i **imaginarna osa**.

**Definicija 1** Za kompleksni broj  $z = a + ib$  definišemo

- **realni deo:**  $\operatorname{Re}(z) \stackrel{\text{def}}{=} a$ ,
- **imaginarni deo:**  $\operatorname{Im}(z) \stackrel{\text{def}}{=} b$ ,
- **konjugovani kompleksni broj:**  $\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - ib$ ,
- **moduo:**  $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$ ,

$$\bullet \text{ argument: } \arg z \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & , a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & , a < 0 \wedge b \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & , a < 0 \wedge b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , a = 0 \wedge b < 0 \end{cases} .$$

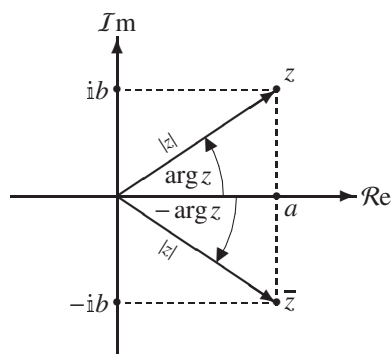
☞ Argument kompleksnog broja 0 se ne definiše, a argument kompleksnog broja različitog od nule je broj iz intervala  $(-\pi, \pi]$ , tzv. **intervala glavne vrednosti argumenta kompleksnog broja**.

☞ Svaki od prethodno navedenih pojmova ima svoju geometrijsku interpretaciju u kompleksnoj ravni. Naime, za kompleksni broj  $z = a + ib$  i njemu odgovarajući vektor  $\vec{Oz}$  je:

- realni deo  $a$  je projekcija tačke  $z$  na realnu osu;
- za imaginarni deo  $b$  je tačka  $ib$  projekcija tačke  $z$  na imaginarnu osu;
- konjugovani kompleksni broj  $\bar{z} = a - ib$  je tačka koja je osnosimetrična tački  $z$  u odnosu na realnu osu;
- moduo kompleksnog broja  $z$  je intenzitet vektora  $\vec{Oz}$ ;
- argument kompleksnog broja  $z$  je mera orijentisanog ugla kojeg zaklapaju pozitivni deo realne ose i vektor  $\vec{Oz}$ , i meri se realnim brojevima iz intervala  $(-\pi, \pi]$  (interval glavne vrednosti argumenta).

☞ Uočimo da za kompleksne brojeve  $z$  i  $\bar{z}$  važi (vidi sliku 2)

$$|z| = |\bar{z}|, \quad \arg z = -\arg \bar{z}. \quad (1)$$



Slika 2: Argument kompleksnog broja.

Osim u algebarskom vektorskom obliku, kompleksne brojeve po potrebi možemo predstavljati i u **Ojlerovom** ili **trigonometrijskom obliku**:

$$z = \underbrace{a + ib}_{\text{algebarski oblik}} = \underbrace{\vec{0z}}_{\text{vektorski oblik}} = \underbrace{\rho e^{i\varphi}}_{\text{Ojlerov oblik}} = \underbrace{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{\text{trigonometrijski oblik}}$$

gde je

$$\begin{aligned} \rho &= |z| = |\vec{0z}|, & a &= \rho \cos \varphi, & \rho &\in [0, \infty), & \varphi &\in (-\pi, \pi], \\ \varphi &= \arg z = \sphericalangle(\operatorname{Re}^+, \vec{0z}), & b &= \rho \sin \varphi, & a, b &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

☞ Uočimo da za kompleksne brojeve  $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$  i  $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$  (različite od 0) važi

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2) \Leftrightarrow (\rho_1 = \rho_2 \wedge \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi).$$

**Osnovne operacije u skupu kompleksnih brojeva i njihove geometrijske interpretacije:** neka je  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$  i  $w = a + ib = r e^{i\psi}$ , i neka je  $n \in \mathbb{N}$ .

$$[\pm] \quad z \pm w = (x \pm a) + i(y \pm b),$$

tj.

$$\operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re}(z) \pm \operatorname{Re}(w),$$

$$\operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im}(z) \pm \operatorname{Im}(w).$$

Uočimo da se zbog prethodno navedenih jednakosti kompleksni brojevi sabiraju kao vektori (po pravilu paralelograma), tj. ako je  $u = z \pm w$ , tada je  $\vec{0u} = \vec{0z} \pm \vec{0w}$ . Kompleksne brojeve nije zgodno sabirati u Ojlerovom obliku. Ako su zadani u Ojlerovom ili trigonometrijskom obliku, tada ih najpre pretvaramo u algebarski oblik a zatim sabiramo.

$$[\cdot] \quad zw = (xa - yb) + i(xb + ya) = \rho r e^{i(\varphi + \psi)},$$

tj.

$$\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w),$$

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(w),$$

$$|zw| = |z||w|,$$

$$\arg zw = \arg z + 2\pi \arg w \in (-\pi, \pi].$$

Dakle, u algebarskom obliku kompleksne brojeve množimo kao realne binome, koristeći pri tome da je  $i^2 = -1$ . U Ojlerovom i trigonometrijskom obliku, kompleksne brojeve množimo tako što im pomnožimo module i saberemo argumente.

$$[/] \quad \frac{z}{w} = \frac{x + iy}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} + i \frac{ya - xb}{a^2 + b^2} = \frac{\rho}{r} e^{i(\varphi - \psi)},$$

$$\text{tj. } \operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}{|w|^2},$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(w) - \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(w)}{|w|^2},$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},$$

$$\arg \frac{z}{w} = \arg z - 2\pi \arg w \in (-\pi, \pi].$$

Primitimo da pri deljenju kompleksnih brojeva u Ojlerovom i trigonometrijskom obliku njihove module delimo a argumente oduzimamo.

[<sup>n</sup>] Stepenovati kompleksni broj u algebarskom obliku možemo primenom binomnog obrasca

$$z^n = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} i^{n-k},$$

gde je

$$i^m = \begin{cases} 1 & , \text{ ako je } m = 4j \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ i & , \text{ ako je } m = 4j + 1 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & , \text{ ako je } m = 4j + 2 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -i & , \text{ ako je } m = 4j + 3 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}.$$

Međutim, kompleksne brojeve je mnogo lakše stepenovati kada su u Ojlerovom obliku<sup>1</sup>:

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi}, \quad \text{tj.} \quad |z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \cdot 2\pi \arg z \in (-\pi, \pi], \quad (3)$$

odnosno

$$z^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

[<sup>n</sup>√] Svaka od prethodnih operacija u skupu  $\mathbb{R}$  je restrikcija dotične operacije u skupu  $\mathbb{C}$ . Sa korenovanjem to nije slučaj, iako koristimo istu oznaku  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  u oba skupa<sup>2</sup>. U skupu kompleksnih brojeva je korenovanje definisano sa

$$\sqrt[n]{z} = u \Leftrightarrow z = u^n, \quad (4)$$

tj.  $\sqrt[n]{z}$  je promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa rešenja jednačine  $z = u^n$  po nepoznatoj  $u$ , za dati kompleksni broj  $z$ . Radi jednostavnosti, često kažemo da je  $\sqrt[n]{z}$  skup rešenja jednačine  $z = u^n$  po  $u \in \mathbb{C}$ .

Kao i kod množenja, deljenja i stepenovanja, vrednosti  $\sqrt[n]{z}$  ćemo izračunavati kada je broj  $z$  zadan u Ojlerovom obliku. Za  $z = 0$  je  $\sqrt[n]{0} = 0$ , a za  $z \neq 0$  je

$$u_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad (5)$$

$$\text{tj.} \quad |\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg \sqrt[n]{z} \in \left\{ \frac{\arg z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \mid k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \right\},$$

gde je  $\sqrt[n]{\rho}$  realni koren nenegativnog realnog broja  $\rho$ . Umesto  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , za vrednosti „brojača”  $k$  možemo uzeti bilo kojih uzastopnih  $n$  vrednosti, tj.  $\{m, m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$ , i često ćemo početno  $m$  birati tako svaki od uglova  $\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$  upadne u interval glavne vrednosti argumenta.

Kao što vidimo, sve vrednosti  $\sqrt[n]{z}$  imaju isti moduo  $\sqrt[n]{\rho}$ , tj. sve pripadaju kružnici  $K(0, \sqrt[n]{\rho})$ . Takođe uočimo da za  $k = j$  i  $k = j+1$  dobijamo uglove (argumente)

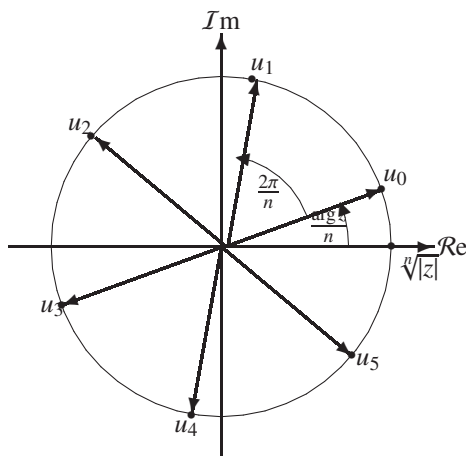
<sup>1</sup>Po potrebi ćemo ih, radi stepenovanja, pretvarati iz algebarskog u Ojlerov oblik.

<sup>2</sup>U zadacima će ili biti eksplicitno naglašeno, ili će iz konteksta biti jasno da li  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  predstavlja korenovanje u  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$ .

koji se razlikuju za  $\frac{2\pi}{n}$ , tj. ugao između svake dve „susedne” vrednosti  $\sqrt[n]{z}$  je isti ugao  $\frac{2\pi}{n}$  ( $n$ -ti deo punog kruga). Odatle zaključujemo da se svaka od vrednosti  $u_k$  promenljive  $\sqrt[n]{z}$  može dobiti rotacijom oko koordinatnog početka vrednosti  $u_{k-1}$  za ugao  $\frac{2\pi}{n}$ , a  $u_{k-1}$  se može dobiti rotacijom oko koordinatnog početka vrednosti  $u_k$  za ugao  $-\frac{2\pi}{n}$ , tj.

$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} e^{i\frac{2\pi}{n}}, & k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}. \\ u_{k-1} &= u_k e^{-i\frac{2\pi}{n}}, \end{aligned} \quad (6)$$

To znači da vrednosti  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  čine temena pravilnog  $n$ -tougla sa centrom opisane kružnice (težištem) u koordinatnom početku, poluprečnika  $\sqrt[n]{\rho}$ , pri čemu je  $\arg u_0 = \frac{\arg z}{n}$ . Na primer, za  $z = 64e^{i\frac{\pi}{3}}$  i  $n = 6$  je  $\sqrt[6]{|z|} = 2$ ,  $\arg u_0 = \frac{\arg z}{6} = \frac{\pi}{18}$  i  $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ , te su vrednosti  $u_k$  u kompleksnoj ravni raspoređene kao na slici 3.



Slika 3: Vrednosti korena u kompleksnoj ravni.

☞ Svaka od osnovnih računskih operacija  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  i  $/$  u skupu  $\mathbb{R}$  je restrikcija te operacije u skupu  $\mathbb{C}$ .

☞ Uočimo da je kompleksne brojeve najzgodnije sabirati i oduzimati kada su u algebarskom obliku, a množiti, deliti, stepenovati i korenovati kada su u Ojlerovom obliku.

**Teorema 1 (Neke osobine u skupu kompleksnih brojeva)** *Neka su  $z$ ,  $w$  i  $t$  proizvoljni kompleksni brojevi.*

$$\bullet \quad |z + w| \leq |z| + |w|, \quad ||z| - |w|| \leq |z + w|, \quad |zw| = |z| \cdot |w|, \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad (7)$$

$$\bullet z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad (8)$$

$$\bullet \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \quad (9)$$

$$\bullet |z| = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}, \quad (10)$$

• *Ojlerove formule:*

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re}(z), & \text{tj.} & \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \\ z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im}(z), & & \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}, \end{aligned} \quad (11)$$

• *formule za ugao u kompleksnoj ravni:*

$$\begin{aligned} \sphericalangle zOw &= \arg \frac{w}{z} = \arg w - \arg z, \\ \sphericalangle ztw &= \arg \frac{w-t}{z-t} = \arg(w-t) - \arg(z-t), \end{aligned} \quad (12)$$

• *ako je u kompleksnoj ravni tačka  $t$  sredina duži  $zw$ , tada iz  $\vec{zt} = \vec{tw}$ , odnosno  $t - z = w - t$  sledi da je*

$$t = \frac{1}{2}(z + w). \quad (13)$$

**Primer 1** Označimo kompleksne brojeve  $z = -2 + 2i$ ,  $w = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$  i  $u = \sqrt{3} - i$ .

\* Korišćenjem definicija parametara kompleksnog broja i formula (2) za konverziju iz jednog u drugi oblika zapisa kompleksnog broj dobijamo

$$\begin{aligned} \langle z \rangle \quad \operatorname{Re}(z) &= -2, \quad \operatorname{Im}(z) = 2, \\ |z| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}, \\ z &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \\ \langle w \rangle \quad |w| &= 3, \quad \arg w = -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{Re}(w) &= |w| \cdot \cos(\arg w) = 0, \quad \operatorname{Im}(w) = |w| \cdot \sin(\arg w) = -3, \\ w &= -3i, \\ \langle u \rangle \quad \operatorname{Re}(u) &= \sqrt{3}, \quad \operatorname{Im}(u) = -1, \\ |u| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \quad \arg u = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}, \\ u &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

\* *Pri tome je*

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \\ \bar{w} &= 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ \bar{u} &= \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

\* *Primenom definicije sabiranja i oduzimanja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$\begin{aligned}z + w &= (-2 + 0) + (2 - 3)i = -2 - i, \\z - w &= (-2 - 0) + (2 - (-3))i = -2 + 5i, \\z + u &= (-2 + \sqrt{3}) + (2 - 1)i = \sqrt{3} - 2 + i, \\z - u &= (-2 - \sqrt{3}) + (2 - (-1))i = -2 - \sqrt{3} + 3i.\end{aligned}$$

\* *Primenom definicije množenja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$\begin{aligned}zw &= (-2 + 2i)(-3i) = 6i - 6i^2 = 6i - 6(-1) = 6 + 6i, \\zu &= (-2 + 2i)(\sqrt{3} - i) = -2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}i - 2i^2 = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3}), \\ \text{ili} \\ zw &= \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(3e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = (2\sqrt{2} \cdot 3)e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = 6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \\ zu &= \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) = (2\sqrt{2} \cdot 2)e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}.\end{aligned}$$

\* *Primenom definicije deljenja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{-2 + 2i}{-3i} = \frac{-2 + 2i}{-3i} \cdot \frac{3i}{3i} = \frac{-6i - 6}{9} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i, \\ \frac{z}{u} &= \frac{-2 + 2i}{\sqrt{3} - i} = \frac{-2 + 2i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{-2\sqrt{3} - 2i + 2\sqrt{3}i - 2}{3 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 1} \\ &= \frac{-2(\sqrt{3} + 1) + 2(\sqrt{3} - 1)i}{4} = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i,\end{aligned}$$

*ili*

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{3e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{2})\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \\ \frac{z}{u} &= \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{6})\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}.\end{aligned}$$

\* *Primenom definicije stepenovanja kompleksnih brojeva dobijamo*

$$\begin{aligned}z^{2006} &= \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2006} = 2^{3009}e^{i\frac{3 \cdot 2006}{4}\pi} = 2^{3009}e^{i\frac{3009\pi}{2}} \\ &= 2^{3009}e^{i(752 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2})} = 2^{3009}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{3009}i, \\ w^{2006} &= (-3i)^{2006} = 3^{2006}i^{4 \cdot 501 + 2} = 3^{2006}i^2 = -3^{2006} = 3^{2006}e^{i\pi}.\end{aligned}$$

\* *Korišćenjem formule (5) za korenovanje na Ojlerov oblik kompleksnog broja dobijamo*

$$\begin{aligned}\sqrt[6]{z} &= \sqrt[6]{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \left\{ \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}\right)} \mid k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{7\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{13\pi}{24}}, \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{5\pi}{24}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{11\pi}{24}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{19\pi}{24}} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{w} &= \sqrt[4]{3e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \left\{ \sqrt[4]{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)} \mid k \in \{-1, 0, 1, 2\} \right\} = \\ &= \left\{ \sqrt[4]{3}e^{-i\frac{5\pi}{8}}, \sqrt[4]{3}e^{-i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \sqrt[4]{3}e^{i\frac{7\pi}{8}} \right\}, \\ \sqrt{u} &= \sqrt{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \left\{ \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right)} \mid k \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}.\end{aligned}$$

\* Korišćenjem formule (12) dobijamo npr.

$$\angle z_0 u = \arg u - \arg z = -\frac{11\pi}{12}. \quad \checkmark$$

**Primer 2** Neka je  $z = 1 - 2i$ ,  $w = -2 - i$ ,  $u = -5 + 7i$ .

▷ Ako je tačka  $s_t \in \mathbb{C}$  dobijena translacijom<sup>3</sup> tačke  $z$  u kompleksnoj ravni za vektor  $\vec{w}$ , tada je

$$s_t = z + (u - w) = -3 + 8i.$$

▷ Ako je tačka  $s_r \in \mathbb{C}$  dobijena kao projekcija<sup>4</sup> tačke  $z$  na realnu osu, a tačka  $s_i \in \mathbb{C}$  kao projekcija tačke  $z$  na imaginarnu osu, tada je

$$s_r = \operatorname{Re}(z) = 1, \quad s_i = i \operatorname{Im}(z) = -2i.$$

▷ Ako je tačka  $s_{sr} \in \mathbb{C}$  dobijena osnom simetrijom<sup>5</sup> tačke  $z$  u odnosu na realnu osu, a tačka  $s_{si} \in \mathbb{C}$  osnom simetrijom tačke  $z$  u odnosu na imaginarnu osu, tada je

$$s_{sr} = \bar{z} = 1 + 2i, \quad s_{si} = -\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = -1 - 2i.$$

▷ Ako je tačka  $s_0 \in \mathbb{C}$  dobijena centralnom simetrijom<sup>6</sup> tačke  $z$  u odnosu na koordinatni početak, a tačka  $s_w \in \mathbb{C}$  centralnom simetrijom tačke  $z$  u odnosu na  $w$ , tada je

$$s_0 = -z = -1 + 2i, \quad s_w = 2w - z = -5$$

(sledi iz  $\vec{z}\vec{w} = \vec{w}\vec{s}_w$ ). ✓

**Primer 3** Za kompleksne brojeve  $z = 3 + 9i$ ,  $w = -3 + i$  i  $u = -4\sqrt{3} + i(5 + 3\sqrt{3})$ , primenom formule (12) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\angle zwu &= \arg(u - w) - \arg(z - w) = \arg(3 - 4\sqrt{3} + i(4 + 3\sqrt{3})) - \arg(6 + 8i) = \\ &= \pi + \operatorname{arctg} \frac{4 + 3\sqrt{3}}{3 - 4\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3},\end{aligned}$$

odnosno

$$\angle zwu = \arg \frac{u - w}{z - w} = \arg \frac{3 - 4\sqrt{3} + i(4 + 3\sqrt{3})}{6 + 8i} = \arg \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \quad \checkmark$$

<sup>3</sup>Translacija za vektor  $\vec{d}$  je funkcija  $f$  tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku  $T$  prostora (ravni) preslika u tačku  $T' = f(T)$  sa osobinom  $\vec{TT'} = \vec{d}$  tj.  $\vec{OT'} = \vec{OT} + \vec{d}$ .

<sup>4</sup>Projekcija na pravu  $p$  je funkcija  $f$  tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku  $T$  prostora (ravni) preslika u tačku  $T' = f(T)$  sa osobinom da  $T' \in p$  i  $TT' \perp p$ .

<sup>5</sup>Oсна simetrija u odnosu na pravu  $p$  je funkcija  $f$  tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku  $T$  prostora (ravni) preslika u tačku  $T' = f(T)$  sa osobinom da je  $TT' \cap p = \{S\}$ ,  $TT' \perp p$  i  $TS \cong ST'$ .

<sup>6</sup>Centralna simetrija u odnosu na tačku  $C$  je funkcija  $f$  tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku  $T$  prostora (ravni) preslika u tačku  $T' = f(T)$  sa osobinom da je  $TC = CT'$ .



## O rešavanju jednačina u skupu kompleksnih brojeva

Posmatrajmo jednačinu<sup>7</sup>

$$J: f(z) = 0 \quad (14)$$

po nepoznatoj  $z \in \mathbb{C}$ . Rešiti jednačinu (14) znači odrediti skup  $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{C}$  za koji važi da  $z \in \mathcal{R}_J$  ako i samo ako je jednakost  $f(z) = 0$  tačna. Da bi jednakost (14) mogla biti tačna za broj  $z$ , jednačina mora biti definisana za  $z$ . Stoga je uvek poželjno da pre rešavanja jednačine jasno uočimo tzv. **domen  $\mathcal{D}_J$  rešavanja jednačine** (14), a to je skup svih  $z \in \mathbb{C}$  za koje je jednačina uopšte definisana. Tek nakon toga rešavamo jednačinu, tj. određujemo skup rešenja  $\mathcal{D}_J \subseteq \mathcal{R}_J$ .

Pri rešavanju jednačine (14), možemo primeniti neku od sledećih strategija<sup>8</sup>.

1. Uvođenjem smene  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  pokušavamo jednačinu (14) napisati u obliku

$$f_r(x, y) + i f_i(x, y) = 0,$$

i time je svesti na sistem od dve realne jednačine

$$f_r(x, y) = 0 \quad \wedge \quad f_i(x, y) = 0, \quad (15)$$

po nepoznatim  $x, y \in \mathbb{R}$ . Ovu smenu ima svrhe uvoditi onda kada umemo rešiti sistem (15). U načelu, to je onda kada u jednačini (14) prevladaju operacije sabiranja, konjugovanja, i slično.

2. Uvođenjem smene  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $\rho \in [0, \infty)$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  pokušavamo jednačinu (14) napisati u obliku

$$R_1(\rho, \varphi) e^{iA_1(\rho, \varphi)} = R_2(\rho, \varphi) e^{iA_2(\rho, \varphi)},$$

i time je svesti na sistem od dve realne jednačine

$$R_1(\rho, \varphi) = R_2(\rho, \varphi) \quad \wedge \quad A_1(\rho, \varphi) = A_2(\rho, \varphi) + 2k\pi, \quad (16)$$

po nepoznatim  $\rho \in [0, \infty)$ ,  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ . Ovu smenu ima svrhe uvoditi onda kada umemo rešiti sistem (16). U načelu, to je onda kada u jednačini (14) prevladaju operacije množenja, deljenja, stepenovanja, i slično.

3. Ako ni jednom ni drugom smenom ne dobijamo željeni rezultat (sistem realnih jednačina koji umemo rešiti), tada se snalazimo u zavisnosti od oblika jednačine.

<sup>7</sup>Svaka jednačina može da se zapiše u ovakvoj formi.

<sup>8</sup>U zavisnosti od oblika jednačine procenjujemo kojim metodom najlakše dolazimo do rešenja

## Zadaci za vežbanje

**Zadatak 1** Za kompleksne brojeve

$$z = -4 - 4i, \quad w = 2 - 2\sqrt{3}i,$$

izračunati

$$\operatorname{Re}(z) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \operatorname{Im}(z) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\operatorname{Re}(w) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \operatorname{Im}(w) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$|z| = \underline{\hspace{2cm}} \quad \arg z = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$|w| = \underline{\hspace{2cm}} \quad \arg w = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \bar{w} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z + w = \underline{\hspace{2cm}} \quad z - w = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \cdot z = \underline{\hspace{2cm}} \quad z \cdot e^{i\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z \cdot w = \underline{\hspace{2cm}} \quad \frac{z}{w} = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Zadatak 2** Prevesti u trigonometrijski, odnosno eksponencijalni (Ojlerov), odnosno algebarski oblik kompleksne brojeve

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = e^{i\pi}, \quad z_4 = 3e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$z_5 = 5, \quad z_6 = -2i, \quad z_7 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

**Zadatak 3** Izračunati u algebarskom obliku  $\sqrt[3]{-8 + i8}$ .

**Zadatak 4** U skupu kompleksnih brojeva rešiti jednačinu

$$J: \quad z \operatorname{Re}(z - 1) - 2 \operatorname{Im} \left( \frac{\bar{z} - 1}{1 + i} \right) = -i.$$

## Rešenja zadataka

### Rešenje zadatka 1:

$$\operatorname{Re}(z) = \underline{-4}$$

$$\operatorname{Im}(z) = \underline{-4}$$

$$\operatorname{Re}(w) = \underline{2}$$

$$\operatorname{Im}(w) = \underline{2\sqrt{3}}$$

$$|z| = \underline{4\sqrt{2}}$$

$$\arg z = \underline{-\frac{3\pi}{4}}$$

$$|w| = \underline{4}$$

$$\arg w = \underline{-\frac{\pi}{3}}$$

$$\bar{z} = \underline{-4 + 4i}$$

$$\bar{w} = \underline{2 + 2\sqrt{3}i}$$

$$z + w = \underline{-2 - 2(2 + \sqrt{3})i}$$

$$z - w = \underline{-6 + 2(-2 + \sqrt{3})i}$$

$$5 \cdot z = \underline{-20 - 20i}$$

$$z \cdot e^{i\pi} = \underline{4 + 4i}$$

$$z \cdot w = \underline{-8(1 + \sqrt{3}) + 8(\sqrt{3} - 1)i}$$

$$\frac{z}{w} = \underline{\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i}$$

□

### Rešenje zadatka 2:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_2 = \sqrt{3} - i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

$$z_3 = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1,$$

$$z_4 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3(0 + i) = 3i,$$

$$z_5 = 5 = 5(1 + 0i) = 5(\cos 0 + i \sin 0) = 5e^{0i},$$

$$z_6 = -2i = 2(0 - i) = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$\begin{aligned} z_7 &= 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

□

**Rešenje zadatka 3:** Da bi mogli primeniti formule (5) za korenovanje, potkoreni broj najpre zapisujemo u Ojlerovom obliku, a zatim vrednosti korena izračunavamo primenom formule (5).

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-8 + i8} &= \sqrt[3]{8\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \left\{ 2\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \mid k \in \{-1, 0, 1\} \right\} \\ &= \left\{ 2\sqrt[6]{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}, 2\sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{12}}, 2\sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} \right\}. \end{aligned}$$

□

**Rešenje zadatka 4:** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je  $z = x + iy$ . Tada je

$$\begin{aligned}
 J &\Leftrightarrow (x+iy)\operatorname{Re}(x-1+iy) - 2\operatorname{Im}\left(\frac{x-1-iy}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) = -i \\
 &\Leftrightarrow (x+iy)(x-1) - 2\operatorname{Im}\left(\frac{x-y-1+i(1-x-y)}{2}\right) = -i \\
 &\Leftrightarrow x^2 - x + iy(x-1) - 2\frac{1-x-y}{2} + i = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + y - 1 + i(y(x-1)+1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + y - 1 = 0 \wedge y(x-1) + 1 = 0) \\
 &\Leftrightarrow (y = 1 - x^2 \wedge (1 - x^2)(x-1) + 1 = 0) \\
 &\Leftrightarrow (y = 1 - x^2 \wedge x(x^2 - x - 1) = 0) \\
 &\Leftrightarrow \left(y = 1 - x^2 \wedge \left(x = 0 \vee x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\right) \\
 &\Leftrightarrow \left((x = 0 \wedge y = 1) \vee \left(x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \wedge y = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \vee \right. \\
 &\quad \left. \vee \left(x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \wedge y = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right).
 \end{aligned}$$

Dakle, skup rešenja jednačine  $J$  je

$$\mathcal{R}_J = \left\{ i, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - i\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - i\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

□