Kombinatorika

June 12, 2022

Uvodni pojmovi

- *n*-**faktorijel:** $0! = 1,\ n! = (n-1)! \cdot n,\ n \in \mathbb{N}.$

  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$

- **Binomni koeficijenti:** $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!},\ n \in \mathbb{N},$

  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

  $$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right);$$

  $$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k+1 \end{array} \right);$$

  $$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1.$$

Pravila izbora

- **Pravilo zbira:** Neka su A i B disjunktni skupovi i neka je $Card\,(A) = m$ i $Card\,(B) = n$. Broj načina da se izabere jedan elemenat iz skupa A ili skupa B je $m + n$.

  Primer: Odrediti na koliko načina se može dobiti zbir 9 ili 11 prilikom bacanja dve kockice za igru.

  Rešenje: Neka su kockice obeležene sa $K1$ i $K2$. Zbir 9 ili 11 se može dobiti u sledećim slučajevima:

  $$\begin{array}{cc|l} K1 & K2 & \\ \hline 3 & 6 & \\ 4 & 5 & \\ 5 & 4 & \\ 6 & 3 & \\ \hline 5 & 6 & \\ 6 & 5 & \end{array}$$

  $$\left.\begin{array}{cc} 3 & 6 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{array}\right\}\ 4 \text{ načina} \qquad \left.\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{array}\right\}\ 2 \text{ načina}$$

  Dakle, zbir 9 ili 11 se može dobiti na ukupno $4 + 2 = 6$ načina.

- **Pravilo proizvoda:** Neka su A i B neprazni skupovi i neka je $Card\,(A) = m$ i $Card\,(B) = n$. Broj načina da se izabere jedan elemenat iz skupa A i jedan elemenat iz skupa B je $m \cdot n$.
  Primer: Iz grada A u grad B vode 2 puta, a iz grada B u grad C 4 puta. Na koliko se načina može iz grada A doći u grad C, prolazeći kroz grad B?
  Rešenje:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \longrightarrow & \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ A & & B & & C \\ & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ & & & \longrightarrow & \end{array}$$

  Dakle, kako se iz grada A u grad B može stići na 2 načina, a iz grada B u grad C na 4 načina, iz grada A u grad C može se stići na $2 \cdot 4 = 8$ načina.

Uvod

Osnovni kombinatorni pojmovi, odnosno načini izbora pri biranju elemenata nekih skupova su **Permutacije, Varijacije i Kombinacije.** Oni se mogu podeliti po tri kriterijuma:

1. Da li moraju biti izabrani svi elementi početnog skupa?
   U slučaju da moraju biti izabrani svi elementi početnog skupa radi se o permutacijama, inače (ako ne moraju biti izabrani svi elementi početnog skupa) radi se o varijacijama ili kombinacijama.

2. Da li je pri biranju bitan redosled izabranih elemenata?
   U slučaju kada je redosled izabranih elemenata bitan radi se o permutacijama ili varijacijama, inače (kada redosled izabranih elemenata nije bitan) radi se o kombinacijama.

3. Da li pri biranju neki elemenat može da se bira više puta?
   Ako se neki elemenat može birati više puta onda se radi o permutacijama, varijacijama ili kombinacijama sa ponavljanjem, a ako nijedan elemenat ne može da se bira više puta onda se radi o permutacijama, varijacijama ili kombinacijama bez ponavljanja.

Permutacije bez ponavljanja

Dat je konačan skup od n različitih elemenata. Bilo koji poredak svih n elemenata naziva se permutacija bez ponavljanja.
Broj permutacija bez ponavljanja od n elemenata je

$$P(n) = n!.$$

Primer: Na koliko različitih načina se mogu 3 različite knjige poređati na policu?
Rešenje: Neka su knjige označene sa 1, 2 i 3. Mogući rasporedi su:

$$\left.\begin{array}{l} 123 \\ 132 \\ 213 \\ 231 \\ 312 \\ 321 \end{array}\right\} \text{3 knjige se mogu poređati na policu na 6 načina.}$$

Osim nabrajanjem, do istog rezultata se može doći i na sledeći način:

$$\underbrace{\text{na prvo}}^{3} \quad \underbrace{\text{na drugo}}^{2} \quad \underbrace{\text{na treće mesto}}^{1}$$

Dakle, 3 knjige se na policu mogu rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina.

Može se takođe primetiti sledeće:

1. Svi elementi početnog skupa jesu izabrani.
2. Redosled izabranih elemenata jeste bitan.
3. Elementi se ne ponavljaju.

$\Longrightarrow$ Permutacije bez ponavljanja.
$P(3) = 3! = 6.$

Permutacije sa ponavljanjem

Dat je konačan skup od n elemenata među kojima ima i jednakih (k_1 međusobno jednakih jedne vrste, k_2 međusobno jednakih druge vrste, ..., k_m međusobno jednakih m-te vrste, pri čemu je $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$). Bilo koji poredak svih n elemenata naziva se permutacija sa ponavljanjem.

Broj permutacija sa ponavljanjem od n elemenata je

$$P_{k_1,k_2,\ldots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Primer: Na koliko različitih načina se na policu mogu poređati 3 knjige, ako su 2 od njih iste?

Rešenje: Neka su dve iste knjige označene sa 1, a treća sa 2. Mogući rasporedi su:

$$\left.\begin{array}{l} 112 \\ 121 \\ 211 \end{array}\right\} \text{Knjige se mogu poređati na 3 načina.}$$

Osim nabrajanjem, do istog rezultata se može doći i na sledeći način:

$$\overbrace{\frac{3!}{\underbrace{2!\cdot 1!}_{\text{broj ponavljanja}}}}^{\text{ukupan broj načina da se rasporede 3 (različite) knjige}} = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} = 3.$$

Može se takođe primetiti sledeće:

1. Svi elementi početnog skupa jesu izabrani.
2. Redosled izabranih elemenata jeste bitan.
3. Elementi se ponavljaju.

$\Longrightarrow$ Permutacije sa ponavljanjem.

$$P_{2,1}(3) = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3.$$

Varijacije bez ponavljanja

Dat je konačan skup od n različitih elemenata. Bilo koja uređena k torka (redosled je bitan), $1 \leq k \leq n$, od k različitih elemenata datog skupa naziva se varijacija klase k bez ponavljanja.
Broj varijacija klase k bez ponavljanja od n elemenata je

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Napomena: U slučaju kada je $k = n$ varijacije bez ponavljanja su isto što i permutacije bez ponavljanja.
Primer: Koliko se različitih trocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 1, 2, 3 i 4, ako se cifre ne mogu ponavljati?
Rešenje: Moguće je napisati sledeće brojeve:

$$\left.\begin{array}{cccccc} 123 & 124 & 132 & 134 & 142 & 143 \\ 213 & 214 & 231 & 234 & 241 & 243 \\ 312 & 314 & 321 & 324 & 341 & 342 \\ 412 & 413 & 421 & 423 & 431 & 432 \end{array}\right\} \text{Može se napisati 24 broja.}$$

Osim nabrajanjem, do istog rezultata se može doći i na sledeći način:

$$\underbrace{\overset{\text{prva cifra}}{4}}_{\text{1 od 4 cifre}} \qquad \underbrace{\overset{\text{druga cifra}}{3}}_{\text{1 od 3 preostale cifre}} \qquad \underbrace{\overset{\text{treća cifra}}{2}}_{\text{1 od 2 preostale cifre}}$$

Dakle, pomoću datih cifara se može napisati $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ trocifrena broja, sa različitim ciframa.

Može se takođe primetiti sledeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Nisu svi elementi početnog skupa izabrani.} \\ \text{2. Redosled izabranih elemenata jeste bitan.} \\ \text{3. Elementi se ne ponavljaju.} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Varijacije bez ponavljanja.} \\ V_3(4) = \dfrac{4!}{(4-3)!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{1!}}{\cancel{1!}} = 24. \end{array}$$

Varijacije sa ponavljanjem

Dat je konačan skup od n različitih elemenata. Bilo koja uređena k torka (redosled je bitan), od k elemenata datog skupa, takva da se jedan ili više elemenata mogu ponavljati, naziva se varijacija klase k sa ponavljanjem.

Broj varijacija klase k sa ponavljanjem od n elemenata je

$$\overline{V_k}(n) = n^k.$$

Primer: Koliko se različitih dvocifrenih brojeva može napisati pomoću cifara 1, 2, 3 i 4 ako se cifre mogu ponavljati?

Rešenje: Moguće je napisati sledeće brojeve:

$$\left.\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{array}\right\} \text{Može se napisati 16 brojeva.}$$

Osim nabrajanjem, do istog rezultata se može doći i na sledeći način:

$$\underbrace{4 \qquad 4}_{\text{na svako mesto može doćo bilo koja od date 4 cifre}}$$

Dakle, pomoću datih cifara se može napisati $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ trocifrenih brojeva.

Može se takođe primetiti sledeće:

1. Nisu svi elementi početnog skupa izabrani.
2. Redosled izabranih elemenata jeste bitan.
3. Elementi se ponavljaju.

$\Longrightarrow$ Varijacije sa ponavljanjem.
$\overline{V_2}(4) = 4^2 = 16.$

Kombinacije bez ponavljanja

Dat je konačan skup od n različitih elemenata. Bilo koji podskp od k različitih elemenata datog skupa, bez obzira na poredak (redosled nije bitan), naziva se kombinacija klase k bez ponavljanja.
Broj kombinacija klase k bez ponavljanja od n elemenata je

$$C_k\left(n\right)=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right).$$

Primer: Na koliko različitih načina se od 7 cvetova mogu izabrati dva?

Rešenje: Neka su cvetovi obeleženi brojevima od 1 do 7. Mogući izbori su:

$$\left.\begin{array}{llllll} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & \\ 34 & 35 & 36 & 37 & & \\ 45 & 46 & 47 & & & \\ 56 & 57 & & & & \\ 67 & & & & & \end{array}\right\} \text{Može se izabrati 21 cvet.}$$

Osim nabrajanjem, do istog rezultata se može doći i na sledeći način:

Od 7 cvetova biraju se 2 proizvoljna, svejedno kojim redom, što bi bilo $\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 21$.

Može se takođe primetiti sledeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Nisu svi elementi početnog skupa izabrani.} \\ \text{2. Redosled izabranih elemenata nije bitan.} \\ \text{3. Elementi se ne ponavljaju.} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Kombinacije bez ponavljanja.} \\ C_2(7) = \binom{7}{2} = 21. \end{array}$$

Kombinacije sa ponavljanjem

Dat je konačan skup od n različitih elemenata. Bilo koji podskp od k elemenata datog skupa, pri čemu se svaki elemenat može pojaviti više puta i redosled tih elemenata nije bitan, naziva se kombinacija klase k sa ponavljanjem.

Broj kombinacija klase k sa ponavljanjem od n elemenata je

$$\overline{C_k}\,(n) = \binom{k+n-1}{k}.$$

Primer: U cvećari se prodaju ruže, lale i ljiljani. Na koliko različitih načina se može napraviti buket od 5 cvetova?
Rešenje: Neka su ruže označene sa 1, lale sa 2, a ljiljani sa 3. Mogući izbori su:

$$\left.\begin{array}{llllll}
11111 & & & & & \\
11112 & 11113 & & & & \\
11122 & 11123 & 11133 & & & \\
11222 & 11223 & 11233 & 11333 & & \\
12222 & 12223 & 12233 & 12333 & 13333 & \\
22222 & 22223 & 22233 & 22333 & 23333 & 33333
\end{array}\right\} \text{21 način.}$$

Osim nabrajanjem, do istog rezultata se može doći i na sledeći način:

Bira se 5 cvetova od tri vrste cveća. Dakle, mora se ponavljati vrsta cveća. Takođe je svejedno kojim se redosledom biraju cvetovi za buket, pa je broj načina da se to uradi

$$\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} + \frac{7!}{(7-5)!\cdot 5!} = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 2} = 21.$$

Može se takođe primetiti sledeće:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Nisu svi elementi početnog skupa izabrani.} \\ \text{2. Redosled izabranih elemenata nije bitan.} \\ \text{3. Elementi se ponavljaju.} \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \text{Kombinacije sa ponavljanjem.} \\ \overline{C_5}(3) = \binom{5+3-1}{5} = 21. \end{array}$$

Zaključak

Da li moraju biti izabrani svi elementi početnog skupa?	Da li je bitan redosled izabranih elemenata?		Bez ponavljanja.	Sa ponavljanjem.
DA	DA	PERMUTACIJE	$P(n) = n!$	$P_{k_1,\ldots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$
NE	DA	VARIJACIJE	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\overline{V_k}(n) = n^k$
NE	NE	KOMBINACIJE	$C_k(n) = \binom{n}{k}$	$\overline{C_k}(n) = \binom{k+n-1}{k}$

Zadaci

1. U restoranu se može poručiti supa, glavno jelo i kolač. Supa ima 3 vrste, glavnog jela 4 vrste i 5 vrsta kolača. Na koliko različitih načina se može poručiti ručak? Obavezno je poručiti i supu i glavno jelo i kolač.

2. Iz grada A u grad B se može stići na 2, iz grada B u grad C na 4, a iz grada C u grad D na 3 različita načina. Na koliko različitih načina se može stići iz grada A u grad D, prolazeći kroz gradove B i C?

3. Da bi se stiglo iz mesta A do mesta D može se proći kroz mesto B ili kroz mesto C. Od mesta A do B vode tri, od A do C četiri, od B do C tri, od B do D dva i od C do D tri direktna puta. Koliko ima mogućih puteva od A do D ako se kroz svako mesto prolazi najviše jednom?

4. Dat je skup slova $A = \{P, R, O, B, L, E, M\}$. Koliko se može napisati različitih reči, bez obzira na smisao, od slova skupa A u kojima se slova ne ponavljaju:
   4.1 dužine 7;
   4.2 dužine 7 koje se završavaju samoglasnikom;
   4.3 dužine 7 u kojima su slova BL jedno do drugog u datom poretku?

5. U koliko različitih permutacija cifara $1, 2, 3, \ldots, 8$, cifre $2, 4, 5, 6$ stoje jedna pored druge, i to:

   5.1 u datom poretku 2456;

   5.2 u proizvoljnom poretku?

6. Na polici se nalaze tri knjige pisca A, dve knjige pisca B i četiri knjige pisca C. Sve knjige su različite. Na koliko različitih načina se mogu rasporediti knjige:
   6.1 bez ikakvih dodatnih uslova;
   6.2 tako da na polici najpre budu knjige pisca A, zatim pisca B i na kraju pisca C;
   6.3 tako da knjige svakog od pisaca A, B i C budu jedna do druge u proizvoljnom redosledu?

7. (DZ) Na polici se nalazi 12 različitih knjiga od kojih su 5 iz matematike, 4 iz fizike i 3 iz hemije. Na koliko različitih načina se mogu rasporediti knjige na polici ako se zna da sve knjige iz iste oblasti moraju biti jedna do druge?

8. Koliko ima različitih sedmocifrenih brojeva čije su tri cifre jednake 1, dve cifre jednake 2, a dve cifre jednake 3?

9. Koliko se različitih reči, bez obzira na smisao, može napisati od svih slova sadržanih u rečima MATEMATIKA i KOMBINATORIKA?

10. Dat je skup slova $\{A, K, O, N, Z\}$. Koliko se različitih reči, bez obzira na smisao, može napisati od slova ovog skupa, pri čemu se slova ne mogu ponavljati:

10.1 dužine 2;
10.2 dužine 3;
10.3 dužine 3 koje poćinju slovom K;
10.4 dužine 3 koje ne počinju slovom K;
10.5 dužine 5 koje počinju slovom A a završavaju se slovom K?

11. Na koliko različitih načina se, od 30 članova nekog kluba, može izabrati predsednik, podpredsednik, sekretar i blagajnik kluba?

12. Koliko ima različitih trocifrenih brojeva, kod kojih se cifre ne ponavljaju, koji se mogu obrazovati od cifara:

12.1 $2, 3, 4, 7, 8, 9$;

12.2 $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

13. Koliko se različitih brojeva, u kojima se cifre mogu ponavljati, može napisati pomoću cifara $1, 2, 3, 4, 5$ tako da budu:

  13.1 dvocifreni;
  13.2 trocifreni;
  13.3 trocifreni koji ne počinju sa 5;
  13.4 parni petocifreni?

14. Koliko se različitih šestocifrenih brojeva može obrazovati od cifara $0, 1, 2, 3$?

15. Koliko ima različitih trocifrenih brojeva:

15.1 koji se završavju cifrom 3;

15.2 deljivih sa 5?

16. (DZ) Koliko se pomoću cifara $0, 1, 2, 3, 4, 5$ može napisati različitih šestocifrenih brojeva u kojima se cifre :

16.1 ne ponavljaju;

16.2 mogu ponavljati?

17. (DZ) Koliko ima različitih petocifrenih brojeva čije su:

17.1 sve cifre različite;

17.2 svake dve susedne cifre različite?

18. (DZ) Na koliko različitih načina se u pet hotela mogu smestiti tri gosta tako da u svakom hotelu bude:
    18.1 najviše jedan gost;
    18.2 proizvoljan broj gostiju?

19. Na šahovskom turniru učestvuje 8 igrača i svaki igrač igra partiju sa svakim. Koliko partija će biti odigrano?

20. (DZ) Vojna jedinica se sastoji od 3 oficira, 6 mlađih oficira i 60 vojnika. Na koliko različitih načina se od njih može izabrati manja jedinica koja će se sastojati od jednog oficira, dva mlađa oficira i 20 vojnika?

21. (DZ) U grupi od 20 šahista nalazi se 5 velemajstora. Na koliko različitih načina se mogu formirati dve ekipe od po deset šahista tako da u prvoj bude 2 velemajstora a u drugoj 3?

22. Na koliko različitih načina od dva matematičara i osam ekonomista može da se formira petočlana komisija u kojoj će biti bar jedan matematičar?

23. U odeljenju ima 16 devojčica i 20 dečaka. Za odeljensku zajednicu treba izabrati 4 predstavnika od kojih je bar jedna devojčica. Na koliko različitih načina se može izvršiti izbor?

24. Iz kompleta od 52 karte izvučeno je 10 karata. U koliko slučajeva se među izvučenim kartama nalazi:

24.1 tačno jedna dama;

24.2 tačno dve dame;

24.3 bar jedna dama;

24.4 najviše jedna dama?