Grafovi

February 28, 2021

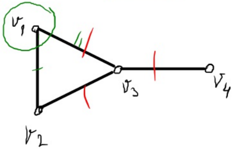
Graf G je uređen par (V, E), gde je V konačan neprazan skup elemenata koji se zovu **čvorovi**, a E je konačan skup različitih neuređenih parova različitih elemenata skupa V koji se zovu **grane**, tj. $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$.

Graf se može predstaviti geometrijski crtežom u ravni.

Čvorovi grafa se predstavljaju tačkama u ravni, a grane grafa linijama koje povezuju odgovarajuće čvorove.

Primer 1. Graf

$$G = (\underbrace{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}_{V}, \underbrace{\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}}_{E})$$



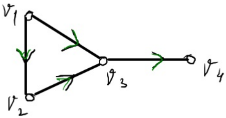
Ako je $e = \{u, v\}$ grana grafa G kaže se da grana e **spaja** čvorove u i v, ili da je grana e **incidentna** čvorovima u i v, a za čvorove u i v se kaže da su **susedni**.

Za sve grane koje su incidentne istom čvoru kaže se da su **susedne grane**.

Ako su u grafu G elementi skupa E različiti uređeni parovi elemenata skupa V, tj. $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$, onda je to **orijentisan graf**.

Primer 2. Orijentisan graf

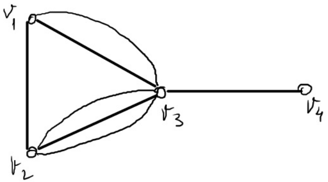
$$G = (\underbrace{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}}_{V}, \underbrace{\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}}_{E})$$

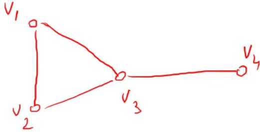


Ako u grafu G neuređeni (uredjeni) parovi skupa E ne moraju biti različiti, tj. grane ne moraju biti različite već može postojati više grana koje spajaju dva čvora, onda je to **multigraf**.

Primer 3. Multigraf

$$\begin{aligned} G \;=\; & (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \\ & \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}) \end{aligned}$$



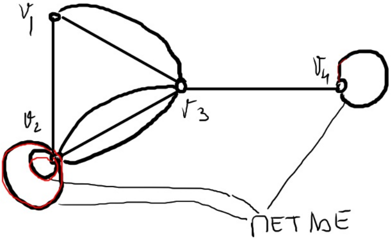


Grana grafa koja polazi iz i završava se u istom čvoru naziva se **petlja**.

Multigraf koji u sebi sadrži i petlje naziva se **pseudograf**.

Primer 4. Pseudograf

$$G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_4\}\})$$



Na dalje će sve biti rađeno isključivo za neorijentisane grafove bez petlji i bez više grana koje spajaju dva čvora. Takvi grafovi se često nazivaju **prosti grafovi**.

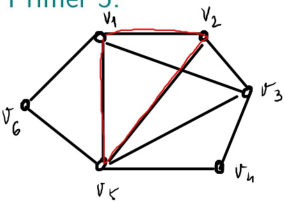
Put dužine k ($k \geq 1$) grafa G je niz grana oblika $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}$, piše se često i $v_0 - v_1 - v_2 - \cdots - v_k$.

Elementarni (prost) put je put koji kroz svaki svoj čvor prolazi najviše jednom.

Zatvoren (kružni) put je put koji se završava u istom čvoru u kom i počinje.

Kontura (ciklus) dužine n je elementarni zatvoren put i označava se sa C_n.

Primer 5.



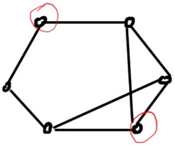
SAMO NEKE MOGUĆNOSTI :

put: $v_1 - v_2 - v_5 - v_1 - v_3$
elementarni put: $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$
zatvoren put: $v_1 - v_2 - v_5 - v_3 - v_2 - v_1$
kontura: $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_1$

Povezan graf je graf kod kog su svaka dva čvora povezana putem. Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem graf je **nepovezan**.

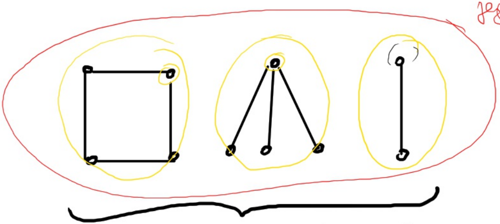
Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojenih delova, koji se nazivaju **komponente povezanosti grafa**.

Primer 6.



ПОВЕЗАН ГРАФ

један граф

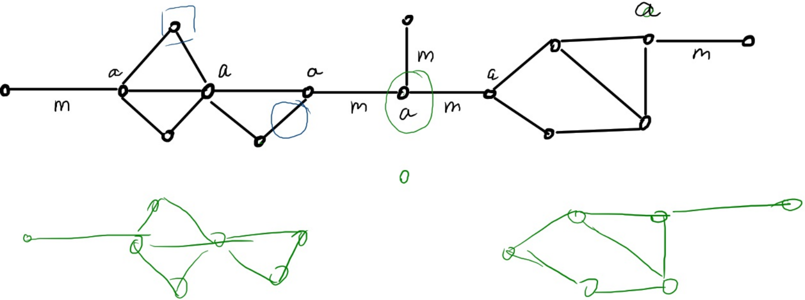


НЕПОВЕЗАН ГРАФ СА 3 КОМПОНЕНТЕ ПОВЕЗАНОСТИ

Artikulacioni čvor grafa je čvor čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenata povezanosti grafa.

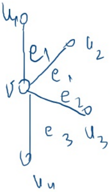
Most grafa je grana čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenata povezanosti grafa.

Primer 7. Sa a su obeleženi artikulacioni čvorovi, a sa m mostovi.



Stepen čvora v, u oznaci $deg(v)$, jednak je broju grana koje su sa čvorom v incidentne, tj. koje imaju kraj u tom čvoru.

Ako grana spaja čvor sa samim sobom, tj ako je petlja, onda se ona računa dva puta.



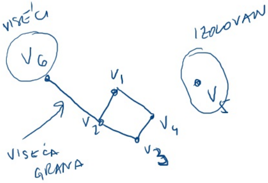
Čvor stepena 0 naziva se **izolovan čvor**, a čvor stepena 1 **list ili viseći čvor**.

Totalni stepen grafa je zbir svih stepena grafa i jednak je dvostrukom broju grana.

Odavde sledi da ne postoji graf sa neparnim totalnim stepetnom.

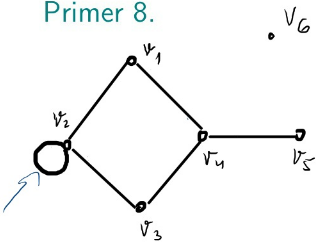
$deg(v) = 4$

Grana koja spaja čvor sa stepenom jedan je **viseća grana**.



$$\left.\begin{array}{l} deg(v_5) = 0 \\ deg(v_6) = 1 \\ deg(v_1) = deg(v_4) = deg(v_3) = 2 \\ deg(v_2) = 3 \end{array}\right\} \text{TOTALNI STEPEN } 10$$

Primer 8.



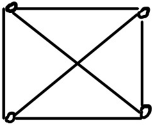
$deg\,(v_1) = 2$
$deg\,(v_2) = 4$
$deg\,(v_3) = 2$
$deg\,(v_4) = 3$
$deg\,(v_5) = 1$ - list
$deg\,(v_6) = 0$ - izolovan čvor

totalni stepen $= 12$

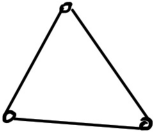
Broj čvorova neparnog stepena je u svakom (prostom) grafu paran.

Graf je **regularan** ako su svi čvorovi istog stepena. Ako su pri tome svi čvorovi stepena k kaže se da je fraf k **-regularan**.

Primer 9.



3-РЕГУЛАРАН ГРАФ



2-РЕГУЛАРАН ГРАФ

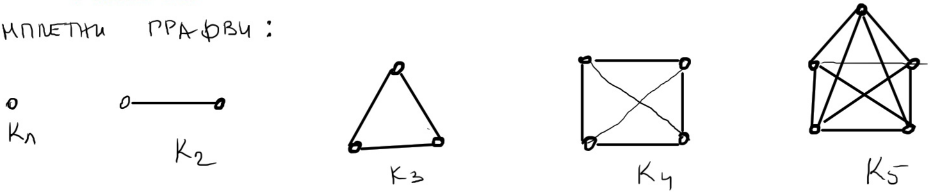
Kompletan graf je prost graf kod koga su svaka dva čvora spojena granom, tj. kod koga su svaka dva čvora susedna.

Kompletan graf sa n čvorova se označava sa K_n, i ima $\binom{n}{2}$ grana.

Prazan graf je graf u kome nikoja dva čvora nisu susedna. To je 0-regularan graf, tj. graf koji se sastoji samo od izolovanih čvorova.

Primer 10.

КОМПЛЕТНИ ГРАФОВИ :



ПРАЗАН ГРАФ :

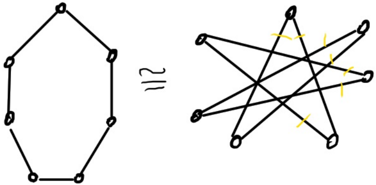
Dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su **izomorfna** ako postoji bijekcija $f : V_1 \longrightarrow V_2$ koja održava osobinu susednosti čvorova.
Piše se $G_1 \cong G_2$.

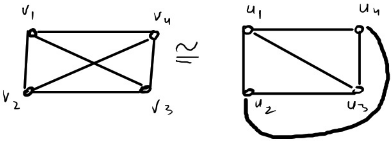
u i v susedni u V_1 $\Rightarrow$ $f(u)$ i $f(v)$ susedni u V_2

Izomorfni grafovi su ustvari isti grafovi samo različito nacrtani.

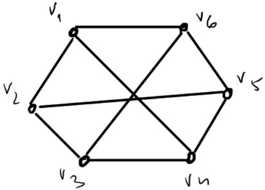
Izomorfni grafovi moraju imati isti broj čvorova, isti broj grana i iste stepene čvorova.

Primer 11.

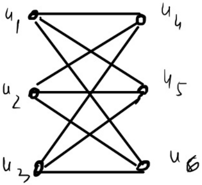




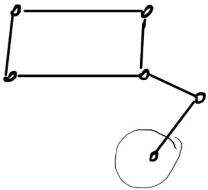
$$f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$



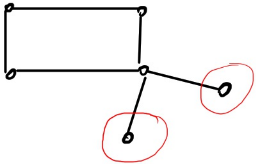
$\cong$



$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ u_1 & u_4 & u_2 & u_5 & u_3 & u_6 \end{pmatrix}$$



$\not\cong$

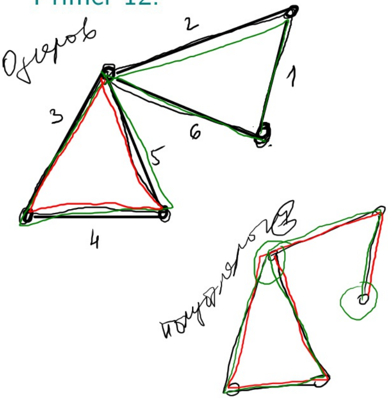


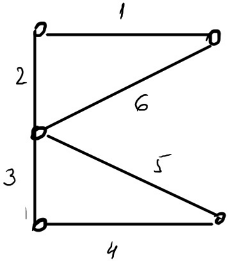
Ojlerova kontura grafa G je zatvoren put koji sadrži sve grane grafa G. Graf koji ima Ojlerovu konturu je **Ojlerov graf**.

Ojlerov put u grafu G je put koji sadrži sve grane grafa G. Graf koji ima Ojlerov put je **poluojlerov graf**.

Svaki Ojlerov graf je i poluojlerov, a obrnuto ne mora da važi.

Primer 12.





Ako je graf Ojlerov moguće ga je nacrtati iz jednog poteza (bez dizanja olovke sa papira) tako da se preko svake grane prelazi tačno jednom i da se crtež završava u početnom čvoru. U slučaju da se crtež ne završava u početnom čvoru onda je graf poluojlerov.

Povezan graf (sa bar jednom granom) je poluojlerov akko sadrži najviše dva čvora neparnog stepena (dakle, 0 ili 2 pošto ne može biti 1 čvor neparnog stepena jer je broj čvorova neparnog stepena u svakom grafu paran).

Ukoliko graf ima 0 čvorova neparnog stepena, tada crtanje počinje i završava se u istom čvoru, pa je graf ustvari Ojlerov, a ako ima dva čvora neparnog stepena, tada crtanje počinje u jednom od njih a završava se u drugom.

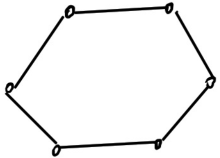
Ojlerova Teorema: Povezan graf sa bar jednom granom je Ojlerov akko su mu svi čvorovi parnog stepena.

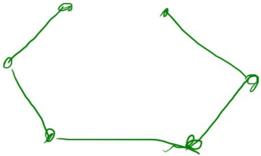
Hamiltonova kontura grafa G je kontura koja sadrži sve čvorove grafa G. Graf koji ima Hamiltonovu konturu je **Hamiltonov graf**.

Hamiltonov put u grafu G je elementrni put koji sadrži sve čvorove grefa G. Graf koji ima Hamiltonov put je **poluhamiltonov graf**.

Svaki Hamiltonov graf je i poluhamiltonov graf, a obrnuto ne mora da važi.

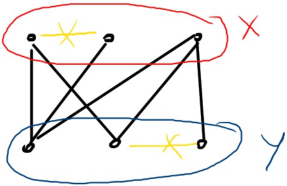
Primer 13.

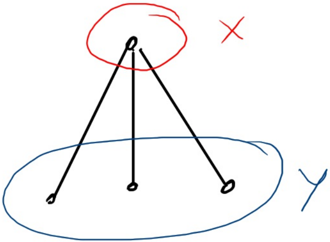




Bipartitan graf je graf čiji se skup čvorova može podeliti na dva disjunktna skupa na takav način da svaka grana spaj čvor prvog skupa sa čvorom drugog skupa.

Primer 14.



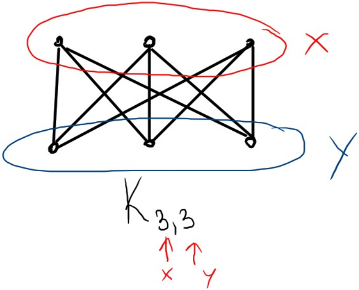


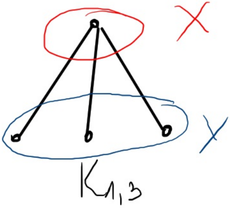
$$V = X \cup Y, \quad X \cap Y = \emptyset$$

Kompletan bipartitni graf je bipartitni graf kod kog je svaki čvor prvog skupa susedan sa svakim čvorom drugog skupa.

Kompletan bipartitni graf se označava sa $K_{m,n}$, gde su m i n brojevi elemenata u svakom od disjunktnih skupova.

Primer 15.

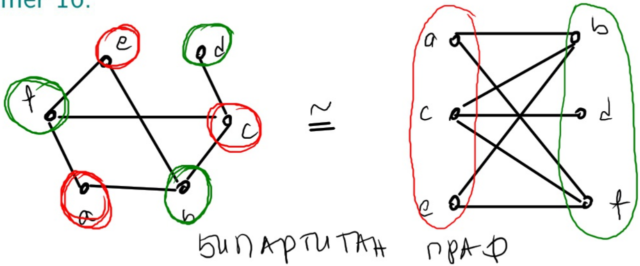


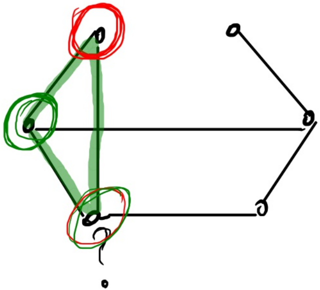


Graf je bipartitan akko ne sadrži neparne konture, tj. konture sa neparnim brojem čvorova.

Da li je graf koji ne sadrži neparne konture bipartitan ispitivaće se na sledeći način: krene se od jednog čvora koji se oboji jednom bojom, zatim se njegovi susedi oboje drugom bojom, pa njihovi susedi opet onom prvom i tako redom dok se ne oboje svi čvorovi grafa. Ako je moguće obojiti sve čvorove tako da je svaka grana incidentna sa dva čvora različite boje onda je graf bipartitan.

Primer 16.





- ово није бипартитан граф јер садржи непарну контуру.

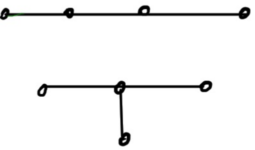
Stablo je graf u kome su svaka dva čvora povezana tačno jednim putem.

Primer 17.

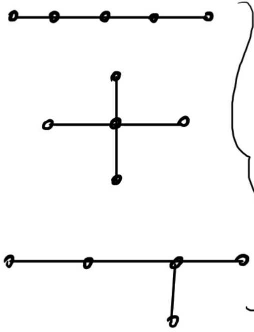
– ЈЕДИНО СТАБЛО СА ЈЕДНИМ ЧВОРОМ, ТЗВ. ТРИВИЈАЛНО СТАБЛО

– ЈЕДИНСТВЕНО СТАБЛО СА 2 ЧВОРА

– ЈЕДИНСТВЕНО СТАБЛО СА 3 ЧВОРА



– СТАБЛА СА 4 ЧВОРА



СТАБЛА СА 5 ЧВОРОВА

Svako stablo je bipartitni graf.

Svako neprazno stablo ima bar jedan list, tj. čvor stepena 1.

Najčešće korišćeno stablo je stablo u kom svaki čvor koji nije krajnji mora imati dve grane. Takvo stablo se naziva **binarno stablo**.

Primer 18.