NEODREĐENI INTEGRAL

Za funkciju $f(x)$ definisanu na nekom intervalu I, funkcija $F(x)$ je **primitivna funkcija** na tom intervalu ako je $F(x)$ diferencijabilna (ima izvod) i važi

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Pr1. Za date funkcije odrediti njihove primitivne funkcije:

$f(x) = \cos x \Longrightarrow F(x) = \sin x \qquad$ jer $(\sin x)' = \cos x$;

$f(x) = e^x \Longrightarrow F(x) = e^x \qquad$ jer $(e^x)' = e^x$;

$f(x) = x^2 \Longrightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3} \qquad$ jer $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Treba primetiti da je, recimo, za funkciju $f(x) = \cos x$ osim gore navedene funkcije $F(x) = \sin x$ primitivna funkcija takođe i funkcija $F_1(x) = \sin x + 3$, jer je i $(\sin x + 3)' = \cos x$, kao i funkcija $F_2(x) = \sin x - \dfrac{1}{2}$, jer je i $\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right)' = \cos x$ ili bilo koja funkcija oblika $F(x) = \sin x + c$, gde je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta, jer je u tom slučaju $F'(x) = (\sin x + c)' = f(x)$.

Dakle, primitivna funkcija nije jednoznačno određena. U opštem slučaju, ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I tada je i svaka funkcija oblika $F(x) + c$, gde je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta, takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$, jer je

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad c = const.$$

Što znači da za svaku funkciju $f(x)$ postoji beskonačno mnogo primitivnih funkcija.

Kako za dve primitivne funkcije $F_1(x)$ i $F_2(x)$ funkcije $f(x)$ na istom intervalu važi

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = 0,$$

jer je $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$, sledi da je $F_1(x) - F_2(x) = c$, tj. da se dve primitivne funkcije iste funkcije mogu razlikovati samo za konstantu.

Nekada se to ne primećuje na prvi pogled.

Pr2. Funkcije $F_1(x) = arctg\, x$ i $F_2(x) = arcctg\, \dfrac{1}{x}$ su obe primitivne funkcije funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \neq 0$.

Kako je $F_1'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$ to je funkcija $F_1(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, a kako je i $F_2'(x) = \dfrac{-1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = f(x)$ to je i funkcija $F_2(x)$ primitivna funkcije funkcije $f(x)$.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu I naziva se **neodređeni integral** funkcije $f(x)$ na tom intervalu i označava se sa

$$\int f(x)dx.$$

Funkcija $f(x)$ naziva se **podintegralna funkcija**, $f(x)dx$ **podintegralni izraz**, $\int$ **znak integrala** a postupak nalaženja neodredjenog integrala se naziva **integracija**.

Ako je $f(x)$ jedna, bilo koja, primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu I onda je

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

gde je c proizvoljna konstanta koja se naziva **integraciona konstanta**.

Za svaku funkciju postoji primitivna funkcija (neodređeni integral) na intervalu na kom je ona neprekidna. Mi ćemo uvek "rešavati" integral samo na onom intervalu na kom je podintegralna funkcija neprekidna, tj. na onom intervalu na kom postoji neodređeni integral i to nećemo posebno naglašavati nego ćemo ubuduće podrazumevati. Međutim, postoje neke funkcije čiji se neodređeni integrali ne mogu izraziti preko elementarnih funkcija u konačnom obliku pa će oni za nas biti nerešivi. Na primer, takvi su integrali

$$\int e^{-x^2}\, dx\ , \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx\ , \quad \int \frac{dx}{\ln x}\ , \quad \int \cos x^2\, dx\ , \quad \int \frac{e^x}{x}\, dx.$$

Osobine neodređenog integrala

Osnovne osovine neodređenog integrala su:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x);$

2. $\int F'(x)\,dx = F(x) + c;$

3. $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

4. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Tablica integrala

Tablica osnovnih integrala se dobija na osnovu tablice izvoda ili neposrednom proverom:

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1,$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c, \qquad x \neq 0,$

3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c,$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + c,$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z,$

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c, \qquad x \neq k\pi, \quad k \in Z,$

7. $\int e^x\,dx = e^x + c,$

8. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \qquad a > 0, \quad a \neq 1,$

9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + c = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + c_1, \qquad a \neq 0,$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + c = -\arccos\dfrac{x}{a} + c_1, \qquad |x| \leq a,$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c, \qquad a \in R.$

Smena promenljive

Integrale koji se ne nalaze u tablici potrebno je, pri rešavanju, svesti na tablične. Jedan od dva osnovna metoda kojima se to postiže je integracija pomoću smene.

Neka je $\varphi(t)$ funkcija koja na nekom intervalu realne ose ima neprekidan prvi izvod i neka je na tom intervalu $\varphi'(t) \neq 0$. Tada, ako je $x = \varphi(t)$, na posmatranom intervalu važi

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Parcijalna integracija

Parcijalna integracija je drugi osnovni metod za svođenje netabličnih integrala na tablične.

Neka su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije na nekom intervalu I. Tada na posmatranom intervalu važi formula za parcijalnu integraciju

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Ako se uvedu skraćene oznake $u = u(x)$, $v = v(x)$, $du = u'(x)dx$ i $dv = v'(x)dx$ prethodna formula se može napisati kao

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

INTEGRALI RACIONALNIH FUNKCIJA

Funkcija $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana sa $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, gde su $p(x)$ i $q(x)$ nenula polinomi nad poljem realnih brojeva, naziva se **racionalna funkcija**.

Racionalne funkcije se dele na prave i neprave. **Prava** racionalna funkcija je ona kod koje je $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$, a **neprava** ona kod koje je $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$.

Primer:
$r(x) = \dfrac{2x-1}{3x^2+5}$ je prava racionalna funkcija;
$r(x) = \dfrac{x^3+6}{x-1}$ je neprava racionalna funkcija;
$r(x) = \dfrac{x-7}{x+9}$ je neprava racionalna funkcija;

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije ili samo polinoma.

Prave racionalne funkcije oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{i} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

gde $A, B, C, a, p, q \in \mathbb{R},\ k, m \in \mathbb{N}$ i $p^2 - 4q < 0$, nazivaju se **parcijalni razlomci**.

Svaka prava racionalna funkcija može se predstaviti u obliku zbira parcijalnih razlomaka.

Rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne razlomke

- Ukoliko je racionalna funkcija **neprava** vrši se deljenje polinoma u brojiocu sa polinomom u imeniocu. Nakon deljenja dobija se polinom ili zbir polinoma i prave racionalne funkcije.
- **Faktoriše** se polinom u imeniocu prave racionalne funkcije nad poljem realnih brojeva (faktori su linearni ili kvadratni koji nemaju realne nule).
- Prava racionalna funkcija **rastavlja se na zbir parcijalnih razlomaka**. Posmatraju se faktori imenioca prave racionalne funkcije.
  - Faktor oblika $(x-a)^k$ daje sledećih k sabiraka parcijalnih razlomaka sa konstantama u brojiocima:
  $$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$
  - Faktor oblika $(x^2+px+q)^m$, $p^2-4q<0$, daje sledećih m sabiraka parcijalnih razlomaka sa opštim linearnim polinomima u brojiocima:
  $$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \ldots, \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Izračunavanje integrala oblika $\int r(x)dx$, gde je $r\,(x)$ racionalna funkcija, se u opštem slučaju svodi na izračunavanje jednog ili više integrala oblika:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx$, $x \neq a$;

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx$, $x \neq a$, $k \geq 2$;

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, $p^2-4q<0$;

4. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$, $p^2-4q<0$, $n \geq 2$.

Integrali prvog i drugog tipa rešavaju se jednostavno korišćenjem smene $x-a=t$, $dx=dt$:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = \begin{pmatrix} x-a=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = A\int \frac{1}{t}\,dt = A\ln|t|+c = A\ln|x-a|+c\ ;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{pmatrix} x-a=t \\ dx=dt \end{pmatrix} = A\int \frac{1}{t^k}\,dt = A\int t^{-k}\,dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+c = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+c\ ;$$

Integral trećeg tipa se rastavlja na dva integrala kako bi se mogla primeniti smena $x^2+px+q=t$, $(2x+p)\,dx=dt$.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx\ .$$

Prvi od ovih integrala nakon uvođenja smene postaje tablični:

$$\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \begin{pmatrix} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,dx=dt \end{pmatrix} = \frac{A}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{A}{2}\ln|t|+c = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q|+c_1$$

Drugi od ovih integrala se mora transformisati tako što se kvadratni trinom koji se nalazi u imeniocu zapiše u kanoničkom obliku. Zatim se smenom $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$ ovaj integral svodi na tablični:

$$\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx = \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+c_2.$$

Integrali četvrtog tipa se rešavaju korišćenjem rekurentne formule što izlazi iz okvira ovog kursa i neće biti rađeno.

INTEGRALI IRACIONALNIH FUNKCIJA

Integrali oblika $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$ i $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $a \neq 0$ rešavaju se na sličan način kao integrali racionalne funkcije oblika $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$, $p^2-4q<0$.

Integrali oblika $\int r\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx$, $ad-bc \neq 0$, $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{Q}$ rešavaju se tako što se sa p označi najmanji zajednički sadržalac imenilaca eksponenata $r_1, r_2, \ldots, r_k$, a zatim se uvođenjem smene $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$ polazni integral svodi na integral racionalne funkcije po t.

Integrali oblika $\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $a \neq 0$ gde je $p_n(x)$ polinom n-tog stepena po x $(n \geq 1)$, rešavaju se primenom identiteta

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gde je $q_{n-1}(x)$ polinom po x stepena $n-1$ čije koeficijente treba odrediti, a $\lambda \in \mathbb{R}$ neodređena konstanta koju takođe treba odrediti.

Da bi se odredili koeficijenti polinoma $q_{n-1}(x)$ i λ potrebno je odrediti izvod prethodne jednakosti

$$\frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = q'_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + q_{n-1}(x)\cdot\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Množenjem ove jednakosti sa $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dobija se

$$p_n(x) = q'_{n-1}(x)\cdot\left(ax^2+bx+c\right) + q_{n-1}(x)\cdot\left(ax+\frac{b}{2}\right) + \lambda.$$

Sada su sa obe strane znaka jednakosti polinomi po x stepena n, pa se njihovim izjednačavanjem dobijaju vrednosti koeficijenata polinoma $q_{n-1}(x)$ i konstante λ.

INTEGRALI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Integrali oblika $\int r(\sin x, \cos x)\ dx$, u kojima je podintegralna funkcija racionalna funkcija koja zavisi od $\sin x$ i $\cos x$ mogu se opštom trigonometrijskom smenom

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t, \quad (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

svesti na integral racionalne funkcije po t.

Pri uvođenju ove smene dobija se:

$$x = 2\mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Napomena:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Uvođenjem opšte trigonometrijske smene često se dobijaju glomazne i teške podintegralne funkcije pa se zbog toga posmatraju specijalni slučajevi integrala ovog oblika koji se mogu rešiti na jednostavniji način.

Integral oblika $\int r(\sin x, \cos x)\ dx$ se u slučaju da važi $r(\sin x, -\cos x) = -r(\sin x, \cos x)$ može izraziti u obliku integrala $\int r_1(\sin x)\cos x\ dx$ koji se smenom

$$\sin x = t, \quad \cos x\ dx = dt$$

svodi na integral racionalne funkcije po t.

Integral oblika $\int r(\sin x, \cos x)\ dx$ se u slučaju da važi $r(-\sin x, \cos x) = -r(\sin x, \cos x)$ može izraziti u obliku integrala $\int r_1(\cos x)\sin x\ dx$ koji se smenom

$$\cos x = t, \quad -\sin x\ dx = dt$$

svodi na integral racionalne funkcije po t.

Integral oblika $\int r(\sin x, \cos x)\ dx$ se u slučaju da važi $r(-\sin x, -\cos x) = r(\sin x, \cos x)$ može izraziti u obliku integrala $\int r_1(\mathrm{tg}x)\ dx$ koji se smenom

$$\mathrm{tg}x = t, \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad x = \mathrm{arctg}t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

svodi na integral racionalne funkcije po t.

INTEGRALI EKSPONENCIJALNIH FUNKCIJA

Integral oblika $\int r\left(e^x\right)\ dx$, gde je r racionalna funkcija od e^x smenom

$$e^x = t, \quad dx = \frac{dt}{t}$$

se svod na integral racionalne funkcije od t.

Specijalni slučajevi integrala oblika $\int \left(p_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right)\ dx$,

gde su $p_n(x)$ i $q_m(x)$ polinomi n-tog, odnosno m-tog stepena ili nula polinomi, pri čemu ne mogu u isto vreme oba biti nula polinomi, a α i β proizvoljne konstante su integrali oblika:

1. $\int q_m(x)\sin\beta x\ dx$,
2. $\int p_n(x)\cos\beta x\ dx$,
3. $\int p_n(x)e^{\alpha x}\ dx$,
4. $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\ dx$,
5. $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx$.

Svi ovi integrali rešavaju se parcijalnom integracijom, pri čemu se za u u prva tri slučaja uzima polinom, a za dv $\sin\beta x\ dx$, $\cos\beta x\ dx$ ili $e^{\alpha x}\ dx$ u zavisnosti da li je u pitanju integral pod 1,2 ili 3, dok se u slučaju 4 i 5 može proizvoljno izabrati za u eksponencijalna a za dv trigonometrijska funkcija i dx ili obrnuto.