Realne funkcije dve (više) realne promenljive

Preslikavanje $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ naziva se **realna funkcija dve realne promenljive** i obeležava sa $z = f(x, y)$. Skup D je domen ili oblast definisanosti.

Primer 1. Ako je $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ tada je

$$f(2,-3) = \frac{2^2+(-3)^2}{2\cdot 2\cdot(-3)} = \frac{4+9}{-12} = -\frac{13}{12},$$

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\cdot\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} = \frac{x^2+y^2}{2xy} = f(x,y).$$

Primer 2. Oblasti definisanosti sledećih funkcija su:

(1) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-1\right)$
$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2>1\right\}$

(2) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$
$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy>0\right\}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\right\}$

(4) $f(x,y) = \sqrt{\ln x + \ln y}$
$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0 \ \wedge\ y>0 \ \wedge xy\ge 1\right\}$.

Parcijalni izvodi prvog reda (ili prvi parcijalni izvodi)

Neka je funkcija $z = f(x,y)$, definisana nad $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Neka tačke (x,y), $(x+\vartriangle x, y)$, $(x, y+\vartriangle y)$ i $(x+\vartriangle x, y+\vartriangle y)$ pripadaju oblasti D.

Parcijalni priraštaj funkcije z po promenljivoj x je

$$\vartriangle_x z = f(x+\vartriangle x, y) - f(x,y),$$

a parcijalni priraštaj funkcije z po promenljivoj y je

$$\vartriangle_y z = f(x, y+\vartriangle y) - f(x,y).$$

Totalni priraštaj funkcije z je

$$\vartriangle z = f(x+\vartriangle x, y+\vartriangle y) - f(x,y).$$

Parcijalni izvod prvog reda po x funkcije $z = f(x,y)$ je granična vrednost količnika parcijalnog priraštaja $\vartriangle_x z$ i priraštaja $\vartriangle x$ kad $\vartriangle x$ teži nuli, i obeležava se sa $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, tj.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\vartriangle x\longrightarrow 0}\frac{\vartriangle_x z}{\vartriangle x} = \lim_{\vartriangle x\longrightarrow 0}\frac{f(x+\vartriangle x, y)-f(x,y)}{\vartriangle x}.$$

Analogno je, parcijalni izvod prvog reda po y funkcije $z = f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\vartriangle y\longrightarrow 0}\frac{\vartriangle_y z}{\vartriangle y} = \lim_{\vartriangle y\longrightarrow 0}\frac{f(x, y+\vartriangle y)-f(x,y)}{\vartriangle y}.$$

Dakle, parcijalni izvod funkcije $z = f(x,y)$ po x jednak je običnom izvodu po x, pod pretpostavkom da je y konstanta. Analogno važi i za parcijalni izvod po y.

Primer 3. Ako je $f(x,y) = x^2y^3$, onda je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 \ \text{ i } \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Prvi totalni diferencijal (ili totalni diferencijal prvog reda) funkcije $z = f(x, y)$

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode u nekoj okolini tačke $M(x, y)$. Tada se izraz

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

naziva prvi totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$.

Primer 4. Prvi totalni diferencijal funkcije $f(x, y) = x^2 y^3$ je

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy.$$

Parcijalni izvodi drugog reda (ili drugi parcijalni izvodi)

Parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ su u opštem slučaju opet funkcije dve promenljive x i y, pa se mogu odrediti i njihovi parcijalni izvodi ukoliko postoje. Tako se mogu dobiti četiri nova parcijalna izvoda drugog reda funkcije $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ i } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ako su funkcija $z = f(x, y)$ i njeni parcijalni izvodi $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ neprekidni u okolini tačke $M(x, y)$ onda važi da je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Primer 5. Parcijalni izvodi drugog reda funkcije $f(x, y) = x^2 y^3$ su $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y$.

Drugi totalni diferencijal funkcije (ili totalni diferencijal drugog reda) $z = f(x, y)$

Neka funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode drugog reda u nekoj okolini tačke $M(x, y)$. Tada se izraz

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

naziva drugi totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$.

Primer 6. Drugi totalni diferencijal funkcije $f(x, y) = x^2 y^3$ je

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Ekstremne vrednosti

Funkcija $z = f(x, y)$ definisana u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ ima lokalni ekstrem u tački (x, y) ako je $\triangle z$ istog znaka za sve dovoljno male vrednosti $\triangle x$ i $\triangle y$ ((x, y), $(x + \triangle x, y + \triangle y)$ pripadaju oblasti D), i to lokalni maksimum ako je $\triangle z < 0$, a lokalni minimum ako je $\triangle z > 0$.

Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $z = f(x, y)$ ima lokalni ekstrem u tački $T(x_0, y_0) \in D$ jeste da je

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Tačke u kojima je zadovoljen potreban uslov za lokalnu ekstremnu vrednost nazivaju se stacionarne tačke.

Dovoljani uslovi za postojanje lokalne ekstremne vrednosti funkcije $z = f(x, y)$ u tački T:

$\star$ Neka je $T(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$. Neka u nekoj okolini tačke $T(x_0, y_0)$, uključujući i tu tačku, funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode. Tada, ako je

(1) $\left(d^2 z\right)_T > 0$ za $(dx, dy) \neq (0, 0)$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ ima lokalni minimum;

(2) $\left(d^2 z\right)_T < 0$ za $(dx, dy) \neq (0, 0)$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ ima lokalni maksimum;

(3) $\left(d^2 z\right)_T$ menja znak za $(dx, dy) \neq (0,0)$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ nema lokalne ekstreme.

$\ast$ Neka je $T(x_0, y_0)$ stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$. Neka u nekoj okolini tačke $T(x_0, y_0)$, uključujući i tu tačku, funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode i neka je

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0), \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Tada, ako je

(1) $rs - t^2 > 0$ i $r > 0$ (ili $s > 0$), funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ ima lokalni minimum;

(2) $rs - t^2 > 0$ i $r < 0$ (ili $s < 0$), funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ ima lokalni maksimum;

(3) $rs - t^2 < 0$, funkcija $z = f(x, y)$ u tački $T(x_0, y_0)$ nema lokalne ekstreme;

(4) $rs - t^2 = 0$, potrebna su dalja ispitivanja.