

ODREĐENI INTEGRAL

Neka je $f(x)$ funkcija definisana i ograničena na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Podelimo interval $[a, b]$ na n podintervala tačkama

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b.$$

i označimo dužinu svakog podintervala sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. U intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberimo proizvoljnu tačku α_i i formirajmo zbir

$$I(P) = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i \quad .$$

$I(P)$ se naziva **integralna ili Rimanova suma** za funkciju $f(x)$ u intervalu $[a, b]$.

Ako postoji granična vrednost sume $I(P)$ kada maksimalno Δx_i teži nuli, nezavisna od podele intervala $[a, b]$ i načina izbora tačke α_i iz intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ ima **određeni integral**, tj. da je **integrabilna u Rimanovom smislu**, i pišemo

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \quad .$$

Vrednost a naziva se donja, a b gornja granica integracije.

Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu je integrabilna na tom intervalu u Rimanovom smislu.

Monotona funkcija na zatvorenom intervalu je integrabilna na tom intervalu u Rimanovom smislu.

• Osobine određenog integrala

1. Ako su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije na $[a, b]$, a A i B konstante, tada je

$$\int_a^b (A f(x) \pm B g(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx \pm B \int_a^b g(x) dx.$$

2. Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

3. Za proizvoljnu funkciju $f(x)$ zadovoljeno je

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija nad intervalima $[a, b]$, $[a, c]$ i $[c, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5. Ako je $f(x)$ nenegativna, (odnosno nepozitivna) funkcija nad intervalom $[a, b]$, onda je

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{odnosno} \quad \int_a^b f(x) dx \leq 0).$$

6. Ako su $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne funkcije nad $[a, b]$ i ako je $f(x) \leq g(x)$ nad istim intervalom, tada je i

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

7. Njutn-Lajbnicova formula

Ako je $f(x)$ integrabilna funkcija nad intervalom $[a, b]$, i ako $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$, tj. ako je

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad , \quad (F'(x) = f(x)),$$

tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Pr1.

$$1. \int_1^2 x^3 dx; \quad 2. \int_1^4 \sqrt{x} dx; \quad 3. \int_1^3 e^x dx; \quad 3. \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx; \quad 4. \int_2^8 \frac{1}{x} dx; \quad 5. \int_1^9 \frac{2x^2 + x^2\sqrt{x} - 1}{x^2} dx$$

• **Smena promenljivih kod određenog integrala**

Neka je dat $\int_a^b f(x) dx$, gde je $f(x)$ neprekidna funkcija nad intervalom $[a, b]$. Uvedimo novu promenljivu prema formuli $x = \phi(t)$. Ako su zadovoljeni uslovi

1. $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$,
2. $\phi(t)$ i $\phi'(t)$ su neprekidne funkcije nad intervalom $[\alpha, \beta]$,
3. $f(\phi(t))$ je definisana i neprekidna nad intervalom $[\alpha, \beta]$,

onda je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt.$$

Pr2.

$$1. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad 2. \int_1^2 e^{2x} dx \quad 3. \int_1^2 2x(x^2 + 3)^4 dx \quad 4. \int_1^2 \frac{1}{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx$$

• **Parcijalna integracija kod određenog integrala**

Neka su $u = u(x)$, $v = v(x)$ kao i njihovi izvodi neprekidne funkcije nad intervalom $[a, b]$. Tada je

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Pr3.

$$1. \int_1^e \ln x dx. \quad 2. \int_1^2 xe^x dx \quad .$$

ZADATAK: Izračunati vrednost sledećih određenih integrala:

$$\begin{aligned} 1. \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx; & \quad 2. \int_0^2 (x + 3x^2) dx; & \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx; & \quad 4. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx; & \quad 5. \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 2} dx; \\ 2. \int_0^1 \arcsin x dx; & \quad 7. \int_0^1 \frac{x - 3}{x^2 + 2x + 2} dx; & \quad 8. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx; & \quad 9. \int_0^1 x^4 (1 + x^5) dx; \\ 3. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + 5}{\cos^2 x} dx; & \quad 11. \int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 2)^5} dx; & \quad 12. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; & \quad 13. \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx; \\ 4. \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} dx; & \quad 15. \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 3x + 5} dx; & \quad 16. \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{-3x^2 + 2x + 1}} dx; & \quad 17. \int_e^{e^2} x \ln x dx; \\ 5. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}; & \quad 19. \int_1^2 \frac{e^x - 8}{e^{2x} + 4} dx; & \quad 20. \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 x - \sqrt{\sin x}) \cos x dx; \end{aligned}$$