DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Jednačina koja sadrži nepoznatu funkciju i njene izvode naziva se diferencjalna jednačina. Ako nepoznata funkcija zavisi samo od jedne promenljive, onda se radi o **običnoj diferencijalnoj jednačin**i. Red najvišeg izvoda koji se javlja u jednačini određuje **red diferencijalne jednačine.**

Primer1. $y' = \cos x$ je diferencijalna jednačina prvog reda;
$y'' + 3y' + 5y = \cos x$ je diferencijalna jednačina drugog reda.

Opšti oblik diferencijalne jednačine prvog reda je

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{ili} \quad y' = f(x, y)$$

gde je x-nezavisna promenljiva, y-funkcija a y'- njen prvi izvod.

Funkcija $y = y(x)$, definisana i diferencijabilna u nekoj oblasti, koja identički zadovoljava datu jednačinu za svako x iz te oblasti, naziva se **rešenje diferencijalne jednačine**.

Primer2. $y = x^2$ je rešenje diferencijalne jednačine $y' = 2x$, jer iz $y = x^2$ sledi da je $y' = 2x$. to znači da funkcija $y = x^2$ identički zadovoljava jednačinu $y' = 2x$. Ali i za svaku drugu funkciju oblika $y = x^2 + c$, $c = const$, važi da je $y' = 2x$, tj. svaka funkcija oblika $y = x^2 + c$, $c = const$ identički zadovoljava jednačinu $y' = 2x$.

Odavde sledi da diferencijalna jednačina prvog reda može imati neograničen broj rešenja koja se razlikuju za konstantu.

Za diferencijalnu jednačinu $y' = f(x, y)$, uslov $y(x_0) = y_0$ se naziva **početni uslov**. Diferencijalna jednačina sa početnim uslovom čini **početni problem**.

Postoje tri vrste rešenja diferencijalnih jednačina prvog reda:

- opšte rešenje,
- partikularno rešenje,
- singularno rešenje.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine prvog reda je funkcija oblika $y = y(x, c)$ koja zavisi od jedne konstante. Geometrijski gledano opšte rešenje predstavlja familiju krivih u ravni koje zavise od c.

Primer3. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \cos x$.
$y' = \cos x \Longrightarrow y = \sin x + c$, jer je $(\sin x + c)' = \cos x$.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine prvog reda je ono rešenje $y = y(x, c_0)$ koje zadovoljava početni uslov. Ono se dobija iz opšteg rešenja stavljajući da je $c = c_0$. To c_0 se dobija uvrštavanjem početnog uslova u opšte rešenje. Geometrijski gledano partikularno rešenje predstavlja jednu krivu uzetu iz familije krivih datih opštim rešenjem tako da prolazi kroz unapred zadatu tačku.

Primer 4. Naći partikularno rečenje diferencijalne jednačine $y' = \cos x$ koje zadovoljava početni uslov $y(0) = 5$.
U Primeru 3. je pokazano da je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine $y = \sin x + C$. Uvrštavanjem početnog uslova u ovo opšte rešenje dobija se da je $5 = \sin 0 + C$, tj. da je $C = 5$ pa je traženo partikularno rešenje $y = \sin x + 5$.

Singularno rešenje diferencijalne jednačine prvog reda je ono rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za koju vrednost konstante c.

I tip: DIFERENCIJALNA JEDNAČINA KOJA RAZDVAJA PROMENLJIVE

Oblik: $g(y)dy = f(x)dx$

Način rešavanja: Ako su f i g neprekidne funkcije nad nekom oblašću, rešenje se dobija integraljenjem obe strane jednačine.

Primer 5. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = -\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, a zatim naći ono partikularno rešenje koje prolazi kroz tačku $T(0, 2)$.

$$y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Longrightarrow ydy = -xdx \Longrightarrow \int ydy = -\int xdx \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

Ako konstantu c zapišemo u obliku $\frac{c^2}{2}$ opšte rešenje možemo zapisati u obliku $y^2 + x^2 = c^2$ što predstavlja familiju krivih - centralnih koncentričnih kružnica poluprečnika c.

Kako treba odrediti partikularno rešenje koje prolazi kroz tačku $T(0, 2)$, to znači da treba izaberati onu krivu za koju je $y(0) = 2$. Kako se za $y(0) = 2$ iz opšteg rešenja dobija da je $4 + 0 = c^2$ traženo partikularno rešenje, tj. tražena kriva koja pripada familiji krivih $y^2 + x^2 = c^2$ i prolazi kroz tačku $T(0, 2)$ je $y^2 + x^2 = 4$.

ZADATAK 1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

1. $y' = xy - y$;
2. $y' = -\frac{y}{x-1}$;
3. $\frac{x}{y} = \frac{y'}{x+1}$;
4. $y' = 2y^2x^{-3}$;
5. $(1+x)\,ydx = (1-y)\,xdy$;
6. $x + xy + y'\,(y + xy) = 0$;
7. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}y' = 0$;
8. $xy' = y\,(1 + x\cos x)$;
9. $y\left(x^2-1\right)y' = -x\left(y^2-1\right)$;
10. $y\sqrt{1-x^2}dy + x\sqrt{1-y^2dx} = 0$;
11. $y' = \frac{1+y^2}{(1+x^2)\,xy}$;
12. $y' = \mathrm{tg}^2x\mathrm{tg}^2y$;
13. $\sin x \sin y\, dx = \cos x \cos y\, dy$.

ZADATAK 2. Za diferencijalnu jednačinu $y' = 2x + 1$ odrediti ono rešenje koje prolazi kroz tačku $T\,(1, 0)$.

ZADATAK 3. Rešiti početni problem:

1. $2\sqrt{x}dy = y\,dx$, $y\,(4) = 1$;
2. $y' = -\frac{2y}{x}$, $y\,(1) = e$;
3. $e^y\,(y' + 1) = 1$, $y\,(0) = \ln 2$;
4. $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$;
5. $\left(1 + x^2\right)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$, $y\,(0) = 1$.

II tip: HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblik: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Način rešavanja: Ako je f neprekidna funkcija nad nekom oblašću, rešenje se dobija uvođenjem smene $\frac{y}{x} = t$, $t = t(x)$. Odavde je sad $y = xt$, pa je $y' = t + xt'$. Nakon uvrštavanja smene u jednačinu dobija se diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive.

Primer 6. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $x \neq 0$.
Nakon uvođenja gore navodene smene ova diferencijalna jednačina postaje
$t + xt' = t + t^2 \Longrightarrow x\frac{dt}{dx} = t^2 \Longrightarrow \frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dt}{t^2} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{t} = \ln|x| + c \Longrightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c$
U ovom zadatku moguće je rešenje zapisati i kao $y = -\frac{x}{\ln|x| + c}$ ili ako za konstantu uzmemo $\ln c$ (što se može uraditi jer se svaki realan broj može zapisati u tom obliku) umesto c dobija se rešenje zapisano kao $y = -\frac{x}{\ln c|x|}$.

ZADATAK 1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

1. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;
2. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
3. $y' = \frac{y}{x} + 1 + e^{-\frac{y}{x}}$;
4. $y' = \dfrac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$;
5. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;
6. $xyy' + x^2 - y^2 = 0$;
7. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;
8. $y' = \frac{x + y}{x - y}$;
9. $\left(x^2 + y^2\right) dx + x^2 dy = 0$;
10. $\left(x^2 - 3y^2\right) dx + 2xydy = 0$;
11. $(x - y)\, ydx - x^2 dy = 0$.

ZADATAK 3. Rešiti početni problem:

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1$, $y(1) = -2$;
2. $x^2 y' = y(x + y)$, $y(1) = \frac{1}{\ln 2}$;
3. $xy' - y = x\mathrm{tg}\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{6}$;
4. $xy' - y = y \ln \frac{y}{x}$, $y(1) = e$.

III tip: LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblik: $y' + f(x)y = g(x)$, f i g su neprekidne funkcije ili konstante.

Način rešavanja: rešava se uvođenjem smene $y = uv$, $u = u(x)$, $v = v(x)$. Odavde je sad $y' = u'v + uv'$. Nakon uvrštavanja smene u jednačinu dobija se $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$. Grupisanjem drugog i trećeg sabirka i izvlačenjem funkcije u dobija se $u'v + u\,(v' + f(x)v) = g(x)$. Sada se funkciju v može odrediti iz uslova da izraz u zagradi bude jednak nuli, tj. uzima se da je $v' + f(x)v = 0$ što će uvek biti diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive, iz koje se može odrediti v. Nakon toga, vraćanjem funkcije v u jednačinu $u'v + u\,(v' + f(x)v) = g(x)$ dobija se još jedna diferencijalnu jednačina koja razdvaja promenljive samo sada će funkcija koja treba da se odredi biti funkcija u. Kada se odrede obe funkcije vrate se u smenu i dobija se konačno rešenje.

Na ispitu nije dozvoljeno koristiti gotovu formulu za rešavanje linearne diferencijalne jednačine!

Primer 7. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$, $x > 0$.
Nakon uvođenja gore navodene smene ova diferencijalna jednačina postaje
$u'v + uv' + \dfrac{1}{x}uv = x^2 \Longrightarrow u'v + u\left(v' + \dfrac{1}{x}v\right) = x^2$ (*)
Izjednačavanjem izraza u zagradi sa 0, dobija se diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive
$v' + \dfrac{1}{x}v = 0 \Longrightarrow \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x} \Longrightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln v = -\ln x \Longrightarrow v = \frac{1}{x}$
Uzima se da je integraciona konstanta $c = 0$ jer je potrebno samo jedno rešenje ove diferencijalne jednačine, tj. samo jedna vrednost funkcije v.
Uvrštavanjem funkcije v u diferencijalnu jednačinu (*) dobija se još jedna diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive
$\dfrac{1}{x}u' = x^2 \Longrightarrow u' = x^3 \Longrightarrow du = x^3dx \Longrightarrow \displaystyle\int du = \int x^3dx \Longrightarrow u = \frac{x^4}{4} + c$
Dakle, sad je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine
$y = uv = \left(\dfrac{x^4}{4} + c\right)\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{c}{x}$.

ZADATAK 1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

1. $y' - y = e^x$;
2. $y' + y + x = 0$;
3. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x$;
4. $y' - \dfrac{2}{x+1}y - (x+1)^3 = 0$;
5. $y' + y\sin x = \sin x$;
6. $y' + y\mathrm{tg}x = \sin x$;
7. $xy' - y = x^5$;
8. $xy' + 2y = e^{x^2}$;
9. $xy' - y = x\ln x$;
10. $y'\sin x - y\cos x = -\cos^2 x$;
11. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2\sin x$;
12. $y' + y\sin x = 2xe^{\cos x}$;
13. $xy' + y = x^3 + x$.

ZADATAK 3. Rešiti početni problem:

1. $y' = 2\,(2x - y)$, $y\,(0) = 1$;
2. $y' + 2xy = x^3$, $y\,(1) = 1$;
3. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$, $y\,(1) = 1$;

4. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = -1$;

5. $y' + y\text{ctg}x = 5e^{\cos x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$;

6. $y' \cos^2 x + y = 1$, $y(0) = 0$.

IV tip: BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Oblik: $y' + f(x)y = g(x)y^n$

Način rešavanja: Bernulijeva diferencijalna jednačina može se rešavati smenom $z = y^{1-n}$ nakon koje se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu, a može se rešavati i na potpuno isti način kao linearna diferencijalna jednačina.

Primer 8. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x}y = 2x\sqrt{y}$, $x > 0$.

Nakon uvođenja smene $y = uv \Longrightarrow y' = u'v + uv'$ ova diferencijalna jednačina postaje

$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x\sqrt{uv} \Longrightarrow u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x\sqrt{uv}$ (*)

Izjednačavanjem izraza u zagradi sa 0, dobija se diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive

$v' - \frac{2}{x}v = 0 \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \Longrightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \Longrightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln v = 2\ln x \Longrightarrow v = x^2$.

Uvrštavanjem funkcije v u diferencijalnu jednačinu (*) dobija se još jednu diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive

$x^2u' = 2x\sqrt{ux^2} \Longrightarrow u' = 2\sqrt{u} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u} \Longrightarrow \frac{du}{\sqrt{u}} = 2dx \Longrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\int dx \Longrightarrow 2\sqrt{u} = 2x + 2c \Longrightarrow u = (x+c)^2$

Dakle, sad je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$y = uv = (x+c)^2 x^2 = \left(x^2 + cx\right)^2$.

ZADATAK 1. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine:

1. $y' + y = xy^5$;
2. $y' + xy = xy^3$;
3. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;
4. $y' - 9x^2y = \left(x^5 + x^2\right) y^{\frac{2}{3}}$;
5. $xy' + y = x^3y^6$;
6. $xy' + y = y^2 \ln x$;
7. $y' + 2\frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;
8. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.

ZADATAK 3. Rešiti početni problem:

1. $xy' + y + xy^2 = 0$, $y(1) = 1$;
2. $xy' - y = 2y^2 x \ln x$, $y(1) = 1$;
3. $x^3y^2 + xy = y'$, $y(1) = 1$;
4. $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$;
5. $ydy = \left(\frac{y^2}{x} - x^3\right) dx$, $y(2) = 2$.