Brojni redovi

February 25, 2022

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ realan niz. Beskonačan zbir brojeva

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

naziva se **brojni red** ili kraće, samo **red**.
Brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ su članovi reda, a a_n je **opšti član** reda.
Opšti član je, u stvari, pravilo po kom se generišu svi članovi reda.
Članovi reda ne moraju biti numerisani od 1. Često njihova numeracija počinje od 0 ali i od bilo kog drugog broja $p \in \mathbb{N}$.

Zbirovi članova reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ obrazuju novi niz realnih brojeva $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Niz $\{s_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ naziva se **niz parcijalnih suma** reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

i njegov opšti član je $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Primer: Na osnovu opšteg člana niza parcijalnih suma

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

odrediti opšti član reda a_n.

Kako je $s_1 = a_1$ to je $a_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, a za $n \geq 2$ kako je

$$s_n - s_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = a_n$$

sledi da je

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ako postoji konačna granična vrednost niza parcijalnih suma $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tj. ako je niz parcijalnih suma $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, kaže se da je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergentan** i da mu je suma (zbir) s. U tom slučaju se piše

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Za red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ koji nije konvergentan kaže se da je **divergentan**.

Primer: Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Opšti član ovog reda $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pa je

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ to je dati red konvergentan i njegov zbir je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

OSOBINE BROJNIH REDOVA

- Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan tada je i red $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, $c \in \mathbb{R}$ konvergentan i važi $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Ako su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni tada je i red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergentan i važi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- Redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, $n \geq 2$ su istovremeno konvergentni ili divergentni.

POTREBAN USLOV ZA KONVERGENCIJU REDA: Kod konvergentnog reda opšti član a_n teži nuli kad n teži beskonačno, tj.

$$\text{red } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je kovergentan } \longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0.$$

To znači da ako opšti član reda ne teži nuli kad n teži beskonačno, red je sigurno divergentan, tj.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n \neq 0 \longrightarrow \text{red } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je divergentan }.$$

Takođe, kako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, samo potreban uslov za konvergenciju reda, obrnuto ne mora da važi, tj. može da bude $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a da red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ipak bude divergentan.

Primer: Red $\sum_{n=1}^{\infty} n$ je divergentan jer $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **red sa pozitivnim članovima** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $a_n \geq 0$ za sve $n \geq n_0$. (ustaljen je naziv redovi sa pozitivnim clanovima iako su clanovi ustvari nenegativni)
Redovi sa pozitivnim članovima imaju osobinu da se mogu upoređivati, što je od velikog značaja za ispitivanje konvergencije. Redovi sa kojima se ovi redovi najčešće upoređuju su:

- harmonijski red: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji je divergentan;
- hiperharmonijski red: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ koji je konvergentan za $\alpha > 1$, a divergentan za $\alpha \leq 1$;
- geometrijski red: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q > 0$ koji je konvergentan za $q < 1$, a divergentan za $q \geq 1$. Za njega važi da je za $|q| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Konvergencija redova sa pozitivnim članovima se može ispitivati pomoću sledećih uporednih kriterijuma:

- Uporedni kriterijum I: Neka su $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ dva brojna reda sa pozitivnim članovima i neka postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi
$$a_n \leq b_n.$$
Tada:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ je konvergentan $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentan;
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ je divergentan $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ je divergentan.

Primer: Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ je divergentan jer

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n-1}},$$

a poznato je da je hiperharmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergentan za $\alpha \leq 1$, pa na osnovu prvog uporednog kriterijuma i red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ mora biti divergentan.

- Uporedni kriterijum II: Neka su $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ dva brojna reda sa pozitivnim članovima koji se jednako ponašaju u beskonačnosti ($a_n \sim b_n$, kad $n \longrightarrow \infty$), tj.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \ K \neq 0, \ K \neq \infty.$$

Tada su oba reda istovremeno ili konvergentna ili divergentna.

Primer: Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentan jer je

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1,$$

tj.

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2},$$

a poznato je da je hiperharmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergentan za $\alpha > 1$, pa na osnovu drugog uporednog kriterijuma i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ mora biti konvergentan.

- Dalamberov (količnički kriterijum): Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima. Ako je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

tada je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\langle \begin{array}{l} \text{konvergentan za } l < 1, \\ \text{divergentan za } l > 1. \end{array} \right.$$

Za $l = 1$ kriterijum ne daje odgovor.

Primer: Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ je konvergentan jer je

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{(n+1)\, 2^n}{n 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

pa na osnovu Dalamberovog kriterijuma sledi da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ mora biti konvergentan.

- Košijev (korenski) kriterijum: Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ brojni red sa pozitivnim članovima. Ako je

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

tada je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\langle \begin{array}{l} \text{konvergentan za } l < 1, \\ \text{divergentan za } l > 1. \end{array} \right.$$

Za $l = 1$ kriterijum ne daje odgovor.

Primer: Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ je konvergentan jer je

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

pa na osnovu Košijevog kriterijuma sledi da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ mora biti konvergentan.