

Brojni niz

February 25, 2022

Realan brojni niz je svako preslikavanje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Niz se označava sa $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ili samo $\{a_n\}$ gde je $f(n) = a_n$ i kaže se da je a_n opšti član niza $\{a_n\}$.

Primer 1. Članovi niza čiji je opšti član:

$$a_n = n^2 \quad \text{su} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 16, \quad \dots$$

$$b_n = \frac{1}{n} \quad \text{su} \quad b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = \frac{1}{4}, \quad \dots$$

$$c_n = 2 \quad \text{su} \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = 2, \quad \dots$$

$$d_n = (-1)^n \quad \text{su} \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = -1, \quad d_4 = 1, \quad \dots$$

Niz kod kog svi članovi imaju istu vrednost (kao c_n u prethodnom primeru) naziva se **stacionarni niz**.

Ako postoji realan broj G takav da je $a_n \leq G, \forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane** brojem G i broj G se tada naziva **gornje ograničenje niza**.

Ako postoji realan broj g takav da je $g \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane** brojem g i broj g se tada naziva **donje ograničenje niza**.

Ako postoji i gornje i donje ograničenje niza, kaže se da je niz ograničen.

Očigledno, gornje i donje ograničenje niza nije jedinstveno.

Najmanje gornje ograničenje niza naziva se **supremum** i označava se $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, a najveće donje ograničenje niza naziva se **infimum** i označava se $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Primer 2.

- ▶ Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ je ograničen sa donje strane. Brojevi $0, -2, \frac{1}{2}, 1, \dots$ predstavljaju njegova donja ograničenja, a $\inf a_n = 1$ jer je $n^2 \geq 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz nije ograničen sa gornje strane.
- ▶ Niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ je ograničen (i sa gornje i sa donje strane), a pošto je $0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, to je $\sup b_n = 1$, a $\inf b_n = 0$.
- ▶ Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je takođe ograničen i važi $\sup c_n = \inf c_n = 2$.
- ▶ Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ je ograničen jer $-1 \leq (-1)^n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pa je $\sup d_n = 1$, a $\inf d_n = -1$.

Za proizvoljan realan broj a , otvoren interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$, naziva se **ε -okolina** tačke a .

Realan broj a je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ akko se u svakoj ε -okolini broja a nalazi beskonačno mnogo članova tog niza.

Primer 3.

- ▶ Za niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ tačka nagomilavanja je broj 0 jer se u proizvoljnoj ε -okolini tačke 0, tj. u intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza b_n .

- ▶ Za niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ tačka nagomilavanja je broj 2 jer se svi članovi niza c_n nalaze u bilo kojoj okolini tačke 2.

- ▶ Za niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ ne postoji tačka nagomilavanja jer se njegovi članovi neograničeno povećavaju.

- ▶ Za niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ tačke nagomilavanja su brojevi ± 1 jer se u proizvoljnoj ε -okolini oba broja nalazi beskonačno mnogo članova niza d_n .

Realan broj a je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ akko se izvan proizvoljne ε -okoline broja a nalazi najviše konačno mnogo članova niza $\{a_n\}$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ovo znači da se za svako $\varepsilon > 0$ može pronaći prirodan broj n_0 , koji zavisi od ε , takav da se svi članovi niza $\{a_n\}$ čiji je indeks veći od n_0 nalaze u ε -okolini tačke a .

Ovaj iskaz se označava sa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ ili } a_n \rightarrow a \text{ kad } n \rightarrow \infty \text{ (} a_n \text{ teži u } a \text{ kad nteži u } \infty \text{)}.$$

Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost $a \in \mathbb{R}$ kaže se da je **konvergentan**, tj. da konvergira ili teži ka tački a . Ako niz nije konvergentan, on je **divergentan** tj. divergira.

Očigledno je granična vrednost niza ujedno i tačka nagomilavanja tog niza, kao i da niz sa više tačaka nagomilavanja nije konvergentan.

Niz $\{a_n\}$ teži u ∞ , kad n teži u ∞ , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ akko

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Niz $\{a_n\}$ teži u $-\infty$, kad n teži u ∞ , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ akko

$$(\forall M < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Za niz $\{a_n\}$ koji teži ka ∞ ili $-\infty$ kaže se da je divergentan u užem smislu. Dok se za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu kaže da je divergentan u širem smislu.

Primer 4.

Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ nije konvergentan jer nema tačku nagomilavanja.

Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja.

Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$, jer se u svakoj ε -okolini tačke 2 nalaze svi članovi ovog niza.

Niz $\{b_n\}$, $b_n = \frac{1}{n}$ je takođe konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ jer je

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$, što znači da se unutar proizvoljne ε

-okoline tačke 0 nalaze svi članovi niza čiji je indeks veći od $\frac{1}{\varepsilon}$.

Osnovne osobine konvergentnih nizova:

- ▶ Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, tada je a jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.
- ▶ Konvergentan niz $\{a_n\}$ ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jednaka tački nagomilavanja tog niza.
- ▶ Konvergentan niz je ograničen.
- ▶ Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.

- ▶ Ako su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, tada je $a \leq b$.
- ▶ Ako su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ onda je i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.
- ▶ Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i niz $\{b_n\}$ takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Računske operacije sa graničnim vrednostima:

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ i c konstanta, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada je:

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca$;

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, gde je $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$.

Niz $\{a_n\}$ je monotono:

- ▶ **rastući** ako je $a_n < a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **opadajući** ako je $a_n > a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **nerastući** ako je $a_n \geq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ **neopadajući** ako je $a_n \leq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je monoton ako ima bilo koju od ovih osobina.

Princip monotonije: svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema: Niz $\{a_n\}$ čiji je opšti član $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentan.

Ideja dokaza: Može se pokazati da je ovaj niz ograničen, tj. da je $2 \leq a_n \leq 3$ i da je monotono rastući, pa je po principu monotonije on konvergenta, tj. ima graničnu vrednost. Ta granična vrednost zove se e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj e je iracionalan broj. Njegova približna vrednost je $e \approx 2,718281\dots$ i ona se uzima kao osnova prirodnog logaritma.

Važne osobine:

- ▶ Ako niz $\{a_n\}$, $a_n > 0$ konvergira ka broju $a > 0$, tada je i niz $\{\ln a_n\}$ konvergentan i konvergira ka broju $\ln a$.
- ▶ Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka broju a , tada je i niz $\{e^{a_n}\}$ konvergentan i konvergira ka broju e^a .
- ▶ Ako niz $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ konvergira ka broju a , tada je i niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergentan i konvergira ka broju $\sqrt[k]{a}$.

Izrazi oblika:

$$" \frac{\infty}{\infty} ", " \frac{0}{0} ", " 0 \cdot \infty ", " \infty - \infty ", " 0^0 ", " \infty^0 ", " 1^\infty ",$$

zovu se **neodređeni izrazi**.

Primeri izraza koji nisu neodređeni:

$$" \frac{2}{\infty} = 0 ",$$

$$" \frac{5}{0^+} = \infty ",$$

$$" \frac{5}{0^-} = -\infty ",$$

$$" \frac{0}{\infty} = 0 ",$$

$$" \frac{\infty}{0^+} = \infty ",$$

$$" 0^\infty = 0 ",$$

$$" e^\infty = \infty ",$$

$$" e^{-\infty} = 0 ",$$

$$" \left(\frac{1}{5} \right)^\infty = 0 ",$$

$$" \ln 0^+ = -\infty ",$$

$$" \ln \infty = \infty ",$$

$$" \infty + \infty = \infty ",$$

$$" \infty \cdot \infty = \infty ".$$

Važne granične vrednosti kod nizova su:

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases},$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1), \text{ tj. } |q| < 1 \\ \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{ne postoji, } & q \leq -1 \end{cases},$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\blacktriangleright \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Skala rasta nizova za:

$$\ln n \prec n^a \prec n^b \prec p^n \prec q^n \prec n! \prec n^n,$$

za $0 < a < b$, $1 < p < q$.

Oznaka \prec čita se “sporije raste”.

Svi nizovi sa opštim članovima navedenim u skali rasta teže u beskonačno kad $n \rightarrow \infty$, pri čemu najsporije teži ka beskonačno niz sa opštim članom $\ln n$, a najbrže sa opštim članom n^n .