Funkcije - neprekidnost

March 13, 2022

Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je **neprekidna u tački** $x_0 \in X$ akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)\big(\forall x \in X\big)\big(|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big).$$

Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je **neprekidna u tački $x_0 \in X$ sa desne (tj. leve)** strane ako je neprekidna za sve x iz skupa $X \cap (x_0, \infty)$ (tj. $X \cap (-\infty, x_0)$).

Razlike između definicija granične vrednosti i neprekidnosti u tački $x_0 \in X$ su:

- za graničnu vrednost u tački x_0 pretpostavka je da je x_0 tačka nagomilavanja za X, a kod neprekidnosti da je funkcija f definisana u tački x_0, tj. da $x_0 \in X$;
- kod neprekidnosti se zahteva da za svako $x \in X$ važi $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, a kod granične vrednosti da za svako $x \in X \setminus \{x_0\}$ važi $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Odavde se može zaključiti sledeće:

- ako je f neprekidna funkcija u tački x_0 ne mora da postoji $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$, jer ako je x_0 izolovana tačka za skup X, tada je f automatski neprekidna u tački x_0, dok u tom slučaju ne postoji granična vrednost $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$;
- ako postoji $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ bez obzira da li je funkcija f definisana u tački x_0, funkcija ne mora da bude neprekidna u tački x_0 (na primer za $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ je $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a $f(x)$ nije neprekidna u 0 jer nije definisana u 0).

Dakle, da bi funkcija bila neprekidna u tački x_0 treba da važi:

- $x_0 \in X$, tj. funkcija je definisana u tački x_0;
- ako je x_0 tačka nagomilavanja za X, tada postoji $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ i važi jednakost $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;
- ako je $x_0 \in X$ izolovana tačka, tada je f neprekidna u tački x_0 (ali nema graničnu vrednost u toj tački).

Ako je tačka x_0 tačka nagomilavanja skupa X i ako je funkcija f definisana u njoj, tada je f neprekidna u tački x_0 akko

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ako funkcija f nije neprekidna u tački x_0, kaže se da je funkcija f prekidna u tački x_0, odnosno da funkcija f ima prekid u tački x_0.

Funkcija je neprekidna nad skupom ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa.

Elementarne funkcije su neprekidne na svojim domenima.

Ako su funkcije f i g neprekidne, tada su neprekidne i funkcije:

$$f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g},\ g \neq 0,\ \text{i } f \circ g$$

nad odgovarajućim domenima.

Neka su date funkcije $f : Y \to Z$ i $g : X \to Y$. Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$ i f neprekidna u tački A, tada je:

$$\lim_{x \to x_0} (f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(A).$$