

Lopitalovo pravilo

March 28, 2022

Neka su funkcije f i g diferencijabilne u nekoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, sem eventualno u samoj tački a i neka je $g'(x) \neq 0$ za svako x iz te okoline. Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, i ako postoji

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}$, tada je:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Lopitalovo pravilo važi i ako je $A = \pm\infty$ i kada $x \rightarrow \pm\infty$.

Takođe važi i u slučaju kada je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

Primer 1. Izračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Kako je $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ i kako postoji

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

to je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Primer 2. Izračunati $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a}$, $a > 0$.

Kako je $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \infty$, za $a > 0$ i kako postoji

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^a)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = 0,$$

to je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$.

Obrnuto ne mora da važi, tj. ako ne postoji $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ to ne mora da znači da i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ne postoji.

Primer 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

jer je funkcija $\sin x$ ograničena, tj. $\sin x \in [-1, 1]$, a $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, kad $x \rightarrow \infty$.

Dakle, ova granična vrednost postoji, a ne može se primeniti Lopitalovo pravilo za njeno izračunavanje jer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$$

ne postoji.

Pored toga što se primenjuje na neodređene izraze oblika „ $\frac{0}{0}$ ” i „ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, Lopitalovo pravilo se može primeniti i na ostale neodređene izraze („ $0 \cdot \infty$ ”, „ $\infty - \infty$ ”, „ 1^∞ ”, „ 0^0 ”, „ ∞^0 ”) koji se elementarnim aritmetičkim transformacijama svode na prethodna dva slučaja.

- „ $0 \cdot \infty$ ”: Ako $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$ i $g(x) \rightarrow \pm\infty$, $x \rightarrow a$ tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \text{„} \frac{0}{0} \text{”}$$

ili

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \text{„} \frac{\infty}{\infty} \text{”}.$$

- „ $\infty - \infty$ “: Ako $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow a$ i $g(x) \rightarrow \pm\infty$,
 $x \rightarrow a$ tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = " \infty \cdot 0 " .$$

Može se desiti i da $1 - \frac{g(x)}{f(x)}$ ne teži u nulu kad x teži a . U tom slučaju $f(x) - g(x)$ teži u $\pm\infty$ kad x teži a .

- „0⁰“, „∞⁰“ i „1[∞]“: U sva tri slučaja izraz oblika $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ se svodi na oblik „0 · ∞“ i to na sledeći način

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = A / \ln$$

$$\begin{aligned} \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) \\ &= "0 \cdot \infty". \end{aligned}$$