FUNKCIJE - IZVODI

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana na intervalu $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Sa $\Delta x \neq 0$ se označava **prirаštaj argumenta** funkcije $f(x)$ u tački $x \in (a, b)$ (Δx je mala promena argumenta). Ako tačka $x + \triangle x$ pripada intervalu (a, b), onda je realan broj

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

priraštaj funkcije $f(x)$ u tački x, koji odgovara priraštaju argumenta Δx.

Ako postoji (konačna) granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

tada se ta granična vrednost naziva **prvi izvod** funkcije $f(x)$ u tački x i obeležava sa y' ili $f'(x)$.

Ako je ova granična vrednost jednaka ∞ ili $-\infty$ funkcija nema izvod u tački x i kaže se da funkcija ima beskonačan izvod.

Ako se u definiciji prvog izvoda posmatra samo leva, odnosno desna, granična vrednost dobija se levi, odnosno desni, izvod u tački x koji se označava se sa f'_{-}, odnosno f'_{+}.

Da bi postojao izvod u nekoj tački moraju postojati i levi i desni izvod i oni moraju biti jednaki.

Napomena: Pod $f'(x)$ se podrazumeva izvod u proizvoljnoj tački domena. Ako je potrebno odrediti izvod u konkretnoj tački x_0 piše se $f'(x_0)$.

Ako funkcija ima izvod u nekoj tački x, ona je u toj tački neprekidna. Obrnuto ne mora da važi.

Za funkciju koja ima izvod u tački x kaže se da je diferencijabilna u tački x.

1. Osobine izvoda

Neka funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u okolini tačke $x \in \mathbb{R}$ i neka $\alpha \in \mathbb{R}$, tada važi:

(1) $(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$,

(2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

(3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$

2. Izvod složene funkcije

Neka je funkcija g diferencijabilna u tački $x \in \mathbb{R}$ i neka je funkcija f diferencijabilna u tački $u = g(x)$. Tada je funkcija $f\big(g(x)\big)$ takođe diferencijabilna u tački x i važi

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

3. Izvodi višeg reda

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna i neka je $f'(x)$ njen prvi izvod. Ako je funkcija $f'(x)$ diferencijabilna, onda se njen izvod naziva **izvod drugog reda** ili **drugi izvod** funkcije f u tački x i označava sa $y'' = f''(x) = (f'(x))'$.
Ako postoji, **n-ti izvod funkcije** $f(x)$, u oznaci $f^{(n)}(x)$, je prvi izvod funkcije $f^{(n-1)}(x)$, tj.

$$f^{(n)}(x) = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)', \; n \in \mathbb{N}.$$

4. Izvod parametarski zadatih funkcija

Parametarski zadata funkcija je ona funkcija $y = y(x)$ koja je definisana preko funkcija:

$$x = x(t) \quad \text{i} \quad y = y(t) \quad \text{za} \quad t \in I,$$

gde je t neki parametar, a $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval realnih brojeva.

Oznake za prvi izvod funkcije po parametru t su $\dot{x} = x'_t$ i $\dot{y} = y'_t$, a za drugi izvod su $\ddot{x} = x''_t$ i $\ddot{y} = y''_t$.

Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju prve izvode po t i ako je $x'_t \neq 0$, onda je **prvi izvod parametarski zadate funkcije** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ parametarski zadata funkcija $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} \end{cases}$.

Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju druge izvode po t i ako je $x'_t \neq 0$, onda je **drugi izvod parametarski zadate funkcije** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ parametarski zadata funkcija $\begin{cases} x = x(t) \\ y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} \end{cases}$.

5. Implicitno zadate funkcije

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata implicitno, jednačinom $F(x, y) = 0$ ili $F(x, y) = G(x, y)$. Njen izvod se računa tako što se prvo odredi izvod leve i desne strane jednakosti po promenljivoj x, pri čemu se vodi računa da je x nezavisna promenljiva, a $y = f(x)$ funkcija koja zavisi od x. Na taj način se i izvod funkcije $y = f(x)$ dobija u implicitnom obliku. U nekim slučajevima on se može prebaciti u eksplicitni oblik, ali to nije neophodno. Drugi izvod implicitno zadate funkcije se računa na isti način kao i prvi izvod.

6. Logaritamski izvod

Logaritamski izvod se koristi za određivanje izvoda funkcija oblika $y = f(x)^{g(x)}$ kod kojih je $f(x) > 0$.

Ovaj postupak podrazumeva da se obe strane jednakosti $y = f(x)^{g(x)}$ logaritmuju. Nakon toga se dobija funkcija u implicitnom obliku čiji izvod se računa po pravilu za nalaženje izvoda implicitne funkcije, tj.

$$\begin{aligned}
y &= f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0 \\
\ln y &= \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) \\
\ln y &= g(x) \cdot \ln(f(x)) \Big/' \\
\frac{1}{y} y' &= g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} f'(x) \\
y' &= f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right].
\end{aligned}$$

Drugi izvod ovih funkcija se određuje na isti način.

7. Geometrijska interpretacija prvog izvoda

Neka je dat grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ nad intervalom (a, b) i na njemu proizvoljne tačke $M(x, y)$ i $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Sečica koja prolazi kroz tačke M i N zaklapa ugao β sa pozitivnim smerom x-ose i važi:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kad $\Delta x \longrightarrow 0$, tačka N se približava tački M, a sečica MN postaje tangenta krive postavljena u tački M. Ako se ugao između ove tangente i pozitivnog smera x-ose označi sa α, onda je

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \mathrm{tg}\beta = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Dakle, prvi izvod funkcije u nekoj tački predstavlja koeficijent pravca tangente u posmatranoj tački.

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački x_0, tj. neka postoji $f'(x_0)$.

Jednačina tangente t na grafik funkcije $y = f(x)$ u tački $A(x_0, f(x_0))$ je

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je tangenta horizontalna prava $y = f(x_0)$.

Jednačina normale n na grafik funkcije $f(x)$ u tački $A(x_0, f(x_0))$ je

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

ako je $f'(x_0) \neq 0$. U slučaju da je $f'(x_0) = 0$ jednačina normale je vertikalna prava $x = x_0$.