# ISPITIVANJE FUNKCIJA

Kada se kaže da treba detaljno ispitati funkciju $y = f(x)$ to znači da treba ispitati sledeće njene osobine:

(1) **Oblast definisanosti - domen**

Domen predstavlja skup svih vrednosti nezavisne promenljive $x$ za koje je funkcija $y = f(x)$ definisana. Označava se sa $D$. Domeni nekih funkcija mogu se odrediti na osnovu sledećih pravila:

- funkcija $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ je definisana kada su definisane funkcije $h(x)$ i $g(x)$ i kada je $g(x) \neq 0$;
- funkcija $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) \geq 0$;
- funkcija $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcija $f(x) = \ln(g(x))$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) > 0$;
- funkcija $f(x) = e^{g(x)}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcije $f(x) = \arcsin(g(x))$ i $f(x) = \arccos(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $-1 \leq g(x) \leq 1$;
- funkcije $f(x) = \mathrm{arctg}(g(x))$ i $f(x) = \mathrm{arcctg}(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$.

**Primer:**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x + 1 && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};\\
f(x) &= \frac{1}{x} && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\};\\
f(x) &= \frac{2x^2 - 5}{x - 3} && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\};\\
f(x) &= \frac{e^x - 5x}{(x-2)(x+7)} && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\};\\
f(x) &= \sqrt{x} && \Longrightarrow \quad D = [0, \infty);\\
f(x) &= \sqrt{x - 5} && \Longrightarrow \quad D = [5, \infty);\\
f(x) &= \sqrt{x^2 - 4} && \Longrightarrow \quad D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty);\\
f(x) &= \sqrt[3]{x} && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};\\
f(x) &= \ln x && \Longrightarrow \quad D = (0, \infty);\\
f(x) &= \ln(x + 4) && \Longrightarrow \quad D = (-4, \infty);\\
f(x) &= \ln\Big((x-3)(x+5)\Big) && \Longrightarrow \quad D = (-\infty, -5) \cup (3, \infty);\\
f(x) &= e^x && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};\\
f(x) &= \arcsin x && \Longrightarrow \quad D = [-1, 1];\\
f(x) &= \arccos(x + 5) && \Longrightarrow \quad D = [-6, -4];\\
f(x) &= \arcsin(x - 3) && \Longrightarrow \quad D = [2, 4];\\
f(x) &= \mathrm{arctg} x && \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

(2) **Nule funkcije** (presek sa $x$-osom) **i presek sa $y$-osom**

- Nule funkcije su tačke u kojima grafik funkcije preseca $x$-osu. Dobijaju se rešavanjem jednačine $y = 0$, tj. $f(x) = 0$.
- Presek sa $y$-osom je tačka u kojoj grafik funkcije preseca $y$-osu. Dobija se tako što se uzima da je $x = 0$ i pronalazi vrednost za $y$.

**Primer:** Za funkciju $f(x) = x^2 + x - 6$ odrediti nule i presek sa $y$-osom.

- za $y = 0$ je $x^2 + x - 6 = 0$, što je tačno za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$. Dakle, nule funkcije su tačke $N_1(-3, 0)$ i $N_2(2, 0)$;
- za $x = 0$ je $f(0) = -6$. Dakle, presek sa $y$-osom je tačka $M(0, -6)$.

(3) **Znak funkcije**

Znak funkcije govori za koje vrednosti $x$ će funkcija biti pozitivna (iznad $x$-ose), a za koje vrednosti $x$ će funkcija biti negativna (ispod $x$-ose). Dobija se rešavanjem nejednakosti $f(x) > 0$ (ili $f(x) < 0$).

**Primer:** Ispitati znak funkcije $f(x) = x^2 + x - 6$.

Kako je $x^2 + x - 6 = 0$ za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$, to se može zaključiti da je $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-3, 2)$.

(4) **Parnost - neparnost funkcije**

Ako je domen funkcije simetričan u odnosu na nulu onda je:

- funkcija parna ako važi da je $f(-x) = f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na $y$-osu,
- funkcija neparna ako važi da je $f(-x) = -f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Najčešće funkcija nije ni parna ni neparna i tada kažemo da je “ni-ni” .

**Primer:** Funkcija $f(x) = x^2$ je parna jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na $y$-osu. Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna jer je $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

(5) **Asimptote funkcije**

- **Vertikalna**

  Vertikalna asimptota može da postoji samo u tačkama preki- da funkcije. Neka je $x = a$ tačka prekida funkcije.
  - Ako je $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, kažemo da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa leve strane.
  - Ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, kažemo da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa desne strane.

  Prava $x = a$ je vertikalna asimptota ako je ona vertikalna asimptota i sa leve i sa desne strane.
- **Horizontalna**

  Neka domen funkcije nije ograničen. Horizontalna asimptota je prava $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ ako je

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

  Horizontalne asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \longrightarrow \infty$, odnosno kad $x \longrightarrow -\infty$ i može postojati horizontalna asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.
- **Kosa**

  Neka domen funkcije nije ograničen. Kosa asimptota je prava

  $$y = kx + n, \quad k, n \in \mathbb{R},$$

  ako postoje granične vrednosti

  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx\right), \quad k \neq 0 \quad \text{ili}$$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right), \quad k\neq 0.$$

Kose asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x\longrightarrow\infty$, odnosno kad $x\longrightarrow-\infty$ i može postojati kosa asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

Postojanje horizontalne asimptote u $\infty$ isključuje postojanje kose asimptote u $\infty$ i obrnuto. Isto važi i u $-\infty$.

**Primer:** Ispitati asimptote sledećih funkcija:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ili drugaćije zapisano $D=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}=-\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=+\infty,$$

pa je prava $x=1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

pa je prava $y=1$ horizontalna asimptota date funkcije i u $\infty$ i u $-\infty$.

Kose asimptote ne postoje jer postoji horizontalna asimptota i u $\infty$ i u $-\infty$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ili drugačije zapisano $D=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{x-1}=\infty,$$

pa je prava $x=1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty,$$

pa data funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota: $y=kx+n$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1,$$

$$\begin{aligned} n&=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)\\ &=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=1.\end{aligned}$$

Dakle, prava $y=x+1$ je kosa asimptota date funkcije i u $\infty$ i u $-\infty$.

## (6) Monotonost i ekstremne vrednosti

Neka je funkcija $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ neprekidna i diferencijabilna na intervalu $(a,b)$. Tada je:

- funkcija $f$ monotono rastuća na intervalu $(a,b)$ ako i samo ako je $f'(x)>0$ za sve $x\in(a,b)$;
- funkcija $f$ monotono opadajuća na intervalu $(a,b)$ ako i samo ako je $f'(x)<0$ za sve $x\in(a,b)$.

Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x)$ u nekoj tački $x_0$ ima ekstremnu vrednost (lokalni minimum ili maksimum) je da u toj tački važi $f'(x_0)=0$. Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f'(x_0)=0$, to još uvek ne znači da u tački $x_0$ funkcija ima ekstremnu vrednost. Dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti u tački $x_0$ je da prvi izvod funkcije u tački $x_0$ menja znak. Ako funkcija $f(x)$ levo od $x_0$ opada, a desno od $x_0$ raste, onda ona u tački $x_0$ ima lokalni minimum. Ako funkcija $f(x)$ levo od $x_0$ raste, a desno od $x_0$ opada, onda ona u tački $x_0$ ima lokalni maksimum.

Tačka $x_0$ za koju važi da je $f'(x_0)=0$ naziva se stacionarna tačka.

**Primer:** Ispitati monotonost i ekstremne vrednosti sledećih fun- kcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$.

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ stacionarna tačka.

Dakle, ako postoji ekstremna vrednost funkcije $f(x) = x^2$ ona mora biti u tački $O(0,0)$.

Kako je $f'(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija opada, a kako je $f'(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija raste. To znači da prvi izvod funkcije $f(x) = x^2$ menja znak u okolini tačke $O(0,0)$ pa je ta tačka lokalna ekstremna vrednost. Kako funkcija levo od tačke $O(0,0)$ opada, a desno od te tačke raste, to znači da je tačka $O(0,0)$ lokalni minimum funkcije $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$.

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ stacionarna tačka.

Kako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to funkcija $f(x)$ stalno raste pa nema ekstremnih vrednosti.

## (7) Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

Neka funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ima drugi izvod u svakoj tački intervala $(a, b)$. Tada je:

- funkcija $f$ konveksna ("smeje se", $\smile$) na $(a, b)$ ako i samo ako je $f''(x) > 0$, za svako $x \in (a, b)$;
- funkcija $f$ konkavna ("tužna je", $\frown$) na $(a, b)$ ako i samo ako je $f''(x) < 0$, za svako $x \in (a, b)$.

Tačka u kojoj funkcija prelazi iz konveksnosti u konveksnost i obrnuto naziva se prevojna tačka.

Potreban uslov da dva puta diferencijabilna funkcija ima prevoj u nekoj tački $x_0$ je da je $f''(x_0) = 0$. Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f''(x_0) = 0$, to ne znači da funkcija $f(x)$ u tački $x_0$ ima prevoj. Dovoljan uslov za postojanje prevojnih tačaka je da drugi izvod u posmatranoj tački menja znak.

**Primer:** Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$, funkcija je konkavna ($\frown$), a kako je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija je konveksna ($\smile$). To znači da drugi izvod funkcije $f(x) = x^3$ menja znak u okolini tačke $O(0,0)$, što znači da je tačka $O\,(0,0)$ prevojna tačka.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 \Longrightarrow f''(x) = 12x^2$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to je funkcija $f(x)$ stalno konveksna ($\smile$) pa nema prevojne tačke.

## (8) Grafik funkcije

Na osnovu prethodnih tačaka može se nacrtati grafik funkcije.