Ispitivanje funkcija

March 28, 2022

Kada se kaže da treba detaljno ispitati funkciju $y = f(x)$ to znači da treba ispitati sledeće njene osobine:

1. **Oblast definisanosti - domen**

   Domen predstavlja skup svih vrednosti nezavisne promenljive x za koje je funkcija $y = f(x)$ definisana.
   Označava se sa D.
   Domeni nekih funkcija mogu se odrediti na osnovu sledećih pravila:

   - funkcija $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ je definisana kada su definisane funkcije $h(x)$ i $g(x)$ i kada je $g(x) \neq 0$;
   - funkcija $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) \geq 0$;

- funkcija $f(x) = \sqrt[2n+1]{g(x)}$, gde je $n \in \mathbb{N}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcija $f(x) = \ln(g(x))$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je $g(x) > 0$;
- funkcija $f(x) = e^{g(x)}$ je definisana kada je definisana funkcija $g(x)$;
- funkcije $f(x) = \arcsin(g(x))$ i $f(x) = \arccos(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$ i kada je

  $-1 \leq g(x) \leq 1$;
- funkcije $f(x) = \mathrm{arctg}(g(x))$ i $f(x) = \mathrm{arcctg}(g(x))$ su definisane kada je definisana funkcija $g(x)$.

Primer:

$$f(x) = x^3 + x + 1 \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x - 3} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\};$$

$$f(x) = \frac{e^x - 5x}{(x-2)(x+7)} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\};$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Longrightarrow \quad D = [0, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt{x - 5} \quad \Longrightarrow \quad D = [5, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \quad \Longrightarrow \quad D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty);$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R};$$

$$f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad D = (0, \infty);$$

$$f(x) = \ln(x + 4) \quad \Longrightarrow \quad D = (-4, \infty);$$

$$f(x) = \ln\Big((x-3)(x+5)\Big) \quad \Longrightarrow \quad D = (-\infty, -5) \cup (3, \infty);$$

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad D = \mathbb{R}.$$

2. **Nule funkcije** (presek sa x-osom) **i presek sa y-osom**

- Nule funkcije su tačke u kojima grafik funkcije preseca x-osu. Dobijaju se rešavanjem jednačine $y = 0$, tj. $f(x) = 0$.
- Presek sa y-osom je tačka u kojoj grafik funkcije preseca y-osu. Dobija se tako što se uzima da je $x = 0$ i pronalazi vrednost za y.

Primer: Za funkciju $f(x) = x^2 + x - 6$ odrediti nule i presek sa y-osom.

- za $y = 0$ je $x^2 + x - 6 = 0$, što je tačno za $x_1 = -3 \text{ i } x_2 = 2$. Dakle, nule funkcije su tačke $N_1(-3, 0)$ i $N_2(2, 0)$;
- za $x = 0$ je $f(0) = -6$. Dakle, presek sa y-osom je tačka $M(0, -6)$.

3. Znak funkcije

Znak funkcije govori za koje vrednosti x će funkcija biti pozitivna (iznad x-ose), a za koje vrednosti x će funkcija biti negativna (ispod x-ose).

Dobija se rešavanjem nejednakosti $f(x) > 0$ (ili $f(x) < 0$).

Primer: Ispitati znak funkcije $f(x) = x^2 + x - 6$.

Kako je $x^2 + x - 6 = 0$ za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$, to se može zaključiti da je $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-3, 2)$.

4. **Parnost - neparnost funkcije**

Ako je domen funkcije simetričan u odnosu na nulu onda je:

- funkcija parna ako važi da je $f(-x) = f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na y-osu,
- funkcija neparna ako važi da je $f(-x) = -f(x)$ i tada je grafik funkcije simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Najčešće funkcija nije ni parna ni neparna i tada kažemo da je "ni-ni" .

Primer: Funkcija $f(x) = x^2$ je parna jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na y-osu.

Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna jer je $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ i njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

5. Asimptote funkcije

- **Vertikalna**

  Vertikalna asimptota može da postoji samo u tačkama prekida funkcije.

  Neka je $x = a$ tačka prekida funkcije.

  - Ako je $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, kaže se da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa leve strane.
  - Ako je $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$, kaže se da je prava $x = a$ vertikalna asimptota sa desne strane.

  Prava $x = a$ je vertikalna asimptota ako je ona vertikalna asimptota i sa leve i sa desne strane.

- **Horizontalna**

  Neka domen funkcije nije ograničen.

  Horizontalna asimptota je prava $y = b$, $b \in \mathbb{R}$ ako je

  $$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

  Horizontalne asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \longrightarrow \infty$, odnosno kad $x \longrightarrow -\infty$ i može postojati horizontalna asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

- **Kosa**

  Neka domen funkcije nije ograničen.

  Kosa asimptota je prava

  $$y = kx + n, \quad k, n \in \mathbb{R},$$

  ako postoje granične vrednosti

  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right), \quad k \neq 0 \quad \text{ili}$$

  $$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx \right), \quad k \neq 0.$$

  Kose asimptote funkcije ne moraju biti iste kad $x \longrightarrow \infty$, odnosno kad $x \longrightarrow -\infty$ i može postojati kosa asimptota samo u jednoj od tih vrednosti.

  Postojanje horizontalne asimptote u ∞ isključuje postojanje kose asimptote u ∞ i obrnuto. Isto važi i u $-\infty$.

Primer: Ispitati asimptote sledećih funkcija:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ili drugaćije zapisano $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty,$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

pa je prava $y = 1$ horizontalna asimptota date funkcije i u ∞ i u $-\infty$.

Kose asimptote ne postoje jer postoji horizontalna asimptota i u ∞ i u $-\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ili drugačije zapisano $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Vertikalna asimptota:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty,$$

pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota date funkcije.

Horizontalna asimptota:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

pa data funkcija nema horizontalnu asimptotu.

Kosa asimptota: $y = kx + n$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, prava $y = x + 1$ je kosa asimptota date funkcije i u ∞ i u $-\infty$.

6. Monotonost i ekstremne vrednosti

Neka je funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna i diferencijabilna na intervalu (a, b). Tada je:

- funkcija f monotono rastuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$;
- funkcija f monotono opadajuća na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$.

Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x)$ u nekoj tački x_0 ima ekstremnu vrednost (lokalni minimum ili maksimum) je da u toj tački važi $f'(x_0) = 0$.

Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f'(x_0) = 0$, to još uvek ne znači da u tački x_0 funkcija ima ekstremnu vrednost.

Dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti u tački x_0 je da prvi izvod funkcije u tački x_0 menja znak.

Ako funkcija $f(x)$ levo od x_0 opada, a desno od x_0 raste, onda ona u tački x_0 ima lokalni minimum.

Ako funkcija $f(x)$ levo od x_0 raste, a desno od x_0 opada, onda ona u tački x_0 ima lokalni maksimum.

Tačka x_0 za koju važi da je $f'(x_0) = 0$ naziva se stacionarna tačka.

Primer: Ispitati monotonost i ekstremne vrednosti sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$.

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ stacionarna tačka.

Dakle, ako postoji ekstremna vrednost funkcije $f(x) = x^2$ ona mora biti u tački $O(0,0)$.

Kako je $f'(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkcija opada, a kako je $f'(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija raste.

To znači da prvi izvod funkcije $f(x) = x^2$ menja znak u okolini tačke $O(0,0)$ pa je ta tačka lokalna ekstremna vrednost.

Kako funkcija levo od tačke $O(0,0)$ opada, a desno od te tačke raste, to znači da je tačka $O(0,0)$ lokalni minimum funkcije $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$.

$f'(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0, 0)$ stacionarna tačka.

Kako je $f'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to funkcija $f(x)$ stalno raste pa nema ekstremnih vrednosti.

7. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

Neka funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ima drugi izvod u svakoj tački intervala (a, b). Tada je:

- funkcija f konveksna ("smeje se", $\smile$) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$, za svako $x \in (a, b)$;
- funkcija f konkavna ("tužna je", $\frown$) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) < 0$, za svako $x \in (a, b)$.

Tačka u kojoj funkcija prelazi iz konveksnosti u konveksnost i obrnuto naziva se prevojna tačka.

Potreban uslov da dva puta diferencijabilna funkcija ima prevoj u nekoj tački x_0 je da je $f''(x_0) = 0$.

Ovaj uslov nije i dovoljan, tj. ako je $f''(x_0) = 0$, to ne znači da funkcija $f(x)$ u tački x_0 ima prevoj.

Dovoljan uslov za postojanje prevojnih tačaka je da drugi izvod u posmatranoj tački menja znak.

Primer: Ispitati konveksnost, konkavnost i prevojne tačke sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) < 0$ za $x < 0$, na intervalu $(-\infty, 0)$, funkcija je konkavna $(\frown)$, a kako je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, na intervalu $(0, \infty)$ funkcija je konveksna $(\smile)$.

To znači da drugi izvod funkcije $f(x) = x^3$ menja znak u okolini tačke $O(0,0)$, što znači da je tačka $O\,(0,0)$ prevojna tačka.

b) $f(x) = x^3$, $D = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^4 \implies f'(x) = 4x^3 \implies f''(x) = 12x^2$.

$f''(x) = 0$ za $x = 0$ pa je tačka $O(0,0)$ moguća prevojna tačka.

Kako je $f''(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to je funkcija $f(x)$ stalno konveksna $(\smile)$ pa nema prevojne tačke.

8. **Grafik funkcije**
   Na osnovu prethodnih tačaka može se nacrtati grafik funkcije.