Funkcije - granična vrednost

March 9, 2022

Tačka $x_0 \in \mathbb{R}$ je **tačka nagomilavanja skupa** $X \subseteq \mathbb{R}$ akko svaka okolina tačke x_0 sadrži bar jedan elemenat skupa $X \setminus \{x_0\}$, tj. akko za svako $\varepsilon > 0$ važi $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Tačka $a \in \mathbb{R}$ je **granična vrednost funkcije** $f : X \to \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 tačka nagomilavanja domena X, akko za svaku ϵ-okolinu tačke a postoji δ-okolina tačke x_0, koja zavisi od ϵ, takva da se sve tačke iz δ-okoline tačke x_0 bez x_0, preslikavaju u ϵ-okolinu tačke a, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)\big(\forall x \in X \setminus \{x_0\}\big)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon),$$

što se označava sa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Tačka $l \in \mathbb{R}$ je **leva granična vrednost funkcije** $f : X \to \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa $X \cap \{x \in \mathbb{R} | x < x_0\}$, akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)\big(\forall x \in X\big)\big(x \in (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\big),$$

što se označava sa

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Tačka $d \in \mathbb{R}$ je **desna granična vrednost funkcije** $f : X \to \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa $X \cap \{x \in \mathbb{R} | x > x_0\}$, akko

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)\big(\forall x \in X\big)\big(x \in (x_0, x_0 + \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon\big),$$

što se označava sa

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = d.$$

Ako postoje leva granična vrednost $l \in \mathbb{R}$ i desna granična vrednost $d \in \mathbb{R}$ funkcije $f : X \to \mathbb{R}$ u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$ i tačka x_0 je tačka nagomilavanja skupa X i ako su one jednake, tj. $l = d = a$, tada je a granična vrednost funkcije f u tački x_0, odnosno

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Prethodne definicije se mogu proširiti i za slučajeve kada x_0 i/ili a teže a $\pm\infty$.

Neka je x_0 tačka nagomilavanja zajedničkog domena $X \subseteq \mathbb{R}$ funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ i $g : X \to \mathbb{R}$. Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, gde je x_0 realan broj, ∞ ili $-\infty$ i c konstanta, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada važi:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(cf(x)\Big) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)\Big) = ca,$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \pm b,$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b,$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$, gde je $b \neq 0$ i za svako $x \in X$ je $g(x) \neq 0$.

Neka su date funkcije $f : Y \longrightarrow Z$ i $g : X \longrightarrow Y$, gde $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $\lim_{x \to x_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$ i funkcija f je neprekidna u tački a(biće rađeno kasnije), tada je

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(a),$$

pri čemu x_0 može biti i $\pm\infty$.

Važne granične vrednosti kod funkcija su:

- $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ \infty, & \alpha < 0 \end{cases},$$
- $$\lim_{x\to\infty} q^x = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1) \\ \infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{ne postoji}, & q \leq -1 \end{cases},$$
- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
- $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$
- $$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$