

MATEMATIKA 1
ZADACI ZA VEŽBU

1. Kompleksni brojevi

1. Izračunati: $8\left(\frac{2-3i}{5-i}\right)^5 - 1$.
2. Odrediti kompleksan broj z ako je $Im\left(\frac{z-4i}{2-i}\right) = -1$ i $Re(z^2) = 0$.
3. Odrediti kompleksan broj z , ako se zna da je $Re\left\{\frac{z+3i}{z}\right\} = 1$ i $Im\left\{\frac{5+\bar{z}}{2i}\right\} = 1$.
4. Izračunati: a) $\sqrt{i^{2004} - 2}$, b) $\frac{(1+i)^{100}}{2+i}$, c) $\sqrt{-7+24i}$.
5. Izračunati $\sqrt{-\frac{1}{2}i\frac{(1-i)^3}{1+i}}$ a zatim rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.
6. Rešiti jednačinu $\frac{z+3}{3z-1} = -i$.
7. Rešiti jednačinu $z^3 + 27 = 0$.
8. Rešiti jednačinu $\frac{zi+1}{2+i} + \bar{z}i = \frac{11}{5} - i\frac{18}{5}$.
9. (a) Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava uslov $z - 2Re\left(\frac{z+1}{1-i}\right) + Im\left(\frac{\bar{z}-2z}{i}\right) = 2i$.
(b) Izračunati $\sqrt[4]{-81}$ u algebarskom obliku.
10. Dat je kompleksan broj $z = e^{\frac{\pi}{8}i}$.
(a) Odrediti kompleksan broj $\omega = \frac{\sqrt{2}z^4(\sqrt{2} - (\bar{z})^2)}{z^8 - i}$.
(b) Naći $\sqrt[3]{-8z^4}$ u algebarskom obliku.
11. Naći kompleksni broj z iz uslova $\frac{zi+1}{2+i} + \bar{z}i = \frac{11}{5} - i\frac{18}{5}$.
12. Rešiti jednačinu $z^3 + 8i = 0$, rešenja predstaviti u algebarskom obliku, i prikazati ih u kompleksnoj ravni.
13. Rešiti jednačinu $(\bar{z} - i)^3 = i$ po z , i rešenja predstaviti u kompleksnoj ravni.
14. Naći kompleksne brojeve z_1 i z_2 u algebarskom obliku, ako je $z_1 = (1-i)^7$, a $z_2 = \frac{(1-i) + \overline{(1-i)}}{1 - (1-i)(1+i)}$.
15. Ako su z_1 i z_2 dva temena jednakostranice trougla, naći treće teme koje se nalazi u drugom kvadrantu.

2. Polinomi i racionalne funkcije

1. (a) Napisati normiran polinom $p(x)$ najmanjeg stepena za koji važi da su 0, 3 i $2i$ njegovi jednostruki koreni.
(b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 7x}{P(x)}$.
2.
(a) Ako je $x_1 = 1$ jedan koren polinom $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, odrediti preostala dva korena polinoma $p(x)$, a i b .
(b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju: $r(x) = \frac{x-3}{p(x)}$.
3. Dat je polinom $p(x) = 3x^6 + 19x^5 + 51x^4 + 75x^3 + 62x^2 + 26x + 4$.
(a) Naći sve nule polinoma $p(x)$.
(b) Faktorizirati polinom $p(x)$ nad poljima \mathbb{R} i \mathbb{C} .
(c) Napisati polinom $p(x)$ po stepenima od $x+1$.
4. Odrediti koeficijente a i b tako da polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$ pri deljenju sa $x^2 + 3$ daje ostatak 5.

5. (a) Napisati normiran polinom $p(x)$ najmanjeg stepena za koji važi da su 0 , 3 i $2i$ njegovi jednostruki koreni.
 (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 7x}{P(x)}$.
- 6.
- (a) Naći sve realne nule polinoma $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
- (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $q(x) = \frac{x^2 - x + 1}{p(x)}$.
7. Dat je polinom $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.
- (a) Odrediti sve njegove nule i faktorizirati ga nad skupom realnih brojeva.
 (b) Napisati polinom $p(x)$ po stepenima od $x + 2$.
 (c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x-1}{p(x)}$.
- 8.
- (a) Odrediti realne parametre a , b i c tako da polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ bude deljiv sa $x + i$, a da pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2 .
 (b) Faktorizirati polinom $p(x)$ nad skupom realnih i nad skupom kompleksnih brojeva.
 (c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $q(x) = \frac{1}{p(x)}$.
- 9.
- (a) Odrediti normiran polinom $p(x)$ četvrtog stepena koji ima dvostruku nulu -2 i jednostruku nulu $1 - 2i$.
 (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x^2 + 5x + 32}{p(x)}$.
10. Odrediti realne parametre a i b tako da -1 i 2 budu koreni polinoma $p(x) = x^4 + (a + 1)x^3 - 9x^2 + bx + 12$, a zatim za te vrednosti a i b faktorizirati polinom $p(x)$ nad poljima \mathbb{R} i \mathbb{C} i rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x+3}{p(x)}$.
11. (a) Odrediti sve nule polinoma $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ i faktorizirati ga nad \mathbb{R} i \mathbb{C} .
 (b) Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{4x + 5}{x^2(x - 5)}$.
- 12.
- (a) Napisati normirani polinom $p(x)$ četvrtog stepena ako se zna da je $x_1 = -1$ njegov dvostruki koren, i da je $x_2 = -i$ njegov koren.
 (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju

$$r(x) = \frac{p(x)}{x^3(x^2 + 1)^2(x + 1)}.$$

13. Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju:

(a) $r(x) = \frac{4x^3 + 9x^2 + 4x + 19}{(x + 1)^2(x^2 - 4x + 5)}$;

(b) $r(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 4}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)}$;

(c) $r(x) = \frac{x - 2}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x}$.