

MATEMATIKA 1
ZADACI ZA VEŽBU

1. Kompleksni brojevi

1. Izračunati: a) $\sqrt{i^{2004} - 2}$, b) $\frac{(1+i)^{100}}{2+i}$, c) $\sqrt{-7+24i}$.
2. Rešiti jednačinu $\frac{z+3}{3z-1} = -i$.
3. Rešiti jednačinu $z^3 + 27 = 0$.
4. Rešiti jednačinu $\frac{zi+1}{2+i} + \bar{z}i = \frac{11}{5} - i\frac{18}{5}$.
5. (a) Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava uslov $z - 2\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{1-i}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}-2z}{i}\right) = 2i$.
(b) Izračunati $\sqrt[4]{-81}$ u algebarskom obliku.
6. Dat je kompleksan broj $z = e^{\frac{\pi}{8}i}$.
(a) Odrediti kompleksan broj $\omega = \frac{\sqrt{2}z^4(\sqrt{2} - (\bar{z})^2)}{z^8 - i}$.
(b) Naći $\sqrt[3]{-8z^4}$ u algebarskom obliku.
7. Naći kompleksni broj z iz uslova $\frac{zi+1}{2+i} + \bar{z}i = \frac{11}{5} - i\frac{18}{5}$.
8. Rešiti jednačinu $z^3 + 8i = 0$, rešenja predstaviti u algebarskom obliku, i prikazati ih u kompleksnoj ravni.

2. Polinomi i racionalne funkcije

1. Dat je polinom $p(x) = 3x^6 + 19x^5 + 51x^4 + 75x^3 + 62x^2 + 26x + 4$.
(a) Naći sve nule polinoma $p(x)$.
(b) Faktorizirati polinom $p(x)$ nad poljima \mathbb{R} i \mathbb{C} .
(c) Napisati polinom $p(x)$ po stepenima od $x+1$.
2. Odrediti koeficijente a i b tako da polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$ pri deljenju sa $x^2 + 3$ daje ostatak 5.
3. (a) Napisati normiran polinom $p(x)$ najmanjeg stepena za koji važi da su 0, 3 i $2i$ njegovi jednostruki koreni.
(b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 7x}{P(x)}$.
4.
(a) Naći sve realne nule polinoma $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
(b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $q(x) = \frac{x^2 - x + 1}{p(x)}$.
5. Dat je polinom $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.
(a) Odrediti sve njegove nule i faktorizirati ga nad skupom realnih brojeva.
(b) Napisati polinom $p(x)$ po stepenima od $x+2$.
(c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x-1}{p(x)}$.
6.
(a) Odrediti realne parametre a, b i c tako da polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ bude deljiv sa $x+i$, a da pri deljenju sa $x-1$ daje ostatak 2 .
(b) Faktorizirati polinom $p(x)$ nad skupom realnih i nad skupom kompleksnih brojeva.
(c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $q(x) = \frac{1}{p(x)}$.
7.
(a) Odrediti normiran polinom $p(x)$ četvrtog stepena koji ima dvostruku nulu -2 i jednostruku nulu $1-2i$.

(b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x^2+5x+32}{p(x)}$.

8. Odrediti realne parametre a i b tako da -1 i 2 budu koreni polinoma $p(x) = x^4 + (a+1)x^3 - 9x^2 + bx + 12$, a zatim za te vrednosti a i b faktorizirati polinom $p(x)$ nad poljima \mathbb{R} i \mathbb{C} i rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x+3}{p(x)}$.

9. (a) Odrediti sve nule polinoma $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ i faktorizirati ga nad \mathbb{R} i \mathbb{C} .

(b) Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{4x+5}{x^2(x-5)}$.

10. Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju:

(a) $r(x) = \frac{4x^3 + 9x^2 + 4x + 19}{(x+1)^2(x^2 - 4x + 5)}$;

(b) $r(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 4}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$;

(c) $r(x) = \frac{x-2}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x}$.