# ZADACI ZA VEŽBU

March 13, 2016

## GRANIČNE VREDNOSTI FUNKCIJA I IZVODI

1. **Naći sledeće limese:**

   (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ ;

   (b) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$ ;

   (c) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right)$ ;

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{3}}{sinx}$ ;

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$ ;

   (f) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ ;

   (g) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1}$ .

   *Rešenje:*

   (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}$ ;

   (b) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-6}{3+\frac{1}{x}} = -2$ ;

   (c) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4-12}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$ $\lim_{x\to 2} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \quad = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ;

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{sin\frac{x}{3}}{sinx} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sin\frac{x}{3}}{3\frac{x}{3}}}{\frac{sinx}{x}} = \frac{\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}}{\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}} = \frac{1}{3}$ ;

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(sin\frac{x}{2})^2}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{4}$ ;

   (f) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\frac{2x}{x-1}} =$ $e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=}$
   $= e^2$ ;

(g) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2(x+1)}\right)^{2(x+1)\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ .

2. **Naći asimptote sledećih krivih:**

(a) $y = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2}$ ;

(b) $y = \sqrt{x^2+x}$ ;

(c) $y = \frac{xe^x}{e^x-1}$ .

*Rešenje:*

(a)

i. Vertikalne asimptote:
Kako je oblast definisanosti za $y = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2}$ , $x \in R \setminus \{0\}$ to je:
$\lim_{x\to 0+} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2} = +\infty$ ;
$\lim_{x\to 0-} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2} = -\infty$ .
Dakle, $x = 0$ je vertikalna asimptota .

A. Horizontalne asimptote:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2} = +\infty$ ;
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2} = -\infty$ .
Dakle, nema horizontalnih asimptota.

B. Kose asimptote:
$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3} = 1$ ;
$n = \lim_{x\to+\infty}(y-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} =$
$= 1$ ;
$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3} = 1$ ;
$n = \lim_{x\to-\infty}(y-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} =$
$= 1$ ;
Dakle, kosa asimptota je $y = x + 1$ .

(b)

i. Vertikalne asimptote:
Kako je oblast definisanosti za $y = \sqrt{x^2+x}$ , $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ to je:
$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x^2+x} = 0$ ;
$\lim_{x\to -1-} \sqrt{x^2+x} = 0$ .
Dakle, nema vertikalnih asimptota .

A. Horizontalne asimptote:
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ ;
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} =$
$-\infty$ .
Dakle, nema horizontalnih asimptota.

B. Kose asimptote:
$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1$
;
$n=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=$
$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+1}}=\frac{1}{2}$ ;
$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x}}=$
$-1$ ;
$n=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}=$
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}-1}}=1$ ;
Dakle, kose asimptotesu $y=x+\frac{1}{2}$ i $y=-x-\frac{1}{2}$ .

(c)

i. Vertikalne asimptote:
Kako je oblast definisanosti za $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$ , $x\in R\setminus\{0\}$ to je:
$\lim_{x\to0+}\frac{xe^x}{e^x-1}\lim_{x\to0+}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=1$ ;
$\lim_{x\to0-}\frac{xe^x}{e^x-1}\lim_{x\to0-}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=1$ .
Dakle, nema vertikalnih asimptota .

A. Horizontalne asimptote:
$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$
;
$\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-2x}}=0$ .
Dakle, $y=0$ je horizontalna asimptota.

B. Kose asimptote:
$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$ ;
$n=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=$
$0$ ;
Dakle, kosa asimptota je $y=x$ .

3. **Naći izvode sledećih funkcija:**

(a) $y=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+4x-\sqrt{10}$ ;

(b) $y=\frac{x}{1-x^2}$ ;

(c) $y=\left(x^2-2\right)\sqrt{x}$ ;

(d) $y=\frac{sin^2x}{cosx}$ ;

(e) $y=\frac{1-lnx}{1+lnx}$ ;

(f) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ;

(g) $y=ln\left(e^{2x}+1\right)-2arctg\left(e^x\right)$ .

*Rešenje:*

(a) $y' = x^4 - 2x^2 + 4$ ;

(b) $y' = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ ;

(c) $y' = 2x\sqrt{x} + (x^2-2)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2-2}{2\sqrt{x}}$ ;

(d) $y' = \frac{2sinxcosx+sin^3x}{cos^2x} = 2tgx + sinxtg^2x$ ;

(e) $y' = \frac{-\frac{1}{x}(1+lnx)-\frac{1}{x}(1-lnx)}{(1+lnx)^2} = -\frac{2}{x}\frac{1}{(1+lnx)^2}$ ;

(f) $y = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)2} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ ;

(g) $y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 2\frac{1}{1+e^{2x}} = \frac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1}$ .

4. **Odrediti sledeće granične vrednosti:**

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{ln(x+1)}$ ;

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x^{10}}$ ;

(c) $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ ;

(d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ ;

(e) $\lim_{x\to 0} x^x$ ;

(f) $\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$ ;

(g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x$ .

*Rešenje:*

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{ln(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0}(x+1)e^x = 1$ ;

(b) $\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x^{10}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{10x^9} = 10\lim_{x\to\infty} x^{10} = \infty$ ;

(c) $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} =$
$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ ;

(d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} =$
$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \frac{1}{2}$ ;

(e) $\lim_{x\to 0} x^x = A \quad \left[0^0\right]$ ;
$lnA = ln\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} lnx^x = \lim_{x\to 0} xlnx = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} =$
$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ ;
$lnA = 0 \Longrightarrow A = e^0 = 1$ ;

(f) $\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}} = A \quad [1^{\infty}]$ ;
$lnA = ln\lim_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} ln\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}ln\left(e^{2x}+x\right) =$
$= \lim_{x\to 0}\frac{ln\left(e^{2x}+x\right)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}}{1} = 3$ ;
$lnA = 3 \implies A = e^3$ ;

(g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x = A \quad \left[\infty^0\right]$ ;
$lnA = ln\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} ln\left(\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} xln\frac{1}{x} = [0\cdot\infty] =$
$\lim_{x\to 0}\frac{ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$
$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ ;
$lnA = 0 \implies A = e^0 = 1$ .

5. **Odrediti intervale monotonosti funkcija i naći njihov minimum i maksimum ako postoje:**

(a) $y = xe^{\frac{1}{x}}$ ;
(b) $y = x^2 - lnx^2$ .

*Rešenje:*

(a) Funkcija je definisana za $x \in R\setminus\{0\}$ pa imamo:
$y' = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\frac{x-1}{x}$ ;

i. Kako je $e^{\frac{1}{x}} > 0$ za svako $x$ to je:

| | $(-\infty,0)$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $y'$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

A. Za $x = 1$ imamo minimum i to je $y = e$ .

(b) Funkcija je definisana za $x \in R\setminus\{0\}$ pa imamo:
$y' = 2x - \frac{1}{x^2}2x = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{x^2-1}{x}$ ;

i.

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y'$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

A. Za $x = -1$ imamo minimum i to je $y = 1$ , a za $x = 1$ takođe imamo minimum i to je $y = 1$ .

6. **Naći prevojne tačke sledećih krivih:**

(a) $y = 3x^5 - 2x^6$ ;

(b) $y = \frac{x}{x^2+1}$ .

*Rešenje:*

(a) Funkcija je definisana za svako $x \in R$ pa imamo:
$y' = 15x^4 - 12x^5$ ;
$y'' = 60x^3 - 60x^4 = 60x^3(1-x)$ ;

i.

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $1-x$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | $\cap$ | $\cup$ | $\cap$ |

A. Tačke $(0,0)$ i $(1,0)$ su prevojne tačke .

(b) Funkcija je definisana za svako $x \in R$ pa imamo:
$y' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ ;
$y'' = \frac{-2x(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3} = 2x\frac{x^2-3}{(x^2+1)^3}$ ;

i. Kako je $x^2 + 1 > 0$ za svako $x$ to imamo ;

| | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3}, 0)$ | $(0, \sqrt{3})$ | $(\sqrt{3}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-\sqrt{3}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+\sqrt{3}$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | $\cap$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |

A. Tačke $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$ , $(0,0)$ i $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ su prevojne tačke .