# BROJNI NIZ

**Realan brojni niz** ili kraće samo niz je svako preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Niz se označava sa $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ili samo $\{a_n\}$ gde je $f(n) = a_n$ i kaže se da je $a_n$ opšti član niza $\{a_n\}$.

*Primer 1.* Članovi niza čiji je opšti član:

$$
\begin{array}{llllll}
a_n = n^2 & \text{su} \quad a_1 = 1, & a_2 = 4, & a_3 = 9, & a_4 = 16, & \ldots \\
b_n = \dfrac{1}{n} & \text{su} \quad b_1 = 1, & b_2 = \dfrac{1}{2}, & b_3 = \dfrac{1}{3}, & b_4 = \dfrac{1}{4}, & \ldots \\
c_n = 2 & \text{su} \quad c_1 = 2, & c_2 = 2, & c_3 = 2, & c_4 = 2, & \ldots \\
d_n = (-1)^n & \text{su} \quad d_1 = -1, & d_2 = 1, & d_3 = -1, & d_4 = 1, & \ldots
\end{array}
$$

Niz kod kog svi članovi imaju istu vrednost (kao $c_n$ u prethodnom primeru) naziva se **stacionarni niz.**

Ako postoji realan broj $G$ takav da je $a_n \le G$, $\forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa gornje strane** brojem $G$ i broj $G$ se tada naziva **gornje ograničenje niza**.

Ako postoji realan broj $g$ takav da je $g \le a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ kažemo da je niz $\{a_n\}$ **ograničen sa donje strane** brojem $g$ i broj $g$ se tada naziva **donje ograničenje niza**.

Ako postoji i gornje i donje ograničenje niza, kaže se da je niz ograničen.

Očigledno, gornje i donje ograničenje niza nije jedinstveno.

Najmanje gornje ograničenje niza naziva se **supremum** i označava sa $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, a najveće donje ograničenje niza naziva se **infimum** i označava se $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Primer 2. Niz $\{a_n\}$ , $a_n = n^2$ je ograničen sa donje strane. Brojevi $0, -2, \dfrac{1}{2}, 1, \ldots$ predstavljaju njegova donja ograničenja, a $\inf a_n = 1$ jer je $n^2 \ge 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz nije ograničen sa gornje strane.

Niz $\{b_n\}$ , $b_n = \dfrac{1}{n}$ je ograničen (i sa gornje i sa donje strane), a pošto je $0 < \dfrac{1}{n} \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, to je $\sup b_n = 1$, a $\inf b_n = 0$.

Niz $\{c_n\}$ , $c_n = 2$ je takođe ograničen i važi $\sup c_n = \inf c_n = 2$.

Niz $\{d_n\}$ , $d_n = (-1)^n$ je ograničen jer $-1 \le (-1)^n \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pa je $\sup d_n = 1$, a $\inf d_n = -1$.

Za proizvoljan realan broj $a$, otvoren interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$, naziva se **$\varepsilon$-okolina** tačke $a$.

Realan broj $a$ je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ akko se u svakoj $\varepsilon$-okolini broja $a$ nalazi beskonačno mnogo članova tog niza.

*Primer 3.* Za niz $\{b_n\}$ , $b_n = \dfrac{1}{n}$ tačka nagomilavanja je broj 0 jer se u proizvoljnoj $\varepsilon$-okolini tačke 0, tj. u intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza $b_n$.

Za niz $\{c_n\}$ , $c_n = 2$ tačka nagomilavanja je broj 2 jer se svi članovi niza $c_n$ nalaze u bilo kojoj okolini tačke 2.

Za niz $\{a_n\}$ , $a_n = n^2$ ne postoji tačka nagomilavanja jer se njegovi članovi neograničeno povećavaju.

Za niz $\{d_n\}$ , $d_n = (-1)^n$ tačke nagomilavanja su brojevi $\pm 1$ jer se u proizvoljnoj $\varepsilon$-okolini oba broja nalazi beskonačno mnogo članova niza $d_n$.

Realan broj $a$ je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ akko se izvan proizvoljne $\varepsilon$-okoline broja $a$ nalazi najviše konačno mnogo članova niza $\{a_n\}$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Ovo znači da se za svako $\varepsilon > 0$ može pronaći prirodan broj $n_0$ , koji zavisi od $\varepsilon$, takav da se svi članovi niza $\{a_n\}$ čiji je indeks veći od $n_0$ nalaze u $\varepsilon$-okolini tačke $a$.

Ovaj iskaz se označava sa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ili $a_n \longrightarrow a$ kad $n \longrightarrow \infty$ ($a_n$ teži u $a$ kad $n$ teži u $\infty$).

Ako niz $\{a_n\}$ ima graničnu vrednost $a \in \mathbb{R}$ kaže se da je **konvergentan,** tj. da konvergira ili teži ka tački $a$. Ako niz nije konvergentan, on je **divergentan** tj. divergira.

Očigledno je da je granična vrednost niza ujedno i tačka nagomilavanja tog niza, kao i da niz sa više tačaka nagomilavanja nije konvergentan.

Niz $\{a_n\}$ teži u $\infty$, kad $n$ teži u $\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ akko

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Niz $\{a_n\}$ teži u $-\infty$, kad $n$ teži u $\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ akko

$$(\forall M < 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Za niz $\{a_n\}$ koji teži ka $\infty$ ili $-\infty$ kaže se da je divergentan u užem smislu. Dok se za niz koji je divergentan, ali ne u užem smislu kaže da je divergentan u širem smislu.

*Primer 4.* Niz $\{a_n\}$, $a_n = n^2$ nije konvergentan jer nema tačku nagomilavanja.

Niz $\{d_n\}$, $d_n = (-1)^n$ nije konvergentan jer ima dve tačke nagomilavanja.

Niz $\{c_n\}$, $c_n = 2$ je konvergentan i važi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$, jer se u svakoj $\varepsilon$-okolini tačke 2 nalaze svi članovi ovog niza.

Niz $\{b_n\}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ je takođe konvergentan i važi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ jer je $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, što znači da se unutar proizvoljne $\varepsilon$ -okoline tačke 0 nalaze svi članovi niza čiji je indeks veći od $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

**Osnovne osobine konvergentnih nizova:**

- Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tada je $a$ jedina tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}$.
- Konvergentan niz $\{a_n\}$ ima jedinstvenu graničnu vrednost i ta granična vrednost je jednaka tački nagomilavanja tog niza.
- Konvergentan niz je ograničen.
- Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i ima jednu tačku nagomilavanja, tada je on konvergentan i njegova granična vrednost je tačka nagomilavanja.
- Ako su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, tada je $a \leq b$.
- Ako su nizovi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$, za svako $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ i ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
- Ako je niz $\{a_n\}$ ograničen i niz $\{b_n\}$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

**Računske operacije sa graničnim vrednostima:**

Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ i $c$ konstanta, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tada je:

- $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$ ;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, gde je $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$;

Niz $\{a_n\}$ je monotono:

- **nerastući** ako je $a_n \geq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- **neopadajući** ako je $a_n \leq a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- **rastući** ako je $a_n < a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.
- **opadajući** ako je $a_n > a_{n+1}$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je monoton ako ima bilo koju od ovih osobina.
Princip monotonije: svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Teorema: Niz $\{a_n\}$ čiji je opšti član $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$ je konvergentan.

Ideja dokaza: Može se pokazati da je ovaj niz ograničen, tj. da je $2\leq a_n\leq 3$ i da je monotono rastući, pa je po principu monotonije on konvergenta, tj. ima graničnu vrednpst. Ta granična vrednost zove se $e$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Broj $e$ je iracionalan broj. Njegova približna vrednost je $e\approx 2,718281\ldots$ i ona se uzima kao osnova prirodnog logaritma.

Važne osobine:

- Ako niz $\{a_n\}$, $a_n>0$ konvergira ka broju $a>0$, tada je i niz $\{\ln a_n\}$ konvergentan i konvergira ka broju $\ln a$.
- Ako niz $\{a_n\}$ konvergira ka broju $a$, tada je i niz $\{e^{a_n}\}$ konvergentan i konvergira ka broju $e^a$.
- Ako niz $\{a_n\}$, $a_n\geq 0$ konvergira ka broju $a$, tada je i niz $\{\sqrt[k]{a_n}\}$, $k\in\mathbb{N}$, konvergentan i konvergira ka broju $\sqrt[k]{a}$.

Izrazi oblika:

$$"\frac{\infty}{\infty}",\ "\frac{0}{0}",\ "0\cdot\infty",\ "\infty-\infty",\ "0^0",\ "\infty^0",\ "1^\infty",$$

zovu se **neodređeni izrazi**.

Primeri izraza koji nisu neodređeni:

$"\frac{2}{\infty}=0"$, $"\frac{5}{0^+}=\infty"$, $"\frac{5}{0^-}=-\infty"$, $"\frac{0}{\infty}=0"$, $"\frac{\infty}{0^+}=\infty"$,

$"0^\infty=0"$, $"e^\infty=\infty"$, $"e^{-\infty}=0"$, $"\left(\frac{1}{5}\right)^\infty=0"$,

$"\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}=\infty"$, $"\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\infty"$, $"\mathrm{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}"$, $"\mathrm{arctg}\,(-\infty)=-\frac{\pi}{2}"$,

$"\ln 0^+=-\infty"$, $"\ln\infty=\infty"$, $"\infty+\infty=\infty"$, $"\infty\cdot\infty=\infty"$.

Važne granične vrednosti kod nizova su:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\begin{cases}0, & \alpha>0\\ 1, & \alpha=0\\ \infty, & \alpha<0\end{cases}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & q\in(-1,1),\text{ tj. } |q|<1\\ \infty, & q>1\\ 1, & q=1\\ \text{ne postoji}, & q\leq -1\end{cases}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0,$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$
- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\pm\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$

Skala rasta nizova za:

$$\ln n\prec n^a\prec n^b\prec p^n\prec q^n\prec n!\prec n^n,$$

za $0<a<b,\ 1<p<q$.

Oznaka $\prec$ čita se "sporije raste".

Svi nizovi sa opštim članovima navedenim u skali rasta teže u beskonačno kad $n\longrightarrow\infty$, pri čemu najsporije teži ka beskonačno niz sa opštim članom $\ln n$, a najbrže sa opštim članom $n^n$.