SKRIPTE IZ **MATEMATIKE 1** ZA STUDENTE OSNOVNIH STRUKOVNIH STUDIJA SOFTVERSKIH I INFORMACIONIH TEHNOLOGIJA

Maja i Ljubo Nedović

27. oktobar 2014

Sadržaj

Predgovor i napomene

Ove skripte su namenjene studentima osnovnih strukovnih studija na smeru *Softverske i informacione tehnologije* odseka *Računarstvo i automatika* na *Fakultetu tehničkih nauka* u Novom Sadu.

U gradivo *Matematike 1* spadaju sledeće oblasti:

- logika,
- relacije,
- funkcije,
- kombinatorika,
- Bulove algebre,
- grupe,
- prsteni,
- polja,
- polinomi,
- kompleksni brojevi,
- determinante,
- sistemi linearnih jednačina.

Standardne oznake

- $|A|$ - kardinalni broj skupa A.
- $\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$).
- $\mathbb{Z}$ - skup celih brojeva.
- $\mathbb{Q}$ - skup racionalnih brojeva.
- $\mathbb{I}$ - skup iracionalnih brojeva.
- $\mathbb{R}$ - skup realnih brojeva.
- $\mathbb{C}$ - skup kompleksnih brojeva.
- $\mathbb{Q}^+$ - skup pozitivnih racionalnih brojeva.
- $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ - skup pozitivnih realnih brojeva.
- $\mathbb{i}$ - imaginarna jedinica.
- $\mathcal{D}_J$ - domen rešavanja jednačine J.
- $\mathcal{R}_J$ - skup rešenja jednačine J.
- D_n - skup delitelja broja n.
- $F[x]$ - skup svih polinoma sa koeficijentima iz polja (ili prstena) F.
- f^{-1} - inverzna funkcija funkcije f.
- $\mathcal{D}(f)$ - domen funkcije f.
- $\mathcal{K}(f)$ - kodomen funkcije f.
- i_A - identička funkcija skupa A.
- $t_{\vec{a}}$ - translacija za vektor $\vec{a}$.
- $\rho_{T,\alpha}$ - rotacija oko tačke T za ugao α.
- $h_{T,k}$ - homotetija u odnosu na tačku T, za koeficijent k.
- σ_T - centralna simetrija u odnosu na tačku T.
- σ_p - osna simetrija u odnosu na pravu p.
- σ_α - ravanska simetrija u odnosu na ravan α.
- pr_p - projekcija na pravu p.
- pr_α - projekcija na ravan α.

- $\mathsf{K}(C,r)$ - kružnica sa centrom u tački C, poluprečnika r.
- $\mathcal{K}(C,r)$ - krug sa centrom u tački C, poluprečnika r.
- $V_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ - broj varijacija bez ponavljanja od n elemenata klase $k \leq n$.
- $\overline{V}_k^n = n^k$ - broj varijacija sa ponavljanjem od n elemenata klase k.
- $P_n = V_n^n = n!$ - broj permutacija od n elemenata.
- $C_k^n = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - broj kombinacija bez ponavljanja od n elemenata klase $k \leq n$.
- $\overline{C}_k^n = C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$ - broj kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase k.
- $\det(A)$ - determinanta kvadratne matrice A.

Glava 1

Logika, skupovi i relacije

Definicije osnovnih logičkih operacija:

Negacija (NOT):

$\rceil$	
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

Konjunkcija (AND):

$\wedge$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$

Disjunkcija (OR):

$\vee$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

Ekskluzivna (isključna) disjunkcija (XOR):

$\veebar$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\perp$

Implikacija (IF):

$\Rightarrow$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$

Ekvivalencija (IFF):

$\Leftrightarrow$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$

Uočimo da je implikacija netačna samo ako je prvi operand (premisa) $\top$ a drugi (zaključak) $\perp$. U svim ostalim slučajevima je implikacija tačna. Na primer, implikacija $1 + 1 = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 4$ je tačna.

Za iskazivanje raznih tvrđenja nam nisu dovoljne samo logičke operacije, već se moramo služiti i ***kvantifikatorima*** $\exists$ (čitamo „postoji”) i $\forall$ (čitamo „svaki”). Na primer, iskazi $\forall x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0$ i $\exists x,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0$ se ne može zapisati bez kvantifikatora, i, kao što vidimo, oni imaju različit smisao, i različite istinitosne vrednosti (prvi od ovih iskaza je netačan, a drugi je tačan).

Ipak, ukoliko ispred iskaza koji sadrži neku promenljivu x ne stoji ni jedan kvantifikator, tada ispred iskaza podrazumevamo $\forall x$. Na primer, ukoliko razmatramo neke osobine skupa realnih brojeva, tada umesto $\forall x,\ x^2 + 1 \neq 0$ skraćeno pišemo $x^2 + 1 \neq 0$, i podrazumevamo da se ovaj iskaz odnosi na svako $x \in \mathbb{R}$.

Tačne iskaze nazivamo još i ***tautologijama***. Na primer, sledeće formule su tautologije, i opisuju neke dobro poznate logičke zakone. U njima su sa p, q i r označene promenljive koje uzimaju vrednosti iz skupa $\{\perp, \top\}$ istinitosnih vrednosti.

① $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

(komutativnost konjunkcije i disjunkcije);

② $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
(distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, i distributivnost disjunkcije prema konjunkciji);

③ $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
(asocijativnost konjunkcije i disjunkcije);

④ $(p \wedge \rceil p) \Leftrightarrow \bot$
$(p \vee \rceil p) \Leftrightarrow \top$
(zakon isključenja trećeg);

⑤ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$
(zakon kontrapozicije);

⑥ $\rceil (p \wedge q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil p)$
$\rceil (p \vee q) \Leftrightarrow (\rceil p \wedge \rceil p)$
(De-Morganovi zakoni);

⑦ $\rceil\rceil p \Leftrightarrow p$
(zakon uklanjanja dvojne negacije);

⑧ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee q)$.

Skupovne operacije i ***relacije*** se definišu pomoću odgovarajućih logičkih operacija:

- ➢ ***unija*** skupova: $A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$,
- ➢ ***presek*** skupova: $A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$,
- ➢ skupovni ***komplement*** (apsolutni): $\overline{A} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \notin A\}$,
- ➢ skupovni ***komplement u odnosu na skup*** E: $\overline{A}^{E} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in E \ \wedge \ x \notin A\}$,
- ➢ ***razlika*** skupova: $A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$,
- ➢ ***simetrična razlika*** skupova: $A \bigtriangleup B \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \veebar \ x \notin B\}$,
- ➤ ***jednakost*** skupova: $A = B$ akko $\forall x,\ x \in A \ \Leftrightarrow \ x \in B$,
- ➤ skupovna ***inkluzija***: $A \subseteq B$ akko $\forall x,\ x \in A \ \Rightarrow \ x \in B$.

☞ Vodimo računa o razlici između „skupovnog komplementa” i „skupovnog komplementa u odnosu na referentni skup E”. Na primer $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$, dok je $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ skup svega što nije racionalan broj (elementi ovog skupa nisu samo brojevi).

✎ Ukoliko podrazumevamo da nam je referentni skup E, tada umesto $\overline{A}^{E}$ skraćeno pišemo $\overline{A}$. Na primer, ako razmatramo neke zakonitosti u skupu realnih brojeva, tada umesto $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$ skraćeno pišemo $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{I}$.

Skupovne operacije i relacije imaju razne dobro poznate osobine. Slede, primera radi, neke od njih.

❶ $A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$
(komutativnost preseka i unije);

❷ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributivnost preseka prema uniji, i distributivnost unije prema preseku);

❸ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(asocijativnost preseka i unije);

❹ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup \overline{A}^{E} = E$ (gde je E univerzalni ili referentni skup);

❺ $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

❻ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(De-Morganovi zakoni za skupove);

❼ $\overline{\overline{A}} = A$;

❽ $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \overline{A} \cup B = E$ (gde je E univerzalni ili referentni skup).

Svaka od ovih skupovnih osobina se može dokazati pozivanjem na odgovarajuću tautologiju. Sledi, primera radi, dokaz osobina ❷ i ❹. U njima je sa E označen univerzalni, odnosno referentni skup.

2. Dokažimo jednakost $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ iz ❷ (distributivnost preseka prema uniji), a analogno se dokazuje i distributivnost unije prema preseku. Koristeći definicije skupovnih operacija i relacija dobijamo

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   akko $\forall x \in E,\ (x \in A \cap (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in (A \cap B) \cup (A \cap C))$
   akko $\forall x \in E,\ (x \in A \wedge x \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \cap B \vee x \in A \cap C)$
   akko $\forall x \in E,\ (x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C))$
   akko $\forall x \in E,\ (p_x \wedge (q_x \vee r_x)) \Leftrightarrow ((p_x \wedge q_x) \vee (p_x \wedge r_x))$,

   gde su sa p_x, q_x i r_x redom označeni iskazi $x \in A$, $x \in B$ i $x \in C$. Kako je formula $(p_x \wedge (q_x \vee r_x)) \Leftrightarrow ((p_x \wedge q_x) \vee (p_x \wedge r_x))$ prva od tautologija iz ②, sledi da je tačna i prva relacija iz ❷.

4. Dokažimo jednakost $A \cap \overline{A} = \emptyset$ iz ❹, a analogno se dokazuje i druga. Koristeći definicije skupovnih operacija i relacija dobijamo

   $A \cap \overline{A} = \emptyset$
   akko $\forall x \in E,\ \left(x \in A \cap \overline{A}\right) \Leftrightarrow x \in \emptyset$

akko $\forall x \in E,\ \left(x \in A \wedge x \in \overline{A}\right) \Leftrightarrow x \in \emptyset$
akko $\forall x \in E,\ (x \in A \wedge (\rceil x \in A)) \Leftrightarrow x \in \emptyset$
akko $\forall x \in E,\ (p_x \wedge (\rceil p_x)) \Leftrightarrow \perp$,

gde je sa p_x označen iskaz $x \in A$. Kako je formula $(p_x \wedge (\rceil p_x)) \Leftrightarrow \perp$ prva od tautologija iz ④, sledi da je tačna i prva relacija iz ❹.

Dekartov proizvod skupova A i B, odnosno skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se definiše i označava na sledeći način:

$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid a \in A \ \wedge\ b \in B\}$,

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i \in \{1,2,\ldots,n\},\ a_i \in A_i\}$.

✎ Specijalno, za $A = B$, kao i za $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, pišemo

$$A^2 = A \times A, \qquad A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ puta}}.$$

Što se tiče relacija, razmatraćemo samo binarne relacije skupa $A \neq \emptyset$.

Definicija 1.1 ***Binarna relacija*** *(skraćeno, relacija)* ρ *skupa* A *je neki podskup skupa uređenih parova skupa* A*, tj.* $\rho \subseteq A^2$.

☞ $\emptyset \subseteq A^2$ i $A^2 \subseteq A^2$ su takođe binarne relacije (***prazna*** i ***puna*** relacija).

✎ Uobičajeno je za mnoge poznate relacije ρ da se činjenica $(x,y) \in \rho$ zapisuje sa $x\rho y$ (infiks notacija), ili, ređe, sa $\rho(x,y)$ (prefiks notacija); na primer, umesto $(3,5) \in \leq$ pišemo $3 \leq 5$.

✎ ***Dijagonala skupa*** $A \neq \emptyset$ je relacija $\triangle_A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,x) \mid x \in A\}$.

Definicija 1.2 ***Inverzna relacija*** *binarne relacije* ρ *skupa* A *je* $\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$ *(skup „obrnutih” uređenih parova).*

Relacije možemo zadati na razne načine. Neka je npr. $A = \{1,2,3\}$ i relacija $\rho \subseteq A^2$ opisana na sledećih nekoliko ekvivalentnih načina:

➥ nabrajanjem elemenata: $\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$,

➥ opisno pomoću drugih poznatih relacija i/ili operacija:
$\rho = \left\{(x,y) \in A^2 \;\middle|\; x^2 + y \leq 6\right\}$,

➥ tablično:

ρ	1	2	3
1	$*$	$*$	$*$
2	$*$	$*$	
3			

➥ grafički:

➲ Nabrajanjem, tablično i grafički možemo predstaviti samo relacije sa konačno mnogo elemenata.

➲ Relacije možemo opisati i rečima govornog jezika. Na primer, u skupu $\mathbb{R}^2$ možemo definisati relaciju ❀ na sledeći način:

$$A ❀ B \quad \Leftrightarrow \quad \text{tačke } A \text{ i } B \text{ leže u istom kvadrantu.}$$

Relacije mogu imati razne osobine. Izdvajaju se sledeće 4 najvažnije, koje se mogu definisati na više ekvivalentnih načina. Kod sve 4 osobine je prvo navedena izvorna definicija, a zatim neke od ekvivalentnih, pri čemu je kao poslednja ekvivalentna definicija svuda navedena negacija koju takva relacija ne sme da ima.

Definicija 1.3 *Osnovne osobine binarne relacije ρ skupa $A \neq \emptyset$:*

(R) ***refleksivnost*** *- ekvivalentne definicije:*

- (R1) $\forall x \in A,\ x\rho x;$
- (R∗) $\rceil \exists x \in A,\ \rceil x\rho x;$

(S) ***simetričnost*** *- ekvivalentne definicije:*

- (S1) $\forall x,y \in A,\ x\rho y \ \Rightarrow\ y\rho x;$
- (S2) $\forall x,y \in A,\ (x\rho y \wedge y\rho x) \ \vee\ (\rceil x\rho y \wedge \rceil y\rho x);$
- (S∗) $\rceil \exists x,y \in A,\ x\rho y \wedge \rceil y\rho x;$

(A) ***antisimetričnost*** *- ekvivalentne definicije:*

- (A1) $\forall x,y \in A,\ (x\rho y \wedge y\rho x) \ \Rightarrow\ x = y;$
- (A2) $\forall x,y \in A,\ (x\rho y \wedge x \neq y) \ \Rightarrow\ \rceil y\rho x;$
- (A3) $\forall x,y \in A,\ x \neq y \ \Rightarrow\ (\rceil x\rho y \vee \rceil y\rho x);$
- (A∗) $\rceil \exists x,y \in A,\ x \neq y \wedge x\rho y \wedge y\rho x;$

(T) ***tranzitivnost*** *- ekvivalentne definicije:*

- (T1) $\forall x,y,z \in A,\ (x\rho y \wedge y\rho z) \ \Rightarrow\ x\rho z;$
- (T∗) $\rceil \exists x,y,z \in A,\ x\rho y \wedge y\rho z \wedge \rceil x\rho z;$

Simetričnost i *antisimetričnost* nisu uzajamno suprotne osobine; kao što ćemo videti na primerima, postoje relacije koje imaju oba svojstva, kao i relacije koje nemaju ni jedno od ta dva svojstva.

♠ Ponekad je, naročito ako je relacija zadana nabrajanjem elemenata, osobine najlakše ispitivati pomoću definicija (D∗). Ako je relacija ρ zadana na nekom skupu A nabrajanjem elemenata tj. uređenih parova, osobine *refleksivnosti*, *simetričnosti* i *antisimetričnosti* možemo ispitivati tako što tražimo da li postoji bar jedna „smetnja” za posmatranu osobinu, te ako ne nađemo ni jednu takvu smetnju, tada relacija ima posmatranu osobinu (vidi zadatak **1.1**):

(R) relacija ρ je *refleksivna* ako i samo ne postoji ni jedan element $x \in A$ takav da $(x,x) \notin \rho$;

(S) relacija ρ je *simetrična* ako i samo ako u relaciji ne postoji ni jedan uređeni par (x,y) takav da „obrnuti” par (y,x) ne pripada relaciji;

(A) relacija ρ je *antisimetrična* ako i samo ako u relaciji ne postoji ni jedan uređeni par (x, y) sa različitim komponentama x i y, takav da se u relaciji nalazi i „obrnuti" par (y, x);

(T) relacija ρ je *tranzitivna* ako i samo ako u relaciji ne postoje uređeni parovi (x, y) i (y, z) sa $x \neq y$ i $y \neq z$, takvi da se u relaciji ne nalazi i uređeni par (x, z).

Pri ovakvom ispitivanju *simetričnosti*, *antisimetričnosti* i *tranzitivnosti*, parove oblika (x, x) nije potrebno ispitivati jer oni svakako ne mogu da „kvare" razmatranu osobinu.

♠ Ako je relacija ρ zadana u skupu $\mathbb{R}$, osobine *refleksivnosti*, *simetričnosti* i *antisimetričnosti* možemo ispitivati i „grafički" - svaki uređeni par $(x, y) \in \rho$ možemo predstaviti (ucrtati) u $\mathbb{R}^2$ ravni (vidi zadatak **1.3**):

(R) relacija ρ je *refleksivna* ako i samo ako svaka tačka prave $y = x$ pripada „grafiku" relacije ρ;

(S) relacija ρ je *simetrična* ako i samo ako za svaku tačka „grafika" relacije ρ, i njoj simetrična tačka u odnosu na pravu $y = x$ takođe pripada „grafiku" relacije ρ;

(A) relacija ρ je *antisimetrična* ako i samo ako za svaku tačka „grafika" relacije ρ koja ne pripada pravoj $y = x$, njoj simetrična tačka u odnosu na pravu $y = x$ ne pripada „grafiku" relacije ρ.

Slično možemo postupiti i sa relacijama definisanim na skupovima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, ... Za ispitivanje *tranzitivnosti* ne postoji ovakvo zgodno pravilo vezano za grafik relacije.

♠ Ako je binarna relacija ρ zadana na nekom skupu A tako što je zadana funkcionalna veza među komponentama x i y (npr. $\rho = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = x^2\right\}$), osobine *refleksivnosti*, *simetričnosti* i *antisimetričnosti* možemo ispitivati i analizom rešivosti odgovarajućih jednačina u skupu A (vidi zadatke **1.2** i **??**). Npr. ako je $\rho = \left\{(x, y) \in A^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\}$ (gde je $f : A \to A$), tada:

(R) relacija ρ je *refleksivna* ako i samo je svako $x \in A$ rešenje jednačine $x = f(x)$;

(S) relacija ρ je *simetrična* ako i samo važi $f(x) = y \Rightarrow f(y) = x$, odnosno ako je $f(f(x)) = x$ za svako $x \in A$;

(A) relacija ρ je *antisimetrična* ako i samo važi $(f(x) = y \wedge f(y) = x) \Rightarrow x = y$, odnosno ako i samo ako ne postoji $x \in A$ takvo da je $f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x$;

(T) relacija ρ je *tranzitivna* ako i samo ako važi $(f(x) = y \wedge f(y) = z) \Rightarrow f(x) = z$, odnosno ako i samo za svako $x \in A$ važi $f(f(x)) = f(x)$.

Pri ovakvom ispitivanju *simetričnosti*, *simetričnosti* i *tranzitivnosti*, parove oblika (x, x) nije potrebno ispitivati jer oni svakako ne mogu da „kvare" razmatranu osobinu.

Zadatak 1.1 *Ispitati osobine sledećih binarnih relacija skupa* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*:*

$\rho_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$, R S $\underline{\text{A}}$ T

$\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$, R $\underline{\text{S}}$ $\underline{\text{A}}$ $\underline{\text{T}}$

$\rho_3 = \{(1, 2), (4, 5), (2, 3), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (1, 5)\}$, R S $\underline{\text{A}}$ T

$\rho_4 = \emptyset$,	R	$\underline{\text{S}}$	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$
$\rho_5 = A^2$,	$\underline{\text{R}}$	$\underline{\text{S}}$	A	$\underline{\text{T}}$
$\rho_6 = \triangle_A$,	$\underline{\text{R}}$	$\underline{\text{S}}$	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$

➥ ***Rešenje:*** Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima. Većinu osobina možemo najlakše ispitati koristeći formulacije (D$*$) iz definicije **1.3** (vidi komentar na strani 11).

Relacija ρ_1 nije refleksivna jer npr. $(2,2) \notin \rho_1$. Nije ni simetrična jer npr. $(1,2) \in \rho_1$ i $(2,1) \notin \rho_1$. Jeste antisimetrična jer za sve $(x,y) \in \rho_1$ sa $x \neq y$ redom utvrđujemo da $(y,x) \notin \rho_1$. Nije tranzitivna jer npr. $(1,2) \in \rho_1$, $(2,3) \in \rho_1$ i $(1,3) \notin \rho_1$.

Relacija ρ_2 nije refleksivna jer npr. $(3,3) \notin \rho_2$. Preostale tri osobine sigurno ima jer u relaciji nema parova $(x,y) \in \rho_2$ sa $x \neq y$, te ne može da postoji ni jedna smetnja za te tri osobine (vidi napomenu posle zadatka).

Relacija ρ_3 nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho_3$. Nije ni simetrična jer npr. $(1,2) \in \rho_3$ i $(2,1) \notin \rho_3$. Jeste antisimetrična jer sadrži samo parove (x,y) kod kojih je $x < y$, te iz tog razloga ne može da bude $(x,y) \in \rho_3$ i $(y,x) \in \rho_3$. Nije tranzitivna jer $(2,4) \in \rho_3$, $(4,5) \in \rho_3$ i $(2,5) \notin \rho_3$.

Za relaciju ρ_4 važe iste osobine i uz ista obrazloženja kao i za relaciju ρ_2.

Relacija ρ_5 jeste refleksivna jer sadrži sve uređene parove, pa i sve oblika (x,x). Jeste i antisimetrična i tranzitivna jer sadrži sve parove pa su implikacije $x\rho y \Rightarrow y\rho x$ i $(x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$ uvek tačne zato što su svi iskazi u implikacijama uvek tačni. Nije antisimetrična jer npr. $(1,2) \in \rho_5$ i $(2,1) \in \rho_5$.

Relacija ρ_6 očigledno jeste refleksivna, a ima i sve ostale osobine iz istih razloga kao i relacija ρ_2 (samo ova relacija, tj. dijagonala skupa, ima sve 4 osobine). ☑

☞ Ako neka relacija u sebi ima samo parove oblika (x,x) (ne obavezno sve parove tog oblika), tada takva relacija jeste i simetrična i antisimetrična i tranzitivna iz istog razloga kao relacija ρ_2 u prethodnom zadatku.

Zadatak 1.2 *Ispitati osobine sledećih binarnih relacija skupa* $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$*:*

$\rho_1 = \{(x,x+1) \mid x \in \mathbb{N}\}$,	R	S	$\underline{\text{A}}$	T
$\rho_2 = \{(7,7)\}$,	R	$\underline{\text{S}}$	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$
$\rho_3 = \{(x,y) \mid x+y = 2002,\ x,y \in \mathbb{N}\}$,	R	$\underline{\text{S}}$	A	T
$\rho_4 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N},\ y = 2x+3\}$,	R	S	A	$\underline{\text{T}}$
$\rho_5 = \{(2x,2x) \mid x \in \mathbb{N}\}$,	R	$\underline{\text{S}}$	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$

➥ ***Rešenje:*** Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima. Osobine možemo ispitivati i analizom jednakosti $f_i(x) \overset{[*]}{=} y$ po $x,y \in \mathbb{R}$ (vidi napomenu na strani 12), gde je f_i funkcija koja opisuje y komponentu u relaciji ρ_i, dakle $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = 7$, $f_3(x) = 2002 - x$, $f_4(x) = 2x+3$, i $f_5(t) = t$ za $t = 2x$.

Relacija ρ_1 nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho_1$ (ako je prva komponenta 1, druga mora biti 2 a ne 1); drugim rečima, npr. $x = 1$ nije rešenje jednačine $x = x+1$. Nije ni simetrična jer npr. $(1,2) \in \rho_1$ i $(2,1) \notin \rho_1$ (ako je prva komponenta 2, druga mora biti 3 a ne 1); drugim rečima, jeste $f_1(1) = 2$ ali nije $f_1(2) = 1$. Jeste antisimetrična jer za sve $(x, x+1) \in \rho_1$ važi $(x+1, x) \notin \rho_1$ (ako je prva komponenta oblika $x+1$, druga mora biti $x+2 \neq x$); drugim rečima, ne postoji ni jedan element $x \in \mathbb{N}$ takav da je $f_1(x) = x+1 \neq x \ \wedge\ f_1(f_1(x)) = x+2 = x$. Nije tranzitivna jer npr. $(1,2) \in \rho_1$, $(2,3) \in \rho_1$ i $(1,3) \notin \rho_1$ (ako je prva komponenta 1, druga mora biti 2 pa ne može biti 3); drugim rečima, jednakost $f_1(f_1(x)) = x+2 = x+1 = f_1(x)$ nije tačna npr. za $x = 1$.

Za relaciju ρ_2 važe iste osobine i uz ista obrazloženja kao i za relaciju ρ_2 iz zadatka **1.1**.

Relacija ρ_3 nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho_3$. Jeste simetrična jer $(x,y) \in \rho_3$ znači da je $x+y = 2002$, odakle sledi $y+x = 2002$ odnosno $(y,x) \in \rho_3$. Nije antisimetrična jer npr. $(1,2001) \in \rho_3$ i $(2001,1) \in \rho_3$. Nije ni tranzitivna jer važi npr. $(1,2001) \in \rho_3$, $(2001,1) \in \rho_3$ i $(1,1) \notin \rho_3$.

Relacija ρ_4 nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho_4$ (ako je prva komponenta 1, druga mora biti $2 \cdot 1 + 3 = 5$ a ne 1). Nije ni simetrična jer npr. $(1,5) \in \rho_4$ i $(5,1) \notin \rho_4$ (ako je prva komponenta 5, druga mora biti $2 \cdot 5 + 3 = 13$ a ne 1). Jeste antisimetrična jer za $(x,y) \in \rho_4$ važi $y = 2x+3$, a iz $(y,x) \in \rho_4$ sledi $x = 2y+3$, što je nemoguće jer sistem jednačina $y = 2x+3 \ \wedge\ x = 2y+3$ nema rešenja po $x, y \in \mathbb{N}$ (iz sitema bi uvrštavanjem prve jednačine u drugu dobili $x = 2(2x+3)+3 = 4x+9$ odnosno $x = -3 \notin \mathbb{N}$). Nije ni tranzitivna jer npr. $(1,5) \in \rho_4$, $(5,13) \in \rho_4$ i $(1,13) \notin \rho_4$ (ako je prva komponenta 1, druga mora biti 5 pa ne može biti 13).

Relacija ρ_5 nije refleksivna jer npr. $(1,1) \notin \rho_5$, a sve ostale osobine ima iz istih razloga kao i relacija ρ_2 iz zadatka **1.1**.

Za vežbu možete ispitati osobine relacija ρ_2, ρ_3, ρ_4 i ρ_5 analizom rešivosti odgovarajućih jednačina, onako kako je to urađeno za relaciju ρ_1. ☑

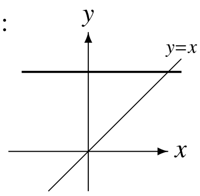
Zadatak 1.3 *Ispitati osobine sledećih binarnih relacija skupa* $\mathbb{R}$*:*

$\rho_1 = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$
$\rho_2 = \{(x,y) \mid x+y = 0,\ x,y \in \mathbb{R}\}$,	R	$\underline{\text{S}}$	A	T
$\rho_3 = \left\{(x,y) \mid x^2 = y^2,\ x,y \in \mathbb{R}\right\}$,	$\underline{\text{R}}$	$\underline{\text{S}}$	A	$\underline{\text{T}}$
$\rho_4 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ y \geq 0\}$,	R	S	A	$\underline{\text{T}}$
$\rho_5 = \{(x,y) \mid \max\{x,y\} = y,\ x,y \in \mathbb{R}\}$,	$\underline{\text{R}}$	S	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$
$\rho_6 = \{(x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{\text{A}}$	T
$\rho_7 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in [x, x+1]\}$,	$\underline{\text{R}}$	S	$\underline{\text{A}}$	T
$\rho_8 = \{(x,2^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{\text{A}}$	T
$\rho_9 = \{(x,\lvert x\rvert) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$
$\rho_{10} = \{(x,2x-3) \mid x \in \mathbb{R}\}$,	R	S	$\underline{\text{A}}$	T
$\rho_{11} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$,	$\underline{\text{R}}$	$\underline{\text{S}}$	$\underline{\text{A}}$	$\underline{\text{T}}$
$\rho_{12} = \{(-2,-2),(-2,2),(2,-2),(2,2)\}$,	R	$\underline{\text{S}}$	A	$\underline{\text{T}}$

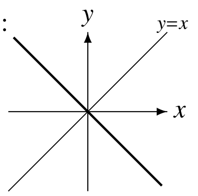
➥ ***Rešenje:*** Podvučena slova označavaju svojstvo koje dotična relacija ima. Većinu osobina ovih relacija možemo elegantno ispitati i posmatranjem grafika ovih relacija (vidi komentar na strani 12). Grafici relacija su predstavljeni debljom linijom ili senkom.

Relacija ρ_1 je prava $y = 1$. Relacija ρ_2 je prava $y = -x$. Jednakost $x^2 = y^2$ je ekvivalentna sa $|x| = |y|$ odnosno $y = \pm x$, te je relacija ρ_3 unija pravih $y = x$ i $y = -x$.

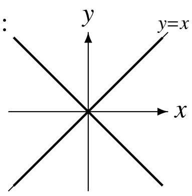
ρ_1 :



ρ_2 :



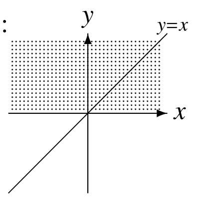
ρ_3 :



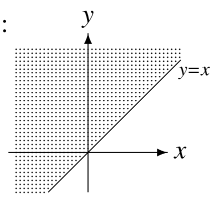
Relacije ρ_1 i ρ_2 nisu refleksivne jer ne sadrže celu pravu $y = x$, dok relacija ρ_3 jeste refleksivna. Relacija je simetrična ako i samo ako je njen grafik simetričan u odnosu na pravu $y = x$, te relacija ρ_1 nije simetrična, a ρ_2 i ρ_3 jesu simetrične relacije. Relacija je antisimetrična ako i samo ako ne postoje dve različite tačke na njenom grafiku a koje su simetrične jedna drugoj u odnosu na pravu $y = x$, te relacija ρ_1 jeste antisimetrična, a ρ_2 i ρ_3 nisu antisimetrične relacije. Relacija ρ_1 jeste tranzitivna jer iz $x\rho_1 y \wedge y\rho_1 z$ sledi $y = 1$ i $z = 1$, te zbog $z = 1$ važi $x\rho_1 z$. Relacija ρ_2 nije tranzitivna jer je npr. $(-1,1) \in \rho_1$, $(1,-1) \in \rho_1$ i $(1,1) \notin \rho_1$. Relacija ρ_3 jeste tranzitivna jer iz $x\rho_3 y \wedge y\rho_3 z$ sledi $|x| = |y|$ i $|y| = |z|$, te zbog $|x| = |z|$ važi $x\rho_3 z$.

Relacija ρ_4 je gornja poluravan u odnosu na pravu $y = 0$. Relacija ρ_5 je dobro poznata relacija $x \le y$, i to je „donja” poluravan u odnosu na pravu $y = x$, uključujući i samu tu pravu. Relacija ρ_6 je funkcija $y = 3x$ čiji je grafik prava. Relacija ρ_7 je „traka” između pravih $y = x$ i $y = x + 1$. Relacija ρ_8 je eksponencijalna funkcija $y = 2^x$. Relacija ρ_9 je funkcija $y = |x|$. Relacija ρ_{10} je funkcija $y = 2x - 3$ čiji je grafik prava. Relacija ρ_{11} je dijagonala skupa $\mathbb{R}$, tj. identička funkcija $y = x$ čiji je grafik prava. Grafik relacije ρ_{12} čine temena kvadrata.

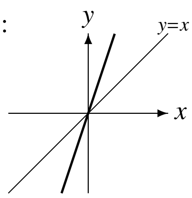
ρ_4 :



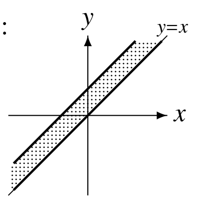
ρ_5 :



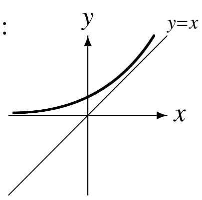
ρ_6 :



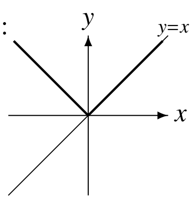
ρ_7 :



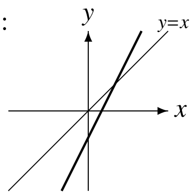
ρ_8 :



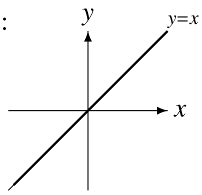
ρ_9 :



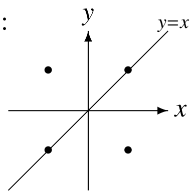
$\rho_{10}:$



$\rho_{11}:$



$\rho_{12}:$



Shodno komentaru sa strane 12, relacije ρ_5, ρ_7 i ρ_{11} jesu refleksivne, dok ρ_4, ρ_6, ρ_8, ρ_9, ρ_{10} i ρ_{12} to nisu; relacije ρ_{11} i ρ_{12} jesu simetrične, a ρ_4, ρ_5, ρ_6, ρ_7, ρ_8, ρ_9 i ρ_{10} nisu; antisimetrične su relacije $\rho_5, \rho_6, \rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}$ i ρ_{11}, dok ρ_4 i ρ_{12} to nisu.

Relacija ρ_4 jeste tranzitivna jer iz $x\rho_4 y \wedge y\rho_4 z$ sledi $y \geq 0$ i $z \geq 0$, te zbog $z \geq 0$ važi $x\rho_4 z$. Relacija ρ_5 jeste tranzitivna jer iz $x \leq y \wedge y \leq z$ sledi $x \leq z$. Relacija ρ_6 nije tranzitivna jer je npr. $(1,3) \in \rho_6$, $(3,9) \in \rho_6$ i $(1,9) \notin \rho_6$. Relacija ρ_7 nije tranzitivna jer je npr. $(0,1) \in \rho_7$, $(1,2) \in \rho_7$ i $(0,2) \notin \rho_7$. Relacija ρ_8 nije tranzitivna jer je npr. $(0,1) \in \rho_8$ (tj. $2^0 = 1$), $(1,2) \in \rho_8$ (tj. $2^1 = 2$) i $(0,2) \notin \rho_8$ (tj. $2^0 \neq 2$). Relacija ρ_9 jeste tranzitivna jer iz $x\rho_9 y \wedge y\rho_9 z$ sledi $y = |x|$ i $z = |y| = |x|$, te zbog $z = |x|$ važi $x\rho_9 z$. Relacija ρ_{10} nije tranzitivna jer je npr. $(0,-3) \in \rho_{10}$, $(-3,-9) \in \rho_{10}$ i $(0,-9) \notin \rho_{10}$. Relacija ρ_{11} jeste tranzitivna jer iz $x = y \wedge y = z$ sledi $x = z$. Relacija ρ_{12} jeste tranzitivna. ☑

Definicija 1.4 ***Relacija ekvivalencije*** $\equiv$ *skupa* A *(*RST *relacija) je relacija koja ima svojstva* R, S *i* T. ***Klasa elementa*** $x \in A$ *u odnosu na relaciju ekvivalencije* $\equiv$ *je, u standardnim oznakama* C_x *ili* $[x]$, $C_x = [x] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in A \mid x \equiv y\}$. ***Faktor skup*** *skupa* A *u odnosu na relaciju ekvivalencije* $\equiv$ *je skup svih klasa:* $A/\equiv \stackrel{\text{def}}{=} \{C_x \mid x \in A\}$.

☞ Za klase ekvivalencije važe sledeće interesantne osobine:

1. $\forall x \in A,\ x \in C_x$ (posledica: svaki element pripada nekoj, tj. bar svojoj klasi);
2. $\forall x,y \in A,\ x \in C_y \ \Leftrightarrow\ y \in C_x$;
3. $\forall x,y \in A,\ C_x \cap C_y = \emptyset \ \vee\ C_x = C_y$.

Drugim rečima, faktor skup skupa A u odnosu na $\equiv$ je jedna ***particija*** skupa A (podela elemenata skupa A u disjunktne skupove). Tako, svaka relacija ekvivalencije $\equiv$ skupa A generiše particiju $A/\equiv$ skupa A. Važi i obratno, tj. svakoj particiji $\mathcal{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ skupa A (elementi skupa $\mathcal{F}$ su neprazni podskupovi F_i skupa A takvi da je $\forall i \neq j,\ F_i \cap F_j = \emptyset$ i $\bigcup_{i \in I} F_i = A$) odgovara jedna i samo jedna relacija ekvivalencije ρ skupa A čiji je faktor skup A/ρ jednak particiji $\mathcal{F}$. Ovakva relacija ρ je definisana sa

$$\forall x,y \in A, \quad x\rho y \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \exists i \in I,\ x,y \in F_i,$$

i ona je jednoznačno određena.

Primer 1.1 *Neka je* A *skup svih živih bića na Zemlji, i neka je na skupu* A *relacija* ❄ *definisana sa:*

$$\forall x,y \in A,\ x ❄ y \quad \Leftrightarrow \quad \textit{bića } x \textit{ i } y \textit{ pripadaju istoj vrsti.}$$

Relacija ❄ *je očigledno relacija ekvivalencije skupa* A*. Npr. svi ljudi su u relaciji* ❄ *sa svim ostalim ljudima, i pripadaju istoj klasi. Isto to važi npr. i za sve svinje, sve kupuse, itd. Dakle, klase ekvivalencije su skupovi istih vrsta živih bića.* ✔

Zadatak 1.4 *U skupu svih pravih jedne ravni definisana je relacija ρ:*

$$a\rho b \quad \Leftrightarrow \quad (a = b \ \lor \ a \cap b = \emptyset)$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i opisati klase ekvivalencije. Da li je na isti način definisana relacija u skupu svih pravih prostora takođe relacija ekvivalencije?

➥ ***Rešenje:*** Za proizvoljne prave a, b i c važi

(R): $a\rho a$ jer je $a = a$.

(S): $a\rho b \ \Rightarrow \ (a = b \ \lor \ a \cap b = \emptyset) \ \Rightarrow \ (b = a \ \lor \ b \cap a = \emptyset) \ \Rightarrow \ b\rho a$.

(T): $(a\rho b \ \land \ b\rho c) \ \Rightarrow \ ((a = b \ \lor \ a \cap b = \emptyset) \ \land \ (b = c \ \lor \ b \cap c = \emptyset)) \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ (a = c \ \lor \ a \cap c = \emptyset) \Rightarrow \ a\rho c$.

Primetimo da je ρ u stvari relacija „*biti paralelan*" među pravama u ravni, pa klase ekvivalencije predstavaljaju u stvari pravce u ravni. Na isti način definisana relacija u skupu pravih prostora nije RST relacija jer za neke dve mimoilazne prave a i b i pravu c koja seče a i mimoilazna je sa b s jedne strane važi $a\rho b \ \land \ b\rho c$, a s druge strane ne važi $a\rho c$, te relacija ρ nije tranzitivna. ☑

Zadatak 1.5 *Neka je u skupu $\mathbb{Z}$ definisana relacija $\equiv_4$:*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ \ x \equiv_4 y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ x - y = 4k.$$

Dokazati da je $\equiv_4$ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ i odrediti klase ekvivalencije.

➥ ***Rešenje:*** Posmatrajmo proizvoljne $x, y, z \in Z$:

(R) $x - x = 4 \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad x \equiv_4 x$.

(S) $x \equiv_4 y \quad \Rightarrow \quad \exists k \in Z, \ x - y = 4k \quad \Rightarrow \quad \exists k \in Z, \ y - x = -4k \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \exists(-k) \in Z, \ y - x = 4(-k) \quad \Rightarrow \quad \exists m \in Z, \ y - x = 4m \quad \Rightarrow \quad y \equiv_4 x$.

(T) $(x \equiv_4 y \ \land \ y \equiv_4 z) \quad \Rightarrow \quad (\exists k, m \in Z, \ x - y = 4k \ \land \ y - z = 4m) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \exists k, m \in Z, \ (x - y) + (y - z) = 4k + 4m \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \exists(k + m) \in Z, \ x - z = 4(k + m) \quad \Rightarrow \quad \exists j \in Z, \ x - z = 4j \quad \Rightarrow \quad x \equiv_4 z$.

Kako je $x \equiv_4 y$, odnosno $\exists k \in Z, \ x - y = 4k$, ekvivalentno sa $4|(x - y)$, među sobom su u relaciji svi elementi koji pri deljenju sa 4 imaju isti ostatak, te sledi da postoji 4 različite klase ekvivalencije, jer pri deljenju sa 4 možemo imati 4 različita ostatka (0, 1, 2 i 3):

$$[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}, \quad [1] = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots\},$$
$$[2] = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}, \quad [3] = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}.$$

Prema tome, odgovarajući faktor-skup je $Z/\equiv_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$, gde su klase oblika $[k] = \{4m + k \mid m \in Z\}$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, i svaku klasu možemo jednoznačno predstaviti jednim brojem iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$. ☑

Zadatak 1.6 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ fiksan broj, i neka je u skupu $\mathbb{Z}$ definisana relacija $\equiv_n$:*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \ \ x \equiv_n y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \ x - y = nk.$$

Dokazati da je $\equiv_n$ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ i odrediti klase ekvivalencije.

➥ ***Rešenje:*** Ako u prethodnom zadatku svuda broj 4 zamenimo sa n, dobijamo dokaz da je $\equiv_n$ relacija ekvivalencije. Takođe je $x \equiv_n y$ ekvivalentno sa $n|(x-y)$, tj. među sobom su u relaciji svi elementi koji pri deljenju sa n imaju isti ostatak, te sledi da postoji n različitih klasa ekvivalencije (jer pri deljenju sa n možemo imati n različitih ostataka):

$[0] = \{\dots,-2n,-n,0,n,2n,\dots\}$,
$[1] = \{\dots,-2n+1,-n+1,1,n+1,2n+1,\dots\}$,
$[2] = \{\dots,-2n+2,-n+2,2,n+2,2n+2,\dots\}$,
$\vdots$
$[n-1] = \{\dots,-2n-1,-n-1,-1,n-1,2n-1,\dots\}$.

Pri tome je odgovarajući faktor-skup $Z/\equiv_n = \{[0],[1],\dots,[n-1]\}$, gde je svaka klasa oblika $[k] = \{4\cdot m+k \mid m \in Z\}$, $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$, i svaku klasu možemo jednoznačno predstaviti jednim brojem skupa $\{0,1,2,\dots,n-1\}$. ☑

☞ Kao što ćemo videti kasnije, relacija $\equiv_n$ ima važnu ulogu u teoriji grupa i polja.

Zadatak 1.7 *Na skupu parova prirodnih brojeva $\mathbb{N}^2$ su definisane binarne relacije α i β:*

$$(a,b)\alpha(c,d) \quad\Leftrightarrow\quad a+d=b+c$$
$$(a,b)\beta(c,d) \quad\Leftrightarrow\quad ad=bc.$$

Dokazati da su α i β relacije ekvivalencije i naći faktor skupove.

➥ ***Rešenje:***

(α) Za sve $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^2$ važi:

(R) $a+b=b+a \quad\Rightarrow\quad (a,b)\alpha(a,b)$;

(S) $(a,b)\alpha(c,d) \quad\Rightarrow\quad a+d=b+c \quad\Rightarrow\quad c+b=d+a \quad\Rightarrow\quad (c,d)\alpha(a,b)$;

(T) $((a,b)\alpha(c,d) \wedge (c,d)\alpha(e,f)) \quad\Rightarrow\quad (a+d=b+c \wedge c+f=d+e) \quad\Rightarrow$
$\Rightarrow\quad (a+d)+(c+f)=(b+c)+(d+e) \quad\Rightarrow\quad a+f=b+e \quad\Rightarrow$
$\Rightarrow\quad (a,b)\alpha(e,f)$.

Kako je $(a,b)\alpha(c,d)$ ekvivalentno sa $a+d=b+c$, odnosno sa $a-b=c-d$, sledi da je $C_{(a,b)} = \{(x,y) \mid x-y=a-b\}$ tj. jednu klasu ekvivalencije čine svi uređeni parovi kod kojih je razlika prve i druge komponente jednaka nekom fiksnom $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, klase ekvivalencije i faktor skup možemo predstaviti i na sledeći način:

$$A_k = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a-b=k\right\},\ k \in \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{N}^2/\alpha = \{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(svakoj klasi odgovara jedan ceo broj, i obratno).

(β) Za sve $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^2$ važi:

(R) $ab=ba \quad\Rightarrow\quad (a,b)\beta(a,b)$;

(S) $(a,b)\beta(c,d) \quad\Rightarrow\quad ad=bc \quad\Rightarrow\quad cb=da \quad\Rightarrow\quad (c,d)\beta(a,b)$;

(T) $((a,b)\beta(c,d) \wedge (c,d)\beta(e,f)) \quad\Rightarrow\quad (ad=bc \wedge cf=de) \quad\Rightarrow$
$\Rightarrow\quad (ad)(cf)=(bc)(de) \quad\Rightarrow\quad af=be \quad\Rightarrow\quad (a,b)\beta(e,f)$.

Kako je $(a,b)\beta(c,d)$ ekvivalentno sa $ad = bc$, odnosno sa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sledi da je $C_{(a,b)} = \left\{(x,y) \mid \frac{x}{y} = \frac{a}{b}\right\}$, tj. jednu klasu ekvivalencije čine svi uređeni parovi kod kojih je količnik prve i druge komponente jednak nekom fiksnom $r \in \mathbb{Q}^+$. Dakle, klase ekvivalencije i faktor skup možemo pretstaviti i na sledeći način:

$$A_r = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \frac{a}{b} = r\right\},\ r \in \mathbb{Q}^+, \qquad \mathbb{N}^2/\beta = \{A_r \mid r \in \mathbb{Q}^+\}$$

(svakoj klasi odgovara jedan pozitivan racionalan broj, i obratno). ☑

Zadatak 1.8 *Za particiju* $A_1 = \{1,2,3\}$*,* $A_2 = \{4,5\}$*,* $A_3 = \{6\}$ *skupa* $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ *naći relaciju* $\rho \subseteq A^2$ *čiji je faktor - skup upravo particija* $\{A_1,A_2,A_3\}$.

➥ ***Rešenje:*** Iz $(a,b) \in \rho \Leftrightarrow (\exists i \in \{1,2,3\},\ a \in A_i \wedge b \in A_i)$ lako dobijamo da je

$\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),$
$(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,4),(5,5),(4,5),(5,4),(6,6)\}$,

jer u odnosu na relaciju ρ imamo sledeće klase ekvivalencije: $C_1 = C_2 = C_3 = \{1,2,3\}$, $C_4 = C_5 = \{4,5\}$ i $C_6 = \{6\}$. ☑

Definicija 1.5 ***Relacija poretka*** $\leq$ *skupa* A *(*RAT *relacija) je relacija koja ima svojstva* R, A *i* T. *Uređeni par* $(A,\leq)$ *se naziva* **parcijalno uređen skup**. **Haseov dijagram** *je grafik relacije poretka* $\leq$ *skupa* A *(vidi* [RD05]*). U odnosu na relaciju poretka* $\leq$ *skupa* A *se definiše:*

- ***najmanji element*** $a \in A$ *je element sa svojstvom* $\forall x \in A,\ a \leq x$ *(element koji je „manji" od svih, tj. koji je sa svima u relaciji, tj. element koji je na Haseovom dijagramu „ispod" svih u smislu da od njega vodi „put" nagore prema svakom elementu);*
- ***minimalni element*** $a \in A$ *je element sa svojstvom* $\nexists x \in A,\ x \neq a \ \wedge\ x \leq a$ *(element od kojeg nema „manjeg", tj. sa kojim ni jedan drugi nije u relaciji, tj. takav element da na Haseovom dijagramu ne postoji ni jedan „ispod" njega u smislu da od njega ne vodi „put" nadole ni prema jednom elementu);*
- ***najveći element*** $a \in A$ *je element sa svojstvom* $\forall x \in A,\ x \leq a$ *(element koji je „veći" od svih, tj. sa kojim su svi u relaciji, tj. element koji je na Haseovom dijagramu „iznad" svih u smislu da od njega vodi „put" nadole prema svakom elementu);*
- ***maksimalni element*** $a \in A$ *je element sa svojstvom* $\nexists x \in A,\ x \neq a \ \wedge\ a \leq x$ *(element od kojeg nema „većeg", tj. koji nije u relaciji ni sa jednim drugim, tj. takav element da na Haseovom dijagramu ne postoji ni jedan „iznad" njega u smislu da od njega ne vodi „put" nagore ni prema jednom elementu);*

☞ Svakoj relaciji poretka jednoznačno odgovara jedan Haseov dijagram, i obratno, na osnovu Haseovog dijagrama se jednoznačno može rekonstruisati relacija poretka kojoj odgovara posmatrani Haseov dijagram.

☞ Ako postoji, najmanji element je jedinstven. Isto važi i za najveći element. Minimalnih i maksimalnih elemenata može biti više. Ako postoji najmanji element, tada je on ujedno i jedini minimalni. Isto važi i za najveći i maksimalni element.

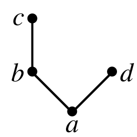
☞ Neki element a skupa A na kome je definisana relacija poretka $\preceq$ može da bude istovremeno i minimalni i maksimalni element. To je slučaj ukoliko a nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom iz posmatranog skupa, niti su oni u relaciji sa e.

☞ Inverzna relacija $\succeq$ relacije poretka $\preceq$ je takođe relacija poretka. Pri tome, najmanji element relacije $\preceq$ je najveći element relacije $\succeq$ i obratno, a minimalni elementi relacije $\preceq$ su maksimalni elementi relacije $\succeq$ i obratno.

Primer 1.2 *Binarna relacija*

$$\preceq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c)\}$$

je relacija poretka skupa $A = \{a,b,c,d\}$, pri čemu je a najmanji (i jedini minimalni) element, najvećeg elementa nema, a maksimalni su c i d.



Primer 1.3 *Najvažniji primeri relacija poretka:*

(a) *Relacija $\leq$ („manje ili jednako") u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Jedini minimalni i najmanji element je* 1*, a najvećeg i maksimalnih elemenata nema. U skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ ili realnih brojeva $\mathbb{R}$ relacija $\leq$ nema ni najmanjeg ni najvećeg elementa. Relacija $\geq$ „veće ili jednako" npr. u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je takođe relacija poretka, a u odnosu na nju je* 1 *najveći i jedini maksimalni element.*

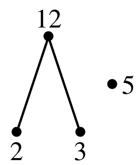
Ovo su sve tzv. relacije **linearnog** *odnosno* **potpunog poretka** *kod kojih su svaka dva elementa* uporediva*, tj.* $\forall x,y,\ x \leq y \ \vee\ y \leq x$.

(b) *Relacija $\cdot|\cdot$ („deli") u skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, definisana sa*

$$m \mid n \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N},\ n = km.$$

Najmanji i jedini minimalni element je 1*, a najvećeg i maksimalnih elemenata nema.*

Ako relaciju $\cdot|\cdot$ posmatramo npr. na skupu $\{2,3,5,12\}$*, tada (vidi Haseov dijagram) najveći i najmanji element ne postoje, minimalni elementi su* 2*,* 3 *i* 5*, a maksimalni elementi su* 5 *i* 12 *(element* 5 *je istovremeno i minimalni i maksimalni element jer nije u relaciji ni sa jednim drugim elementom iz posmatranog skupa, niti su oni u relaciji sa* 5*).*

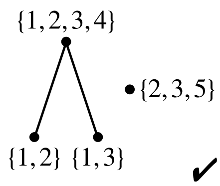


(c) *Relacija $\subseteq$ („podskup") u partitivnom skupu nekog skupa $A \neq \emptyset$. Jedini minimalni i najmanji element je $\emptyset$, a jedini maksimalni i najveći element je A.*

Ako relaciju $\subseteq$ posmatramo npr. na skupu

$$\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,4\},\{2,3,5\}\},$$

tada (vidi Haseov dijagram) najveći i najmanji element ne postoje, minimalni elementi su $\{1,2\}$*,* $\{1,3\}$ *i* $\{2,3,5\}$*, a maksimalni elementi su* $\{1,2,3,4\}$ *i* $\{2,3,5\}$*.*



Zadatak 1.9 *Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$. Dokazati da je $\cdot|\cdot$ relacija poretka na skupu A.*

➥ ***Rešenje:*** Za proizvoljne prave $a,b,c \in A$ važi

(R) : $a \mid a$ jer je $a = 1 \cdot a$.

(A) : $(a \mid b \wedge b \mid a) \quad \Rightarrow \quad (\exists k,m \in \mathbb{N},\ b = k \cdot a \ \wedge \ a = m \cdot b) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad (\exists k,m \in \mathbb{N},\ b = k \cdot m \cdot b) \quad \Rightarrow \quad (k = m = 1 \ \wedge \ a = b).$

(T) : $(a \mid b \wedge b \mid c) \quad \Rightarrow \quad (\exists k,m \in \mathbb{N},\ b = k \cdot a \ \wedge \ c = m \cdot b) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad (\exists k,m \in \mathbb{N},\ c = m \cdot k \cdot a = n \cdot a) \quad \Rightarrow \quad a \mid c$
(ako su m i k prirodni brojevi, tada je i $n = m \cdot k$ prirodan broj). ☑

Zadatak 1.10 *Za sledeće relacije odrediti najveće, najmanje, minimalne i maksimalne elemente:*

(a) *relacija $\cdot|\cdot$ na skupu $\mathbb{N} \setminus \{1\}$;*

(b) *relacija $\cdot|\cdot$ na skupu $\{2,3,4,\ldots,50\}$;*

(c) *relacija $\subseteq$ na skupu $\mathcal{P}(A)$, za $A = \{1,2,3\}$;*

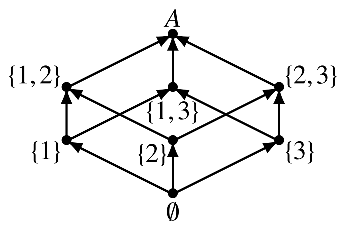
(d) *za $A = \{1,2,3\}$, relacija $\subseteq$ na skupovima $\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$, $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}$ i $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Najmanjeg elementa nema, minimalni elementi su svi prosti brojevi, a najvećeg i maksimalnih elemenata nema.

(b) Najmanjeg elementa nema, minimalni elementi su svi prosti brojevi iz ovog skupa, najvećeg elementa nema, a maksimalni elementi su $26,27,28,\ldots,50$.

(c) Najmanji i jedini minimalni element je $\emptyset$, a najveći i jedini maksimalni element je A.



(d) Za svaki od posmatranih skupova Haseov dijagram možemo nacrtati tako što sa Haseovog dijagrama pod (c) izbrišemo sve elemente koji su višak, kao i sve strelice koje polaze, ili koje se završavanju u izbrisanim elementima. Tada dobijamo

	najmanji	minimalni	najveći	maksimalni
$\mathcal{P}(A) \setminus \{A\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	nema	$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$
$\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$	nema	$\{1\},\{2\},\{3\}$	A	A
$\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A\}$	nema	$\{1\},\{2\},\{3\}$	nema	$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$
$\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, A, \{1,2\}, \{1,3\}\}$	nema	$\{1\},\{2\},\{3\}$	nema	$\{1\},\{2,3\}$

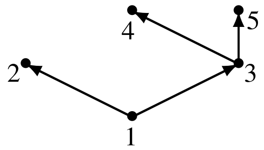
☑

Zadatak 1.11 *Data je binarna relacija*

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(3,3),(3,4),(3,5),(4,4),(5,5)\}$$

na skupu $A = \{1,2,3,4,5\}$. *Dokazati da je* ρ *relacija poretka, nacrtati njen Haseov dijagram, i odrediti najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente.*

➥ ***Rešenje:*** Kao u zadatku **1.1** utvrđujemo da ρ ima osobine R, A i T.



najmanji element:	1
najveći element:	nema
minimalni element:	1
maksimalni element:	2, 4, 5

☑

Zadatak 1.12 *Konstruisati relaciju poretka* ρ *na skupu* $\mathbb{N}$, *takvu da za nju važe sledeće osobine:*

- $\exists x,\ \exists y,\ \rceil x\rho y \wedge \rceil y\rho x$,
- *postoji jedinstven minimalni element.*

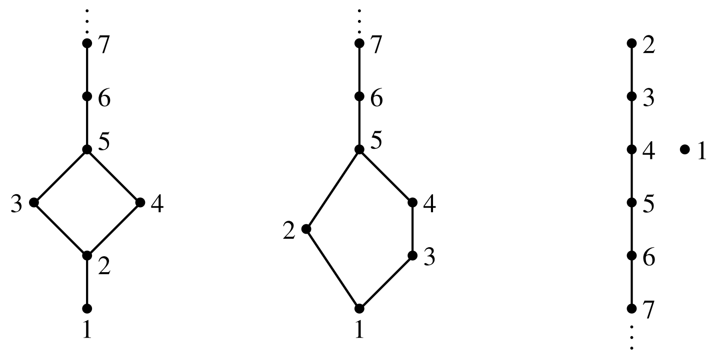
➥ ***Rešenje:*** Dakle, naša relacija treba da bude takva da u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N},\rho)$ postoji jedan i samo jedan minimalni element, i da postoje dva elementa koja nisu „uporediva”. Jedno rešenje zadatka je relacija $\cdot|\cdot$, ali ćemo navesti još neka rešenja.

Traženu relaciju ρ jednoznačno možemo identifikovati odgovarajućim Haseovim dijagramom. Navedena su 3 moguća rešenja, a ima ih, naravno, beskonačno mnogo:

$\rho_1 = \left\{(m,n)\in\mathbb{N}^2 \;\middle|\; m\le n \wedge \rceil(m=3 \;\wedge\; n=4)\right\} = \le \setminus \{(3,4)\}$,

$\rho_2 = \le \setminus \{(2,3),(2,4)\}$,

$\rho_3 = \ge \setminus \{(x,1) \mid x\in\{2,3,4,\ldots\}\}$.



☑

Glava 2

Funkcije

Definicija 2.1 ***Funkcija*** *$f \subseteq A \times B$ je binarna relacija kod koje ne postoje dva različita uređena para sa jednakim prvim komponentama, tj. za koju važi*

$$\forall x, y_1, y_2,\ \ ((x, y_1) \in f\ \wedge\ (x, y_2) \in f)\ \Rightarrow\ y_1 = y_2.$$

✎ Uobičajeno je da umesto $(x, y) \in f$ pišemo $f(x) = y$.

✎ ***Slika skupa*** A funkcijom f (ukoliko je funkcija f definisana na skupu A) je skup $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$. Na primer, za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisanu sa $f(x) = x^2 - 2$ je $f((-3, 1)) = [-2, 7)$.

Definicija 2.2 ***Inverzna funkcija*** *f^{-1} funkcije f je inverzna relacija relacije f, ukoliko je f^{-1} funkcija.*

Definicija 2.3 *Za pojam funkcije su vezani i sledeći pojmovi.*

- ***Domen funkcije*** *f je $\mathcal{D}(f) = \{x \mid \exists y,\ (x, y) \in f\}$ (skup prvih komponenti parova iz f);*
- ***Kodomen funkcije*** *f je $\mathcal{K}(f) = \{y \mid \exists x,\ (x, y) \in f\}$ (skup drugih komponenti parova iz f);*
- ***Funkcija*** *f* ***iz skupa*** *A* ***u skup*** *B, u oznaci $f : A \to B$, je binarna relacija $f \subseteq A \times B$ takva da je $\mathcal{D}(f) = A$ i $\mathcal{K}(f) \subseteq B$ (skup svih prvih komponenti je tačno skup A, a skup svih drugih komponenti je podskup skup B);*
- *Funkcija f je* **injektivna**, *u oznaci f je* "1-1", *ako u f ne postoje dva različita uređena para sa jednakim drugim komponentama;*
- *Funkcija $f : A \to B$ je* **sirjektivna**, *u oznaci f je* "na", *ako je $\mathcal{K}(f) = B$ (svaki element skupa B se pojavljuje bar jednom kao druga komponenta u f);*
- ***Identička funkcija skupa*** *A je funkcija $i_A : A \to A$ definisana sa $i_A(x) = x$.*

Definicija 2.4 *Ako za funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ važi da je $\mathcal{K}(f) \subseteq C$, tada je* ***kompozicija funkcija*** *$h = g \circ f$ funkcija $h : A \to D$ definisana sa $h(x) = g(f(x))$. funkcija.*

Funkcije možemo definisati na razne načine. Neka je na primer $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \mathbb{N}$. Jedna ista funkcija $f : A \to B$ može biti zadana na sledećih nekoliko načina:

- nabrajanjem elemenata: $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$,
- opisno, pomoću drugih poznatih relacija i/ili operacija: $f = \left\{ \left(x, x^2\right) \;\middle|\; x \in A \right\}$ tj. $f(x) = x^2$, $x \in A$,
- sledećom vrstom zapisa: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$,
- grafički.

☞ Ako su skupovi A i B konačni, funkcija $f : A \to B$ može biti injektivna samo ako je skup A ne veće kardinalnosti od kardinalnosti skupa B.

☞ Ako su skupovi A i B konačni, funkcija $f : A \to B$ može biti sirjektivna ako i samo ako je skup A ne manje kardilnosti od kardinalnosti skupa B.

☞ Ako su skupovi A i B konačni, funkcija $f : A \to B$ može biti bijektivna samo ako su skupovi A i B iste kardinalnosti.

☞ Kompozicija injektivnih funkcija je injektivna funkcija. Kompozicija $f \circ g$ sirjektivnih funkcija $g : A \to B$ i $f : \mathcal{K}(g) \to C$ je sirjektivna funkcija. Sledi i da je kompozicija bijektivnih funkcija bijektivna funkcija.

☞ Inverzna funkcija funkcije f postoji ako i samo ako je funkcija f injektivna. Za funkciju $f : A \to B$ postoji inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$ ako i samo ako je funkcija f bijektivna, i tada je $f \circ f^{-1} = i_B$ i $f^{-1} \circ f = i_A$.

Primer 2.1 *Ispitati da li su f_i funkcije, a ako jesu, ispitati njihove osobine:*

(a) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4\}$, $f = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 3)\}$.

f nije funkcija zbog $(1, 1) \in f$ i $(1, 2) \in f$.

(b) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4\}$, $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$.

Relacija f jeste funkcija, ali nije funkcija iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{2, 3, 4\}$ jer je $\mathcal{K}(f) = \{1, 2, 3\} \nsubseteq \{2, 3, 4\}$. Takođe, funkcija f nije injektivna jer je $(2, 3) \in f$ i $(4, 3) \in f$. Međutim, ona jeste funkcija iz skupa $\{1, 2, 3, 4\} = \mathcal{D}(f)$ u npr. skup $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathcal{K}(f)$, pri čemu tada nije sirjektivna jer ne *postoji $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ takvo da je $f(x) = 4$. Ako je posmatramo kao funkciju iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{1, 2, 3\}$, tada* jeste *sirjektivna.*

(c) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{2, 3, 4\}$, $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 3)\}$.

Relacija f jeste funkcija iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{2, 3, 4\}$ jer je $\mathcal{D}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ i $\mathcal{K}(f) = \{3, 4\} \nsubseteq \{2, 3, 4\}$. Funkcija f nije injektivna jer je $(1, 3) \in f$ i $(3, 3) \in f$, a nije ni sirjektivna jer ne *postoji $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ takvo da je $f(x) = 2$. Ako je posmatramo kao funkciju iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ u skup $\{3, 4\}$, tada* jeste *sirjektivna.*

Primetimo da ne postoji skup B takav da je funkcija $f : \{1, 2, 3, 4\} \to B$ injektivna (razlog zbog kojeg f nije injektivna ostaje i pri promeni skupa B).

(d) $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$, $\quad f = \{(2,a),(3,d),(4,c)\}$.

Relacija f jeste funkcija, ali nije funkcija iz skupa $\{1,2,3,4\}$ u skup $\{2,3,4\}$, već npr. funkcija iz skupa $\mathcal{D}(f) = \{2,3,4\}$ u skup $\{2,3,4\}$. Pri tome je f injektivna, a sirjektivna nije jer ne *postoji $x \in \{2,3,4\}$ takvo da je $f(x) = b$. Ako je posmatramo kao funkciju iz skupa $\{2,3,4\}$ u skup $\{a,c,d\}$, tada* jeste *i sirjektivna, tj. u tom slučaju je bijektivna.*

(e) $f : \{1,2,3,4\} \to \{2,3,4\}$, $\quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

f jeste funkcija iz skupa $\{1,2,3,4\}$ u skup $\{2,3,4\}$, i pri tome nije injektivna jer je npr. $(1,2) \in f$ i $(2,2) \in f$, a nije ni sirjektivna jer ne *postoji $x \in \{1,2,3,4\}$ takvo da je $f(x) = 4$.* ✔

Primer 2.2 *Neka je $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & a & b \end{pmatrix}$ i neka je $g : \{a,b\} \to \{\square, \triangle\}$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ \triangle & \square \end{pmatrix}$. Za funkcija f ne postoji inverzna funkcija, a inverzna funkcija funkcije $g : \{a,b\} \to \{\square,\triangle\}$ je funkcija $g^{-1} : \{\square,\triangle\} \to \{a,b\}$, $g^{-1} = \begin{pmatrix} \square & \triangle \\ b & a \end{pmatrix}$. Kompozicija funkcija $f \circ g$ ne postoji jer $\mathcal{K}(g) = \{\square,\triangle\}$ nije podskup skupa $\mathcal{D}(f) = \{1,2,3\}$. Kompozicija $h = g \circ f$ je funkcija $h : \{1,2,3\} \to \{\square,\triangle\}$ definisana sa $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \square & \triangle & \square \end{pmatrix}$.* ✔

♠ Ako je f funkcija iz skupa $\mathbb{R}$ u skup $\mathbb{R}$, osobine *injektivnosti* i *sirjektivnosti* (tj. *bijektivnosti*) možemo ispitivati i „grafički", razmatranjem osobina grafika funkcije, tj. razmatranjem pitanja koliko preseka ima grafik funkcije sa pravama koje su paralelne sa x-osom, odnosno sa pravama čije su jednačine oblika $y = c$, za razne $c \in \mathbb{R}$ (vidi npr. zadatak **2.1**):

("1-1") funkcija f je *injektivna* ako i samo ako svaka prava paralelna sa x-osom ima najviše jedan (jedan ili nijedan) presek sa grafikom funkcije f (ako se u svako $y = c$ preslikava najviše jedan element $x \in \mathbb{R}$);

("na") funkcija f je *sirjektivna* ako i samo ako svaka prava paralelna sa x-osom ima bar jedan (jedan ili više) presek sa grafikom funkcije f (ako se u svako $y = c$ preslikava bar jedan element $x \in \mathbb{R}$);

($\rightleftarrows$) funkcija f je *bijektivna* ako i samo ako svaka prava paralelna sa x-osom ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije f (ako se u svako $y = c$ preslikava jedan i samo jedan element $x \in \mathbb{R}$).

Slično možemo postupiti i sa funkcijama definisanim na intervalima i drugim podskupovima skupa $\mathbb{R}$.

♠ Ako je funkcija $f : A \to B$ zadana aritmetičkim izrazom na nekom skupu brojeva A (npr. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$), osobine *injektivnosti* i *sirjektivnosti* (i *bijektivnosti*) možemo ispitivati i analizom rešivosti odgovarajućih jednačine $f(x) = c$ po promenljivoj $x \in A$ za razne $c \in B$ (vidi zadatak **2.1**):

("1-1") funkcija f je *injektivna* ako i samo ako za svako $c \in B$ jednačina $f(x) = c$ ima najviše jedno (jedno ili nijedno) rešenje po $x \in A$ (ako se u svako $c \in B$ preslikava najviše jedan element $x \in A$);

("na") funkcija f je *sirjektivna* ako i samo ako za svako $c \in B$ jednačina $f(x) = c$ ima bar jedno (jedno ili više) rešenje po $x \in A$ (ako se u svako $c \in B$ preslikava bar jedan element $x \in A$);

($\rightleftarrows$) funkcija f je *bijektivna* ako i samo ako za svako $c \in B$ jednačina $f(x) = c$ ima tačno jedno rešenje po $x \in A$ (ako se u svako $c \in B$ preslikava jedan i samo jedan element $x \in A$).

Zadatak 2.1 *Ispitati da li su f_i funkcije, a ako jesu, ispitati njihove osobine:*

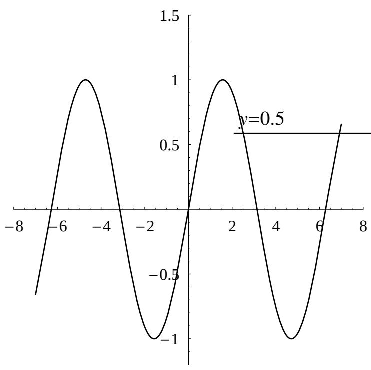
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x;$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2;$

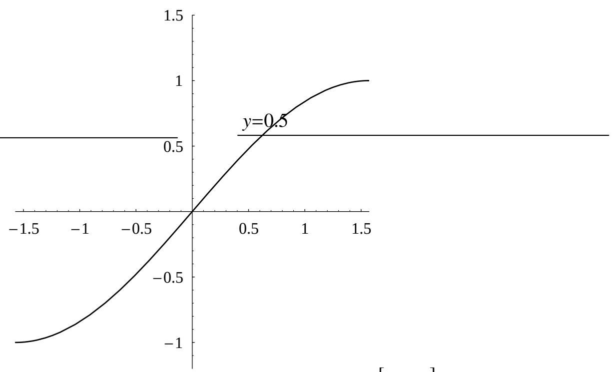
(c) $f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1};$

➥ ***Rešenje:*** Pri ispitivanju osobina funkcija možemo analizirati i grafik, ili razmatrati rešivost jednačine $f(x) = c$ po promenljivoj x, za razne vrednosti c (vidi prethodne komentare).

(a) Funkcija $f(x) = \sin x$ jeste definisana na celom $\mathbb{R}$, i pri tome je $\mathcal{K}(f) = [-1, 1]$, pa jeste $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a takođe je i npr. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, kao i $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, i $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, itd.



Grafik funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

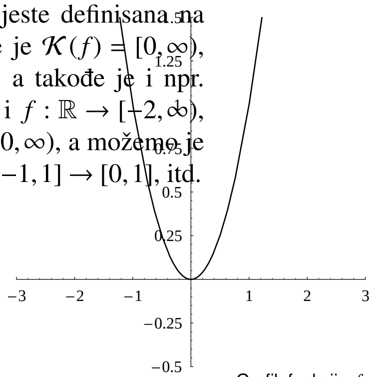


Grafik funkcije $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

("1-1") Gledana kao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija $f(x) = \sin x$ nije injektivna jer je npr. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, odnosno prava $y = \frac{1}{2}$ ima više preseka sa grafikom funkcije (npr. u tačkama $x = \frac{\pi}{6}$ i $x = \frac{5\pi}{6}$), odnosno jednačina $f(x) = \frac{1}{2}$ ima više rešenja po $x \in \mathbb{R}$ (npr. $x = \frac{\pi}{6}$ i $x = \frac{5\pi}{6}$ jesu rešenja te jednačine). Naravno, nije injektivna ni kao $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, a ako je posmatramo kao npr. $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ ili $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, tada jeste injektivna jer za svako $c \in \mathbb{R}$ (tj. svako $c \in [-1, 1]$) prava $y = c$ ima najviše jedan (jedan ili nijedan) presek sa grafikom funkcije na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, odnosno jednačina $f(x) = c$ ima najviše jedno rešenje po $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

("na") Gledana kao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija $f(x) = \sin x$ nije sirjektivna jer npr. ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takvo da je $f(x) = 2$, odnosno prava $y = 2$ nema ni jedan presek sa grafikom funkcije, odnosno jednačina $f(x) = 2$ nema ni jedno rešenje po $x \in \mathbb{R}$. Naravno, nije sirjektivna ni kao $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, a ako je posmatramo kao $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ ili $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, tada jeste sirjektivna jer za svako $c \in [-1, 1]$ prava $y = c$ ima bar jedan presek sa grafikom funkcije, odnosno jednačina $f(x) = c$ ima bar jedno rešenje po $x \in \mathbb{R}$ odnosno po $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Funkcija $f(x) = x^2$ jeste definisana na celom $\mathbb{R}$, i pri tome je $\mathcal{K}(f) = [0, \infty)$, pa jeste $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a takođe je i npr. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, kao i $f : \mathbb{R} \to [-2, \infty)$, ili npr. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, a možemo je posmatrati i kao $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, itd.

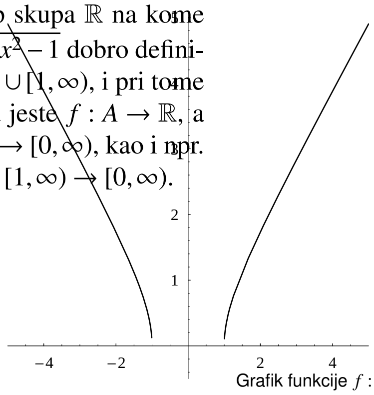


Grafik funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

("1-1") Ako je posmatramo kao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija $f(x) = x^2$ nije injektivna jer je npr. $f(-1) = f(1) = 1$ (prava $y = 1$ ima dva preseka sa grafikom funkcije u tačkama $x = -1$ i $x = 1$; jednačina $f(x) = 1$ ima dva rešenja po $x \in \mathbb{R}$). Naravno, nije injektivna ni kao $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, a ako je posmatramo kao npr. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ili $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, tada jeste injektivna.

("na") Ako je posmatramo kao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija $f(x) = x^2$ nije sirjektivna jer npr. ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takvo da je $f(x) = -1$ (prava $y = -1$ nema preseka sa grafikom funkcije; jednačina $f(x) = -1$ nema rešenja po $x \in \mathbb{R}$). Jeste sirjektivna kao $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ili npr. kao $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Gledana kao $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, funkcija je bijektivna.

(c) Maksimalni podskup skupa $\mathbb{R}$ na kome je funkcija $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dobro definisana je $A = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, i pri tome je $\mathcal{K}(f) = [0, \infty)$, pa jeste $f : A \to \mathbb{R}$, a takođe je i npr. $f : A \to [0, \infty)$, kao i npr. $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ ili $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$.



Grafik funkcije $f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$

("1-1") Ako je posmatramo kao $f : A \to \mathbb{R}$, funkcija $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ nije injektivna jer je npr. $f\left(-\sqrt{5}\right) = f\left(\sqrt{5}\right) = 2$. Gledana kao npr. $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, jeste injektivna.

("na") Gledana kao $f : A \to \mathbb{R}$ ili $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, funkcija $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ nije sirjektivna jer npr. ne postoji x takvo da je $f(x) = -1$. Jeste sirjektivna kao $f : A \to [0,\infty)$ ili $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$. ☑

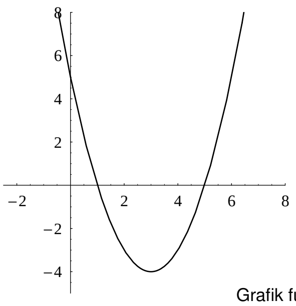
Zadatak 2.2 *Neka je A najveći podskup od $\mathbb{R}$ a B najmanji podskup skupa $\mathbb{R}$ za koje je dobro definisana funkcija $f : A \to B$. Za date funkcije f odrediti skupove A i B, i ispitati injektivnost i sirjektivnost funkcija f.*

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$,

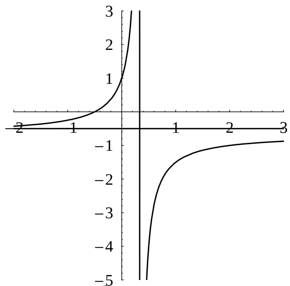
(b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-3x}$,

(c) $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

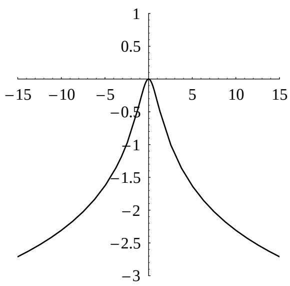
➥ ***Rešenje:***



Grafik funkcije $f(x) = x^2 - 6x + 5$



Grafik funkcije $f(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$



Grafik funkcije $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Kako skup B treba da je minimalan, njega će činiti samo oni $y \in \mathbb{R}$ za koje postoji $x \in A$ takvo da je $f(x) = y$, te je u stvari $B = \mathcal{K}(f)$. Odatle onda sledi da će (zbog načina na koji je skup B konstruisan) funkcije f biti sirjektivne.

(a) Kvadratna funkcija f je definisana za svaki realan broj x, te je $A = \mathbb{R}$. Koreni ove kvadratne funkcije su $x_1 = 1$ i $x_2 = 5$, te konveksna kvadratna funkcija f dostiže svoj minimum u tački $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3$, a vrednost minimuma je $f(3) = -4$. Stoga je $B = [-4,\infty)$. Funkcija nije injektivna jer je npr. $f(1) = f(5) = 0$.

(b) Domen funkcije $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-3x}$ je očigledno skup $A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Pitanje kodomena B i injektivnosti funkcije f možemo rešiti razmatranjem rešivosti jednačine $f(x) \overset{[*]}{=} y$. Naime, kodomen B je skup onih $y \in \mathbb{R}$ za koje postoji bar jedno $x \in A$ za koje važi $[*]$, a funkcija f je injektivna ako i samo ako za svako y jednačina $[*]$ ima ne više od jednog rešenja (vidi komentar na strani 25):

$$f(x) = y \;/\cdot(1-3x) \neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+1 = y(1-3x) \quad\Leftrightarrow\quad x(2+3y) \overset{[**]}{=} y-1.$$

Jednačina [∗∗] nema rešenja po x za $y = -\frac{2}{3}$, a za sve ostale realne brojeve y ima jedistveno rešenje $x = \dfrac{y-1}{2+3y}$, te je $B = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, i funkcija je injektivna.

(c) Očigledno je $A = \mathbb{R}$. Funkcija f je parna pa stoga nije injektivna (važi npr. $f\left(-\sqrt{3}\right) = f\left(\sqrt{3}\right) = \ln \frac{1}{2}$). Sada određujemo kodomen B funkcije f.

Prvi način

Kako je

$$f(x) \overset{[***]}{=} y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = e^y \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{x^2+1} = e^{2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^{2y}} = x^2+1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{e^{2y}} - 1} = \pm\sqrt{\frac{1-e^{2y}}{e^{2y}}},$$

a pri tome je $\forall y,\ e^{2y} > 0$, jednačina [∗ ∗ ∗] ima rešenja po x za one y za koje je $1 - e^{2y} \geq 0$. Tako dobijamo

$$1 - e^{2y} \geq 0 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad e^{2y} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 0.$$

Dakle, $B = (-\infty, 0]$.

[1] - Kvadriranje pozitivnih brojeva $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ i e^y je bijektivna transformacija (samo primenom bijektivnih transformacija sigurno dobijamo ekvivalentnu jednakost, a inače to ne mora biti slučaj).

Drugi način

Funkcija $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ je kompozicija funkcija $f = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$, gde je $g_1(x) = x^2 + 1$, $g_2(z) = \sqrt{z}$, $g_3(t) = \frac{1}{t}$ i $g_4(w) = \ln w$. Za $x \in A = \mathbb{R}$ je skup slika funkcijom g_1 skup $\mathcal{K}(g_1) = [1, \infty)$. Funkcija $g_2 : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ je monotono rastuća i neograničena odozgo, te je $\mathcal{K}(g_2) = [g_2(1), \infty) = [1, \infty)$. Funkcija $g_3 : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ je monotono opadajuća, pozitivna na skupu na kome je posmatramo, i važi $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} = 0$, te je $\mathcal{K}(g_3) = (0, g_3(1)] = (0, 1]$. Funkcija $g_4 : (0,1] \to \mathbb{R}$ je monotono rastuća i neograničena odozdo na skupu na kojem je posmatramo, te je $B = \mathcal{K}(g_4) = (-\infty, g_4(1)] = (-\infty, 0]$. ☑

Zadatak 2.3 *Za koje vrednosti parametara $a, b, c \in \mathbb{R}$ je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definisana sa $f(x) = ax^2 + bx + c$ injektivna, a za koje je sirjektivna?*

➥ ***Rešenje:*** Za $a \neq 0$ je f kvadratna funkcija koja nije ni injektivna ni sirjektivna (npr. za funkciju $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ je $f(-2) = f(4) = -5$, i ne postoji x takvo da je $f(x) = -x^2 + 2x + 3 = 10$ jer rešenja kvadratne jednačine $-x^2 + 2x + 3 = 10$, odnosno $-x^2 + 2x - 7 = 0$, a to su $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-28}}{-2}$, nisu realni brojevi). Za $a = 0$ je f linearna funkcija čiji je grafik prava; ako je pri tome $b = 0$, tada je to prava koja je paralelna sa x-osom te funkcija nije ni injektivna ni sirjektivna (vidi komentare na strani 25), a za $b \neq 0$ je prava koja je ukoso u odnosu na x-osu i tada je funkcija f i injektivna i sirjektivna. ☑

Zadatak 2.4 *Za realne funkcije* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *i* $h:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ *definisane sa* $f(x)=2x+3$, $g(x)=x^2-2$ *i* $h(x)=\ln^2(x-1)$ *naći funkcije* $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$, $f\circ h$ *i* $h\circ f$ *ukoliko postoje, kao i* f^{-1}, g^{-1} *i* h^{-1} *ukoliko postoje. Izračunati* $f(1-2x)$ *i* $g(1-2x)$.

➥ ***Rešenje:***

$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(x^2-2\right)=2\cdot\left(x^2-2\right)+3=2x^2-1,$

$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+3)=(2x+3)^2-2=4x^2+12x+7,$

$f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+3)=2\cdot(2x+3)+3=4x+9,$

$g\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (g\circ g)(x)=g(g(x))=g\left(x^2-2\right)=\left(x^2-2\right)^2-2=x^4-4x^2+2,$

$f\circ h:(1,\infty)\to\mathbb{R},\quad (f\circ h)(x)=f(h(x))=f\left(\ln^2(x-1)\right)=2\ln^2(x-1)+3,$

$f(1-2x)=2(1-2x)+3=-4x+5,$

$g(1-2x)=(1-2x)^2-2=4x^2-4x-1.$

Funkcija $h\circ f$ ne postoji jer $\mathcal{K}(f)=\mathbb{R}\not\subseteq(1,\infty)=\mathcal{D}(h)$ (npr. ne postoji vrednost $h(f(-4))=h(-5)=\ln^2(-6)$).

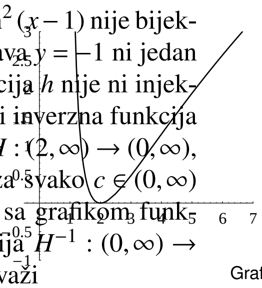
Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$ je bijektivna, te postoji njoj inverzna funkcija $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Izraz koji definiše funkciju f^{-1} možemo dobiti rešavajući po y jednačinu $f(x)=y$:

$$f(x)=y\quad\Leftrightarrow\quad 2x+3=y\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2},$$

te je $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ inverzna funkcija funkcije f.

Funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2$ nema inverznu jer nije bijektivna (npr. nije injektivna jer je $g(-1)=g(1)=-1$).

Funkcija $h:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln^2(x-1)$ nije bijektivna (npr. prava $y=1$ ima dva, a prava $y=-1$ ni jedan presek sa grafikom funkcije, te funkcija h nije ni injektivna ni sirjektivna). Stoga ne postoji inverzna funkcija funkcije h. Međutim, npr. funkcija $H:(2,\infty)\to(0,\infty)$, $H(x)=\ln^2(x-1)$ jeste bijektivna (za svako $c\in(0,\infty)$ prava $y=c$ ima tačno jedan presek sa grafikom funkcije), te postoji njoj inverzna funkcija $H^{-1}:(0,\infty)\to(2,\infty)$, pri čemu za svako $y\in(0,\infty)$ važi



Grafik funkcije $h(x)=\ln^2(x-1)$

$$H(x)=y\quad\Leftrightarrow\quad \ln^2(x-1)=y\quad\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\quad \ln(x-1)=\sqrt{y}\quad\Leftrightarrow\quad x=e^{\sqrt{y}}+1,$$

te je funkcija $H^{-1}:(0,\infty)\to(2,\infty)$ definisana izrazom $H^{-1}(x)=e^{\sqrt{x}}+1$.

[1] - Za $x>2$ je $\ln(x-1)>0$, a takođe je i $y>0$, te korenovanjem zaista dobijamo ekvivalentnu jednakost.

☑

Primetimo da kompozicija funkcija $\circ$, u opštem slučaju, nije komutativna operacija - npr. u prethodnom zadatku je $f\circ g\neq g\circ f$. Samo za neke funkcije važi zakon komutativnosti. Na primer, za funkcije $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definisane sa $f(x)=2x$ i $g(x)=-3x$ je $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=-6x$.

Zadatak 2.5 *Neka je $A = \{a,b,c\}$, i neka su funkcije $f : A \to A$ i $g : A \to A$ definisane sa $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \end{pmatrix}$. Odrediti funkcije f^{-1}, g^{-1}, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ i $g \circ g$, ukoliko postoje.*

➥ ***Rešenje:*** Funkcija g^{-1} ne postoji jer funkcija g nije injektivna. Sve ostale funkcije postoje kao funkcije iz skupa A u skup A.

$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = f$, $\quad f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $\quad g \circ f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \end{pmatrix}$,

$f \circ f = f \circ f^{-1} = i_A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, $\quad g \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & a \end{pmatrix}$.

☑

Zadatak 2.6 *Za date skupove A i B i date relacije $f_i \subseteq A \times B$ ispitati da li su $f_i$funkcije, i ako jesu, ispitati da li su f_i funkcije iz skupa A u skup B, da li su f_i injektivne funkcije iz A u B, i da li su sirjektivne funkcije iz A u B? Navesti još (ukoliko je moguće) još po jedan primer injektivne, sirjektivne i bijektivne funkcije iz datog skupa A u dati skup B.*

(a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{a,b,c\}$,

$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$,
$f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,a),(5,b),(1,c)\}$,
$f_3 = \{(1,a),(2,a),(3,a),(4,a),(5,a)\}$,
$f_4 = \{(1,c),(2,b),(3,b),(5,a),(4,c)\}$.

(b) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$,

$f_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(1,d)\}$,
$f_2 = \{(1,a),(2,a)\}$,
$f_3 = \{(1,d),(2,a),(3,c)\}$.

➥ ***Rešenje:***

(a)

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_i je funkcija?	DA	ne	DA	DA
$f_i : A \to B$?	ne	ne	DA	DA
$f_i : A \overset{\text{"1-1"}}{\to} B$?	ne	ne	ne	ne
$f_i : A \overset{\text{"na"}}{\to} B$?	ne	ne	ne	DA

Sirjektivna: $f = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,c),(5,c)\}$.

Injektivna: ne postoji jer je $|A| > |B|$.

Bijektivna: ne postoji jer ne postoji injektivna.

(b)

	f_1	f_2	f_3
f_i je funkcija?	ne	DA	DA
$f_i : A \to B$?	ne	ne	DA
$f_i : A \overset{\text{"1-1"}}{\to} B$?	ne	ne	DA
$f_i : A \overset{\text{"na"}}{\to} B$?	ne	ne	ne

Sirjektivna: ne postoji jer je $|A| < |B|$.

Injektivna: $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$.

Bijektivna: ne postoji jer ne postoji sirjektivna. ☑

Zadatak 2.7 *Neka je* $f_1 = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{N}\}$, $f_2 = \{(x, x-1) \mid x \in \mathbb{N}\}$, $f_3 = \{(x-1, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, $f_4 = \{(x+1, x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Ispitati da li su zadane relacije funkcije, da li su funkcije iz zadanog skupa u zadani skup, i da li su injektivne odnosno sirjektivne funkcije iz zadanog skupa u zadani skup.

➥ ***Rešenje:***

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_i je funkcija?	DA	DA	DA	DA
$f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?	DA	ne	ne	ne
$f_i : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$?	ne	ne	ne	DA
$f_i : \mathbb{N} \overset{\text{"1-1"}}{\to} \mathbb{N}$?	DA	ne	ne	ne
$f_i : \mathbb{N} \overset{\text{"na"}}{\to} \mathbb{N}$?	ne	ne	ne	ne
$f_i : \mathbb{N} \cup \{0\} \underset{\text{"na"}}{\overset{\text{"1-1"}}{\to}} \mathbb{N}$?	ne	ne	DA	ne

☑

Zadatak 2.8 *Odrediti kodomen i inverznu funkciju (ako postoji) za sledeće funkcije (pri čemu ih sve posmatramo kao funkcije $f : D(f) \to K(f)$):*

(a) $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

(b) $f = \{(x, 3x+4) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(c) $f = \left\{\left(x, x^3\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$

(d) $f = \left\{\left(x, x^2\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$

(e) $f = \left\{\left(x, x^2\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^+\right\}$

(f) $f = \{(x, 2^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(g) $f = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(h) $f = \left\{\left(x, \dfrac{2x-1}{5-3x}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge 5-3x \neq 0\right\}$

➥ ***Rešenje:***

(a) $\mathcal{K}(f) = \{2,3,4\}$, $\quad f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$.

(b) $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1} = \left\{\left(x, \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

(c) $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1} = \left\{\left(x, \sqrt[3]{x}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$.

(d) $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}^+$, $\quad f^{-1}$ ne postoji jer f nije injektivna.

(e) $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}^+$, $\quad f^{-1} = \left\{\left(x, \sqrt{x}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^+\right\}$.

(f) $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}^+$, $\quad f^{-1} = \left\{(x, \log_2 x) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^+\right\}$.

(g) $\mathcal{K}(f) = \mathcal{K}(f)$, $\quad f^{-1}$ ne postoji jer f nije bijektivna.

(h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$, $\quad \mathcal{K}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$,

$$f^{-1} = \left\{ \left(x, \frac{5x+1}{3x+2} \right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge 3x+2 \neq 0 \right\}.$$

☑

Glava 3

Kombinatorika

⚀ *Biranje elemenata iz različitih grupa (ili pravilo proizvoda)*

Posmatrajmo r različitih skupova $A_i = \left\{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n_i}\right\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Ukoliko iz svakog skupa biramo po jedan element (biramo uređenu r-torku $\left(a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \ldots, a_{r,j_r}\right)$ gde je $j_i \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$), ukupan broj ovakvih izbora r-torki je

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r \tag{3.1}$$

(jer broj uređenih r-torki kod kojih je svaka i-ta komponenta iz skupa A_i jeste broj $N = |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r|$).

Primer 3.1 *Miloš ima belu, crvenu, žutu i plavu košulju, crne i plave pantalone, i po par zelenih, ljubičastih i crvenih cipela. Izračunajmo na koliko različitih načina Miloš može da se obuče.*

Miloš iz 4*-elementnog skupa košulja* $K = \{\mathsf{bela}, \mathsf{crvena}, \mathsf{žuta}, \mathsf{plava}\}$ *bira jednu košulju, iz* 2*-elementnog skupa pantalona* $P = \{\mathsf{crne}, \mathsf{plave}\}$ *bira jedne pantalone, i iz* 3*-elementnog skupa cipela* $C = \{\mathsf{zelene}, \mathsf{ljubičaste}, \mathsf{crvene}\}$ *bira jedan par cipela. Stoga je broj takvih izbora* $|K| \cdot |P| \cdot |C| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. ✔

☞ Osnovne kombinatorne pojmove odnosne načine izbora pri biranju elemenata nekih skupova možemo podeliti po dva kriterijuma:

❶ da li je pri biranju bitan redosled izabranih elemenata ili nije; u slučaju kada je redosled izabranih elemenata bitan, tada govorimo o varijacijama (i permutacijama koje su specijalan oblik varijacija), a u slučaju kada redosled izabranih elemenata nije bitan, tada govorimo o kombinacijama;

❷ da li je pri biranju bitan jedan element možemo birati više puta ili ne; s obzirom na ovaj kriterijum govorimo o varijacijama i kombinacijama *sa* ili *bez* ponavljanja.

⚁ *Varijacije bez ponavljanja*

Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ koji ima n elemenata. Ako iz ovog skupa r puta (pri čemu je $r \leq n$) biramo po jedan element tako da pri svakom biranju možemo birati samo elemente koji nisu bili prethodno izabrani, odnosno konstruišemo uređenu r-torku elemenata skupa A kod koje su sve komponente različite, broj ovakvih izbora r-torki je

$$V_r^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{3.2}$$

Dakle, ***varijacija* r*-te klase bez ponavljanja skupa* A *od* n *elemenata*** je injektivna funkcija $\{1, 2, \ldots, r\} \xrightarrow{1-1} A$, pri čemu je V_r^n broj varijacija r-te klase bez ponavljanja skupa od n elemenata. Specijalno, kada je $r = n$, tj. sve elemnte skupa A raspoređujemo u niz, tada govorimo o *permutacijama bez ponavljanja* (skraćeno *permutacijama*) skupa od n elemenata. Dakle, ***permutacija bez ponavljanja skupa* A *od* n *elemenata*** je bijektivna funkcija $\{1, 2, \ldots, r\} \xrightarrow[\text{"na"}]{1-1} A$, pri čemu broj takvih permutacija označavamo sa P_n i on iznosi

$$P_n = V_n^n = n!. \tag{3.3}$$

Primer 3.2 *Izračunajmo koliko se različitih* 3*-cifrenih brojeva može napisati korišćenjem neparnih cifara* 1, 3, 5, 7 *i* 9*, tako da sve cifre u napisanom broju budu različite?*

Kada konstruišemo 3*-cifreni broj, iz* 5*-članog skupa cifara* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ *biramo* 3 *puta po jednu cifru, pri čemu je redosled cifara bitan i svaku cifru možemo upotrebiti najviše jednom. Sledi da se radi o varijacijama bez ponavljanja, te ovakvih brojeva ima ukupno* $V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. ✔

Primer 3.3 *Izračunajmo na koliko različitih načina se* 6 *vojnika može rasporediti u vrstu?*

Sve elemente skupa vojnika raspoređujemo u niz, te se radi o permutacijama. Dakle, ovakvih rasporeda ima $P_6 = 6! = 720$. ✔

Varijacije sa ponavljanjem

Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata. Ako iz ovog skupa r puta biramo po jedan element tako da pri svakom biranju možemo ponovo izabrati i neki od prethodno izabranih, odnosno konstruišemo uređenu r-torku elemenata skupa A, broj ovakvih izbora r-torki je

$$\overline{V}_r^n = n^r. \tag{3.4}$$

Prema tome, ***varijacija* r*-te klase sa ponavljanjem skupa* A *od* n *elemenata*** je funkcija $\{1, 2, \ldots, r\} \rightarrow A$, pri čemu je $\overline{V}_r^n$ broj varijacija r-te klase sa ponavljanjem skupa od n elemenata.

Primer 3.4 *Izračunajmo koliko različitih* 3*-cifrenih brojeva može napisati korišćenjem neparnih cifara* 1, 3, 5, 7 *i* 9*?*

Kada konstruišemo 3*-cifreni broj, iz* 5*-članog skupa cifara* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ *biramo* 3 *puta po jednu cifru, pri čemu je redosled cifara bitan (i svaku cifru možemo koristiti* *više puta). Sledi da se radi o varijacijama sa ponavljanjem, te ovakvih brojeva ima ukupno* $\overline{V}_3^5 = 5^3 = 125$. ✔

Kombinacije bez ponavljanja

Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata. Ako iz ovog skupa biramo podskup od k (pri čemu je$k \le n$) elemenata (različitih, i redosled tih elemenata nije bitan), broj ovakvih izbora k-članih podskupova, tj. broj ***kombinacija bez ponavljanja od*** n ***elemenata klase*** k je

$$C_k^n = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}. \tag{3.5}$$

Naime, svaki k-člani podskup skupa A možemo jednoznačno identifikovati sa uređenom n-torkom čije su komponente nule i jedinice, pri čemu nula na i-toj poziciji znači da element a_i ne pripada tom k-članom podskupu, a jedinica na i-toj poziciji znači da element a_i pripada tom k-članom podskupu; prema tome, broj k-članih podskupova skupa A je jednak broju uređenih n-torki kod kojih su k komponenti jedinice i $(n-k)$ komponenti nule; ako bi smo razlikovali sve jedinice između sebe i sve nule između sebe, broj takvih n-torki bi bio $n!$; pošto jedinice između sebe ne razlikujemo, tada taj broj moramo podeliti sa $k!$ jer k jedinica možemo permutovati na $k!$ načina, i još ga treba podeliti sa $(n-k)!$ jer $(n-k)$ nula možemo između sebe ispermutovati na $(n-k)!$ načina; dakle $C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Ukoliko skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ delimo na $k \le n$ podskupova $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pri čemu je unapred fiksiran broj $n_i = |A_i|$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ elemenata svakog od ovih podskupova, i pri čemu je $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ (tj. pravimo particiju skupa A na podskupove sa zadanim brojem elemenata), broj ovakvih podela na podskupove iznosi

$$N = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!} \tag{3.6}$$

(prebrojavanje možemo izvršiti analogno kao u prethodnom slučaju koji je u stvari specijalan slučaj ovoga za $k = 2$); broj ovakvih podela obeležavamo sa $P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ i nazivamo ih ***permutacijama sa ponavljanjem od*** n ***elemenata klase*** $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Dakle, podela skupa A na skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k$ koji su redom kardinalnosti $n_1, n_2, \ldots, n_k$, ekvivalentna je sa izborom uređene n-torke elemenata skupa A u kojoj ne razlikujemo elemente koji pripadaju istom skupu A_i, tj. sa izborom n-torke u kojoj se za svako $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ pojavljuje tačno n_i kopija nekog elemenata.

Primer 3.5 *Izračunajmo na koliko različitih načina se iz odeljenja koje ima* 25 *učenika može izabrati* 2*-člana delegacija za đački parlament?*

Iz skupa od 25 *elemenata biramo podskup od* 2 *učenika, te se radi o kombinacijama bez ponavljanja, i ovakvih izbora ima* $C_2^{25} = \binom{25}{2} = \frac{25!}{2!\cdot 23!} = \frac{25\cdot 24}{2\cdot 1} = 300$. ✔

Primer 3.6 *Pomoću* 3 *slova* A*,* 2 *slova* B *i* 5 *slova* C *se konstruiše* 10*-slovna „šifra”. Izračunajmo na koliko se različitih „šifri” može konstruisati na ovaj način?*

Kako se radi o modelu opisanom kao permutacije sa ponavljanjem, opisanih „šifri” ima $P^{10}_{3,2,5} = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3!\cdot 2!} = 2520$. ✔

Kombinacije sa ponavljanjem

Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ od n elemenata. Ako iz ovog skupa biramo podskup od k elemenata pri čemu se svaki element može pojaviti više puta i redosled tih elemenata nije bitan, broj ovakvih izbora k-članog „podskupa”, tj. broj ***kombinacija sa ponavljanjem od*** n ***elemenata klase*** k je

$$\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}. \tag{3.7}$$

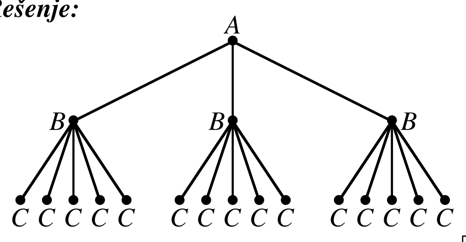
Naime, posmatrajmo jedan opisani izbor (tj. „skup”) $\mathcal{I} = \left\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\right\}$ od k elemenata skupa A ($a_{i_j} \in A$). Svaki ovakav izbor možemo na jednoznačan način identifikovati jednom uređenom $(n+k-1)$-torkom $\mathcal{I}^*$ skupa $\{*, |\}$ na sledeći način: neka se $a_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ u $\mathcal{I}$ pojavljuje m_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ puta; tada „skupu” $\mathcal{I}$ pridružujemo uređenu $(n+k-1)$-torku koja redom ima sledeće komponente: m_1 komada $*$, zatim jedno $|$, zatim m_2 komada $*$, zatim jedno $|$, …, m_{n-1} komada $*$, zatim jedno $|$, i na kraju m_n komada $*$ (primer: ako je $A = \{x, y, z, u, v\}$, tada 7-članom izboru $\mathcal{I} = \{xxx, zz, u, v\}$ pridružujemo uređenu 11-torku $(*, *, *, |, |, *, *, |, *, |, *)$). Opisani model je identičan sa modelom prebrajanja k-članih podskupova skupa od $n+k-1$ elemenata (vidi kombinacije bez ponavljanja), tako da je broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase od n elemenata jednak broju kombinacija bez ponavljanja k-te klase od $n+k-1$ elemenata: $\overline{C}_k^n = C_k^{n+k-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Primer 3.7 *U kovčegu se nalaze zlatni, srebrni i bronzani novčići. Ako iz kovčega uzimamo odjednom* 4 *novčića, izračunajmo koliko različitih izbora možemo načiniti?*

U opisanom modelu redosled izabranih novčića nije bitan (jer ih uzimamo odjednom), i u kovčegu se nalazi više od svake vrste novčića (podrazumevamo više od 4 *od svake vrste), te se radi o kombinacijama sa ponavljanjem, i ovakvih različitih izbora ima* $\overline{C}_4^3 = \binom{6}{4} = 15$. ✔

Zadatak 3.1 *Od mesta A do mesta B vode* 3 *puta, a od mesta B do mesta C vodi* 5 *puteva. Koliko puteva vodi od mesta A do mesta C preko mesta B?*

➥ ***Rešenje:***



Broj puteva je $3 \cdot 5 = 15$ (vidi pravilo proizvoda). ☑

Zadatak 3.2 *Koliko se različitih vrsta značaka može napraviti ako se značke prave u obliku kruga, trougla, kvadrata ili šestougla, i u svaku značku se upisuje jedno veliko slovo azbuke (*А,Б,В,. . . ,Ш*) i jedna cifra* $(0, 1, 2, \ldots, 9)$*?*

➥ ***Rešenje:*** Mogućih oblika ima 4, velikih slova ima 30, a cifara ima 10, te po pravilu proizvoda $\boxed{\cdot}$ različitih vrsta značaka ima $4 \cdot 30 \cdot 10 = 1200$. ☑

Zadatak 3.3 *Na koliko načina se može izabrati* 5 *knjiga iz kolekcije od* 20 *različitih knjiga?*

➥ ***Rešenje:*** Iz skupa od 20 knjiga biramo podskup od 5 knjiga (nije bitan redosled izabranih knjiga i nema ponavljanja pri izboru), te sledi da je broj mogućih izbora $C_5^{20} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$. ☑

Zadatak 3.4 *Na koliko različitih načina učesnik u igri „loto 39/7" može popuniti tiket?*

➥ ***Rešenje:*** Jedno popunjavanje krstićima 7 od 39 polja na tiketu je ekvivalentno izboru podskupa od 7 brojeva iz skupa od 39 brojeva, te sledi da načina popunjavanja ima $C_7^{39} = \frac{39!}{7!32!} = 15380937$. ☑

Zadatak 3.5 *Na koliko različitih načina možemo izabrati* 5 *karata iz špila od* 52 *karte tako da među izabranim kartama bude*

(a) tačno 2 *keca,*

(b) bar 2 *keca,*

(c) najviše 2 *keca?*

➥ ***Rešenje:*** U špilu od 52 karte se nalaze 4 keca, tako da se pri izboru 5 karata vrši izbor iz skupa od 4 keca i 48 karate koje nisu kečevi.

(a) Primenom pravila proizvoda dobijamo da je broj opisanih izbora $k_2 = m \cdot n$ gde je m broj načina da se od 4 keca odaberu 2, a n je broj načina da se od 48 karata koje nisu kečevi odaberu 3. U oba slučaja se radi o izboru podskupa gde nema ponavljanja izbora (ne može se dva puta birati jedna ista karta), te je $m = C_2^4$ i $n = C_3^{48}$, odnosno rešenje glasi $k_2 = C_2^4 \cdot C_3^{48} = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{46 \cdot 47 \cdot 48}{3 \cdot 2} = 103776$.

(b) Bar 2 keca se mogu izabrati na $k_2 + k_3 + k_4$ načina gde je k_i, $i \in \{2,3,4\}$ broj načina izbora tačno i kečeva. Brojeve k_i, $i \in \{3,4\}$ možemo dobiti na istovetno način kao broj k_2 pod (a), te je $k_2 = 103776$, $k_3 = C_3^4 \cdot C_2^{48} = \frac{4}{1} \cdot \frac{47 \cdot 48}{2} = 4512$, $k_4 = C_4^4 \cdot C_1^{48} = 1 \cdot \frac{48}{1} = 48$, tj. rešenje zadatka je $103776 + 4512 + 48 = 108336$.

(c) Najviše 2 keca se mogu izabrati na $k_0 + k_1 + k_2$ načina gde je k_i, $i \in \{0,1,2\}$ broj načina izbora tačno i kečeva. Brojeve k_0, k_1, k_2 dobijamo na isti način kao k_2, k_3, k_4 pod (a) i (b), te je
$k_2 = 103776$, $k_1 = C_1^4 \cdot C_4^{48} = \frac{4}{1} \cdot \frac{45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 778320$,
$k_0 = C_0^4 \cdot C_5^{48} = 1 \cdot \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1712304$,
odnosno rešenje zadatka glasi $1712304 + 778320 + 103776 = 2594400$.

☑

Zadatak 3.6 *Na koliko različitih načina se može izabrati* 8 *karata iz špila od* 52 *karte tako da među izabranim kartama bude*

(a) tačno 2 *sedmice i* 3 *keca,*

(b) tačno 2 *sedmice i bar* 3 *keca?*

➥ ***Rešenje:*** Označimo sa s_i broj načina izbora i sedmica, sa k_j broj načina izbora j kečeva, a sa o_k broj načina izbora k karata među kojima nema ni sedmica ni kečeva (takvih karata u špilu ima $52-4-4=44$). Analogno postupku iz zadatka 3.5, koristeći pravilo proizvoda izračunavamo

(a) $s_2k_3o_3 = C_2^4 \cdot C_3^4 \cdot C_3^{44} = 317856.$

(b) $s_2k_3o_3 + s_2k_4o_2 = C_2^4 \cdot C_3^4 \cdot C_3^{44} + C_2^4 \cdot C_4^4 \cdot C_2^{44} = 317856 + 5676 = 323532.$

☑

Zadatak 3.7 *Hor se sastoji od* 10 *članova. Na koliko načina se može tokom* 3 *dana birati po* 6 *članova za nastup za svaki od* 3 *dana turneje hora, ali tako da*

(a) sastavi za nastup različitih dana mogu biti isti,

(b) sastavi za nastup različitih dana ne mogu biti isti?

➥ ***Rešenje:***

(a) Svakog dana se bira podskup od 6 članova iz skupa od 10 članova hora (kombinacije bez ponavljanja od 10 elemenata klase 6). Dakle, primenom pravila proizvoda dobijamo da je broj izbora $C_6^{10} \cdot C_6^{10} \cdot C_6^{10} = 210^3 = 9261000$.

(b) Prvog dana se, naravno, sastav može birati na $C_6^{10} = 210$ načina, drugog dana je broj izbora za jedan manji, a trećeg dana je broj izbora još za jedan manji. Sledi da primenom pravila proizvoda dobijamo za ukupan broj načina biranja $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9129120$.

☑

Zadatak 3.8 *Betoven je napisao ukupno* 9 *simfonija, Mocart* 27 *koncerata za klavir, a Šubertovih gudačkih kvarteta ima* 15.

(a) Radio stanica u večernjoj muzičkoj emisiji svakog dana pušta po jednu Betovenovu simfoniju i jedan Mocartov klavirski koncert. Koliko najviše dana zaredom stanica može da pravi različite emisije (emisije koje se razlikuju u bar jednoj od dve kompozicije koje emituje, pri čemu ne smatramo različitim emisije u kojima su iste kompozicije emitovane obrnutim redosledom)?

(b) Ako urednik pomenute emisije svake večeri pušta prvo jednu Betovenovu simfoniju, zatim jedan Mocartov klavirski koncert, i na kraju jedan Šubertov gudački kvartet, koliko dugo urednik može na ovaj način da pravi emisije?

➥ ***Rešenje:***

(a) Koristeći pravilo proizvoda dobijamo da je broj različitih emisija (broj mogućih izbora) $9 \cdot 27 = 243$.

(b) Na isti način kao pod (a) se dobija da je broj mogućih načina izbora emisija $9 \cdot 27 \cdot 15 = 3645$, što je $(3645 = 9 \cdot 365 + 360)$ približno 10 godina.

☑

Zadatak 3.9 *Napisati sve dvocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara* $1, 2, 3, 4$ *tako da se u jednom broju*

(a) ne mogu nalaziti iste cifre,

(b) mogu nalaziti iste cifre.

➥ ***Rešenje:***

(a) Ovakvih brojeva ima $V_2^4 = 12$, i to su brojevi 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

(b) Ovakvih brojeva ima $\overline{V}_2^4 = 16$, i to su brojevi 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

☑

Zadatak 3.10 *Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu napisati od cifara* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *takvih da se u jednom broju*

(a) ne mogu nalaziti iste cifre,

(b) mogu nalaziti iste cifre?

➥ ***Rešenje:***

(a) $V_4^8 = 1680$.

(b) $\overline{V}_4^8 = 4096$.

☑

Zadatak 3.11 *Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima su sve cifre različite?*

➥ ***Rešenje:*** Prvu cifru a biramo iz skupa $\{1,2,\dots,9\}$, dakle postoji 9 mogućih izbora. Nakon što smo izbrali prvu cifru, ostale cifre biramo tako što od elemenata skupa $\{0,1,2,\dots,9\}\setminus\{a\}$ (ima ih 9) sastavljamo uređenu 4-orku kod koje su sve komponente različite. Broj ovakvih izbora je (varijacije bez ponavljanja) $V_4^9 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024$. Primenom pravila proizvoda dobijamo da brojeva opisanog tipa ima $9\cdot 3024 = 27216$.

Drugi način: Prva cifra broja ne može biti nula, te ćemo traženi broj dobiti kao $a-b$ gde je a ukupan broj nizova od 5 različitih cifara (gde i prva cifra može biti 0), a b je broj nizova od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0. Nizove od 5 različitih cifara pravimo tako što iz skupa od 10 cifara 5 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $a = V_5^{10} = 30240$ načina. Nizove od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0 pravimo tako što iz skupa od 9 cifara (cifra 0 je „potrošena”) 4 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $b = V_4^9 = 3024$ načina. Prema tome, petocifrenih brojeva opisanog tipa ima $30240 - 3024 = 27216$. ☑

Zadatak 3.12 *Na šahovskom turniru učestvuje* 12 *šahista. Ako svaki šahista treba da odigra po jednu partiju sa svim ostalim šahistima, koliko će ukupno partija biti odigrano na turniru?*

➥ ***Rešenje:*** Biće odigrano onoliko partija koliko ima parova šahista, tj. koliko ima dvočlanih podskupova skupa od 12 šahista, a taj broj je $C_2^{12} = \dfrac{12\cdot 11}{2} = 66$. ☑

Zadatak 3.13 *Do vrha planine vodi* 5 *puteva. Na koliko načina planinar može da se popne i spusti sa vrha ako*

(a) može da se spušta istim putem kojim se popeo,

(b) ne može da se spušta istim putem kojim se popeo?

➥ ***Rešenje:*** U oba slučaja se put za penjanje bira na 5 načina, a put za spuštanje se u prvom slučaju bira na 5, a u drugom na 4 načina, tako da rešenje glasi

(a) $\overline{V}_2^5 = 5\cdot 5 = 25$,

(b) $V_2^5 = 5\cdot 4 = 20$.

☑

Zadatak 3.14 *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* 1, 1, 1, 2, 2, 2*?*

➥ ***Rešenje:*** Od zadanih cifara šestocifreni broj pravimo tako što cifre raspoređujemo u niz (bitan je redosled i koristimo sve cifre), ali među ciframa ima i jednakih, što znači da se radi o permutacijama sa ponavljanjem, te odgovor glasi $P_{3,3}^6 = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$. ☑

Zadatak 3.15 *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* 1*,* 2*,* 2*,* 3*,* 3*,* 3*?*

➥ ***Rešenje:*** Na isti način kao u zadatku 3.14 dobijamo rešenje $P^6_{1,2,3} = \dfrac{6!}{1!2!3!} = 60$. ☑

Zadatak 3.16 *Iz grupe od* 10 *muškaraca i* 8 *žena treba odabrati* 6 *osoba među kojima najmanje* 3 *treba da budu žene. Na koliko načina se može izvršiti ovakav izbor?*

➥ ***Rešenje:*** Neka je $ž_i$, $i \in \{3,4,5,6\}$ broj načina na koji se mogu odabrati i žena i $6-i$ muškaraca (ukupno 6 osoba). Traženi broj načina izbora je $ž_3 + ž_4 + ž_5 + ž_6$. Kada pri izboru 6 osoba biramo i žena i $6-i$ muškaraca, tada iz skupa od 10 muškaraca biramo na C^{10}_{6-i} načina podskup od $6-i$ elemenata, i iz skupa od 8 žena biramo na C^8_i načina podskup od i elemenata, te na osnovu pravila proizvoda dobijamo da je $ž_i = C^{10}_{6-i} \cdot C^8_i = \binom{10}{6-i} \cdot \binom{8}{i}$. Prema tome,

$$ž_3 = \binom{10}{3}\cdot\binom{8}{3} = 120\cdot 56 = 6720, \qquad ž_4 = \binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4} = 45\cdot 70 = 3150,$$
$$ž_5 = \binom{10}{1}\cdot\binom{8}{5} = 10\cdot 56 = 560, \qquad ž_6 = \binom{10}{0}\cdot\binom{8}{6} = 1\cdot 28 = 28,$$

te rešenje zadatka glasi $6720 + 3150 + 560 + 28 = 10458$. ☑

Zadatak 3.17 *Koliko se reči (računajući i besmislene) može napisati koristeći slova* a,b,c,d,e *tako da se svako slovo u reči javlja najviše jednom i tako da reč*

(a) obavezno sadrži slovo a,

(b) počinje slovom a?

➥ ***Rešenje:*** Neka je k_i broj reči dužine i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Broj reči koje se mogu napisati u skladu sa zadatim uslovima je $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$.

(a) Očigledno je $k_1 = 1$, a reč dužine i, $i \in \{2,3,4,5\}$ pravimo tako što osim slova a odaberemo još $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$, a zatim ova slova ređamo u niz. Izbor $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$ se može uraditi na C^4_{i-1} načina, a izabrana slova i slovo a se zatim mogu poređati u niz na P_i načina (na primer, pri pisanju reči od 3 slova pored slova a možemo izabrati još parove slova $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$ i $\{d,e\}$, pa ako smo odabrali npr. slova $\{b,d\}$, tada možemo napisati reči *abd*, *adb*, *bad*, *bda*, *dab* i *dba*); prema tome, koristeći pravilo proizvoda, za $i \in \{2,3,4,5\}$ dobijamo $k_i = C^4_{i-1} \cdot P_i$, odnosno

$$k_2 = C^4_1 \cdot P_2 = \frac{4!}{1!3!}\cdot 2! = 8, \qquad k_3 = C^4_2 \cdot P_3 = \frac{4!}{2!2!}\cdot 3! = 36,$$
$$k_4 = C^4_3 \cdot P_4 = \frac{4!}{3!1!}\cdot 4! = 96, \qquad k_5 = C^4_4 \cdot P_5 = \frac{4!}{4!0!}\cdot 5! = 120.$$

Dakle, može se napisati $1 + 8 + 36 + 96 + 120 = 161$ reč.

(b) Prvi način: analogno kao pod (a), osim što nakon izbora slova od tih slova ne pravimo proizvoljan niz, već slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a ostala raspoređujemo u niz na proizvoljan način, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = C^4_{i-1} \cdot P_{i-1}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = C^4_1 \cdot P_1 = \frac{4!}{1!3!} \cdot 1! = 4, \qquad k_3 = C^4_2 \cdot P_2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 2! = 12,$$
$$k_4 = C^4_3 \cdot P_3 = \frac{4!}{3!1!} \cdot 3! = 24, \qquad k_5 = C^4_4 \cdot P_4 = \frac{4!}{4!0!} \cdot 4! = 24.$$

Dakle, može se napisati $1+4+12+24+24 = 65$ reči.

Drugi način: pri pravljenju reči od i slova, slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto, a zatim pravimo niz od $i-1$ slova od elemenata skupa $\{b,c,d,e\}$, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = V^4_{i-1}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = V^4_1 = 4, \qquad k_3 = V^4_2 = 4 \cdot 3 = 12,$$
$$k_4 = V^4_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \qquad k_5 = V^4_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Dakle, može se napisati $1+4+12+24+24 = 65$ reči.

☑

Zadatak 3.18 *Koliko dijagonala ima pravilan n-tougao?*

➥ ***Rešenje:***

Prvi način

Prvo teme neke dijanonale možemo izabrati na n načina. Za drugo teme tada imamo $n-3$ izbora jer ne možemo ponovo izabrati prvo teme, kao ni susedna temena. Na ovaj način smo svaku dijagonalu ubrojali dva puta (kao duži AB i BA), te tako dobijamo rešenje $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Drugi način

Ako posmatramo ukupan broj stranica i dijagonala zajedno, izbor svake od tih duži je određen izborom bilo koja dva različita temena (biraju se odjednom), te stranica i dijagonala zajedno ima C^n_2. Stranica, naravni, ima n, te rešenje zadatka glasi

$$C^n_2 - n = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}.$$ ☑

Primenom kombinatornih tehnika i pojmova, možemo prebrojavati i rayne tipove ralacija i funkcija, kao u sledećim zadacima.

Zadatak 3.19 *Neka je $A = \{1,2,3\}$?*

(a) *Koliko različitih refleksivnih relacija ima na skupu $A = \{1,2,3\}$?*

(b) *Koliko različitih simetričnih relacija ima na skupu $A = \{1,2,3\}$?*

(c) *Koliko različitih antisimetričnih relacija ima na skupu $A = \{1,2,3\}$?*

➥ ***Rešenje:*** Ukupno uređenih parova od elemenata skupa A ima $3^2 = 9$ (broj varijacija sa ponavljanjem od 3 elementa klase 2). Kada konstruišemo bilo kakvu binarnu relaciju ρ skupa A, za svaki od tih uređenih parova se opredeljujemo da li ga stavljamo u relaciju ili ne. Dakle, svaka takva relacija se može jednoznačno identifikovati sa jednom uređenom 9-orkom čija je svaka komponenta ili 0 ili 1, pri čemu 0 na mestu i-te komponente označava da odgovarajući uređeni par nismo stavili u relaciju, a 1 da jesmo:

$$\begin{array}{lccccccccccl}
\{ & (1,1), & (2,2), & (3,3), & (1,2), & (2,1), & (1,3), & (3,1), & (2,3), & (3,2) & \} \\
 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & \\
(& \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & &)
\end{array}$$

Prema tome, binarnih relacija na skupu A ima onoliko koliko ima uređenih 9-orki čije su komponente 0 ili 1, a njih ima $2^9 = 512$ (broj varijacija sa ponavljanjem od 2 elementa klase 9).

(a) Kada konstruišemo refleksivnu relaciju, parove $(1,1)$, $(2,2)$ i $(3,3)$ obavezno ubacujemo u relaciju, a svaki od preostalih parova možemo a ne moramo ubaciti. To znači da u odgovarajućoj uređenoj 9-orci prve 3 komponente moraju biti 1, a u preostalih 6 komponenti možemo birati 0 ili 1. Dakle, refleksivnih relacija ima onoliko na koliko načina možemo konstruisati uređenu 6-orku čije su komponente 0 ili 1, a njih ima $2^6 = 64$.

$$\begin{array}{lccccccccccl}
\{ & (1,1), & (2,2), & (3,3), & (1,2), & (2,1), & (1,3), & (3,1), & (2,3), & (3,2) & \} \\
 & & & & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & \\
(& 1, & 1, & 1, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & &)
\end{array}$$

(b) Pri konstrukciji simetrične relacije, uređene parove $(1,1)$, $(2,2)$ i $(3,3)$ možemo a ne moramo ubaciti u relaciju, tj. u odgovarajućoj uređenih 9-orci svaka od prve 3 komponente može biti 0 ili 1. U preostalih 6 komponenti posmatramo grupe parova $\langle(x,y),(y,x)\rangle$ sa $x \neq y$. Da bi relacija bila simetrična, moramo ili oba para ubaciti, ili oba izostaviti. Dakle, imamo po 2 izbora za svaku od 3 takve grupe parova, te simetričnih relacija ima onoliko na koliko načina možemo konstruisati uređenu 6-orku čije su prve 3 komponente 0 ili 1, a zadnje tri 3 komponente su 00 ili 11. Njih ima $2^3 \cdot 2^3 = 2^6 = 64$.

$$\begin{array}{lccccccl}
\{ & (1,1), & (2,2), & (3,3), & (1,2),\ (2,1), & (1,3),\ (3,1), & (2,3),\ (3,2) & \} \\
 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 00\downarrow 11 & 00\downarrow 11 & 00\downarrow 11 & \\
(& \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & \quad, & &)
\end{array}$$

(c) Pri konstrukciji antisimetrične relacije, parove $(1,1)$, $(2,2)$ i $(3,3)$ možemo a ne moramo ubaciti, tj. u odgovarajućoj uređenih 9-orci svaka od prve 3 komponente može biti 0 ili 1. U preostalih 6 komponenti posmatramo opet grupe parova $\langle(x,y),(y,x)\rangle$ sa $x \neq y$. Da bi relacija bila anti simetrična, moramo ubaciti ili samo (x,y), ili samo (y,x), ili oba izostaviti, tj. jedino ne smemo ubaciti oba takva uređena para. Dakle, imamo po 3 izbora za svaku od 3 takve grupe parova, te antisimetričnih relacija ima onoliko na koliko načina možemo konstruisati uređenu 6-orku čije su prve 3 komponente 0 ili 1, a zadnje tri 3 komponente su 00, 01 ili 10. Njih ima $2^3 \cdot 3^3 = 216$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{\ (1,1)\ , & (2,2)\ , & (3,3)\ , & (1,2)\ , & (2,1)\ , & (1,3)\ , & (3,1)\ , & (2,3)\ , & (3,2)\} \\
0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & 0\downarrow 1 & \multicolumn{2}{c}{\downarrow 00,01,10} & \multicolumn{2}{c}{\downarrow 00,01,10} & \multicolumn{2}{c}{\downarrow 00,01,10} \\
(& , & , & , & \multicolumn{2}{c}{,} & \multicolumn{2}{c}{,} &)
\end{array}$$ ☑

Zadatak 3.20 *Za date skupove A i B, ispitati koliko ima različitih funkcija iz skupa A u skup B? Koliko je injektivnih, sirjektivnih, bijektivnih?*

(a) $A = \{1,2,3\},\ B = \{a,b,c\}$.

(b) $A = \{1,2,3,4\},\ B = \{a,b\}$.

(c) $A = \{1,2,3\},\ B = \{a,b,c,d\}$.

➥ ***Rešenje:***

(a) Svaka funkcija $f : A \to B$ se može zapisati kao $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$, odnosno kao $(f(1), f(2), f(3))$, gde je $f(1), f(2), f(3) \in \{a,b,c\}$. Dakle, svaka funkcija se može reprezentovati jednom uređenom trojkom elemenata skupa $B = \{a,b,c\}$, te funkcija iz A u B ima onoliko koliko ima uređenih trojki elemenata skupa B, a njih je $\overline{V}_3^3 = 3^3 = 27$. Injektivnih funkcija ima onoliko koliko ima uređenih trojki elemenata skupa B čije su sve tri komponente različite, a njih je $V_3^3 = P_3 = 3! = 6$. Ako je f injektivna funkcija, tada su sve slike $f(1), f(2), f(3)$ različite, te je $\{f(1), f(2), f(3)\} = \{a,b,c\}$, što znači da je svaka injektivna funkcija istovremeno i sirjektivna, te sirjektivnih i bijektivnih funkcija ima takođe 6.

(b) Rezonujući na isti način kao pod (a) dobijamo da ukupno funkcija iz A u B ima $\overline{V}_4^2 = 2^4 = 16$, injektivnih nema jer ne postoje 4 različita elementa skupa B, a sirjektivnih funkcija je $16 - 2 = 14$ jer od svih funkcija iz A u B su nesirjektivne samo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

(c) Funkcija iz A u B ukupno ima $\overline{V}_3^4 = 4^3 = 64$, injektivnih je $V_3^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, a sirjektivnih nema jer je kodomen svake funkcije f iz A u B najviše troelementni skup, te ne može biti $\mathcal{K}(f) = \{a,b,c,d\}$. ☑

Zadatak 3.21 *Ako je $A = \{1,2\}$ i $B = \{1,2,3,4\}$, koliko ima monotono rastućih, a koliko monotono neopadajućih funkcija iz skupa A u skup B?*

➥ ***Rešenje:*** Pri konstrukciji monotono rastuće funkcije f, ako je $f(1) = 1$, tada se $f(2) \in \{2,3,4\}$ može birati na 3 načina, ako je $f(1) = 2$, tada se $f(2) \in \{3,4\}$ može birati na 2 načina, a ako je $f(3) = 3$, tada se $f(2) \in \{4\}$ može birati samo na 1 način (i ne postoji monotono rastuća funkcija kod koje je $f(1) = 4$), te monotono rastućih funkcija ima $3 + 2 + 1 = 6$. Rezonujući na isti način utvrđujemo da neopadajućih funkcija ima $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. ☑

Glava 4

Binarne operacije

Definicija 4.1 *Neka je A neprazan skup.* ***Unarna operacija*** *skupa A je svaka funkcija* $f : A \to A$. ***Binarna operacija*** *skupa A je svaka funkcija* $f : A^2 \to A$. *Ako je f binarna operacija skupa A, tada se uređeni par* $\mathcal{A} = (A, f)$ *naziva* ***grupoid***.

✎ Uobičajeno je da za unarne operacije koristimo simbole poput $'$, $-$, $\overline{}$, $^{-1}$ i slično, a za binarne $+$, $\cdot$, $*$, $\circ$, $\oplus$, $\odot$, i slično. Takođe je, kao i kod binarnih relacija, za binarne operacije uobičajena „infiks" notacija, te tako, na primer, umesto $+(3,5) = 8$ pišemo $3+5 = 8$.

☞ Kao što ćemo videti kasnije, na nekom skupu može biti definisano i više operacija (binarnih, unarnih, ...), i te operacije mogu biti povezane na razne načine (vidi poglavlja o Bulovim algebrama, prstenima i poljima, vektorskim prostorima). Na primer, u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ važi distributivni zakon množenja prema sabiranju brojeva $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Uobičajeni načini zadavanja (definisanja) binarnih operacija su putem tzv. Kejlijeve tablice i korišćenjem poznatih binarnih operacija.

- ***Kejlivom tablicom*** (vidi [RD05]) na konačnom skupu $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ definišemo binarnu (analogno i unarnu) operaciju $*$, i iz nje čitamo rezultat za npr. $a_i * a_j$ tako što iz unutrašnjosti tablice očitamo element koji se nalazi u preseku vrste elementa a_i i kolone elementa a_j. Kod definicije unarne operacije $'$, u tablici se desno od elementa x očitava element x'. Na primer, za $A = \{1,2,3,4\}$, binarnu operaciju $*$ i unarnu operaciju $'$ definisane tablicama

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	3
2	2	3	3	3
3	3	3	3	3

$'$	
0	0
1	3
2	2
3	1

  čitamo $0*2 = 2$, $1*1 = 2$, $2*2 = 3$, $\ldots$, $0' = 0$, $3' = 1$, $\ldots$.

- Korišćenjem poznatih operacija možemo definisati novu binarnu ili unarnu operaciju. Na primer, na skupu $A = \{0,1,2,3\}$ su sa

$$x * y = \min\{x+y, 3\} \qquad\qquad x' = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 4-x & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

definisane iste operacije $*$ i $'$ kao one iz prethodnih primera definisanih Kejlijevim tablicama.

Binarne operacije mogu da imaju razne važne i interesantne osobine. Neka je $*$ binarna operacija nepraznog skupa A.

- Operacija $*$ je ***asocijativna*** ako za sve $x, y, z \in A$ važi (asocijativni zakon)

$$x * (y * z) = (x * y) * z. \tag{4.1}$$

- Operacija $*$ je ***komutativna*** ako za sve $x, y \in A$ važi (komutativni zakon)

$$x * y = y * x. \tag{4.2}$$

- Operacija $*$ je ***idempotentna*** ako za sve $x \in A$ važi (zakon idempotentnosti)

$$x * x = x. \tag{4.3}$$

  Sve elemente za koje važi gornja jednakost nazivamo ***idempotentnim elementima***.

- Fiksni element $e \in A$ je ***levi neutralni element*** grupoida $(A, *)$ ako za sve $x \in A$ važi

$$e * x = x. \tag{4.4}$$

  Fiksni element $e \in A$ je ***desni neutralni element*** grupoida $(A, *)$ ako za sve $x \in A$ važi

$$x * e = x. \tag{4.5}$$

  Fiksni element $e \in A$ je ***neutralni element*** grupoida $(A, *)$ ako je on istovremeno i levi i desni neutralni element.

- Neka je $e \in A$ levi neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki element $x \in A$ postoji element $x' \in A$ takav da važi

$$x' * x = e, \tag{4.6}$$

  tada je x' ***levi inverzni element*** elementa x.

  Neka je $e \in A$ desni neutralni element grupoida $(A, *)$. Ako za neki element $x \in A$ postoji element $x' \in A$ takav da važi

$$x * x' = e, \tag{4.7}$$

  tada je x' ***desni inverzni element*** elementa x.

  Ako je $e \in A$ neutralni element grupoida $(A, *)$, i ako za element $x \in A$ postoji element $x' \in A$ koji je istovremeno i levi i desni inverzni element za x, tada je x' ***inverzni element*** elementa x.

- Operacija $*$ je ***kancelativna*** ako za sve $x, y, z \in A$ važi (levi i desni zakon kancelacije)

$$x * y = x * z \quad \Rightarrow \quad y = z \qquad \text{i} \qquad y * x = z * x \quad \Rightarrow \quad y = z. \tag{4.8}$$

➤ Fiksni element $\mathbb{O} \in A$ je ***nilpotentni element*** grupoida $(A,*)$ ako za sve $x \in A$ važi

$$\mathbb{O} * x = x * \mathbb{O} = \mathbb{O}. \tag{4.9}$$

Kao i kod neutralnog, možemo razlikovati levi i desni nilpotentni element.

✎ Ako je operacija $*$ asocijativna u skupu A, tada u izrazima kao što su, na primer $a*b*c*d$ ne moramo pisati zagrade jer ih možemo podrazumevati bilo gde. Drugim rečima, npr.

$a*b*c*d = ((a*b)*c)*d = (a*b)*(c*d) =$
$= (a*(b*c))*d = a*((b*c)*d) = a*(b*(c*d)).$

Ako u grupoidu $(A,*)$ operacija $*$ nije komutativna, tada za sve $x,y,z \in A$ iz $x = y$ sledi $x*z = y*z$ i $z*x = z*y$, ali ne i $z*x = y*z$ ili $x*z = z*y$. Dakle, u opštem slučaju, jednake izraze možemo „množiti” nekim elementom tako što ih oba množimo s leve, ili oba s desne strane. Ako je operacija komutativna, tada iz $x = y$ sledi $x*z = y*z$, $z*x = z*y$, $z*x = y*z$ i $x*z = z*y$.

☞ Ako postoji neutralni element, tada je on jedinstven. Isto važi i za inverzni element (ako postoji).

☞ Ako je operacija komutativna, levi neutralni element mora biti i desni, levi inverzni mora biti i desni, levi nilpotentni element mora biti i desni, tj. tada pri ispitivanju neutralnog, nilpotentnog i inverznih elemenat je dovoljno ispitivati samo jednu od jednakosti iz odgovarajuće definicije.

☞ Ako u grupoidu $(A,*)$ postoji neutralni i inverzni elementi, tada je on kancelativan.

☞ Ako je neka operacija zadana putem poznatih binarnih i unarnih operacija, tada pri ispitivanju njenih osobina koristimo poznate osobine operacija preko kojih je definisana.

Definicija 4.2 *Neka je $\mathcal{A} = (A,*)$ grupoid, i neka je B neprazan podskup skupa A. Ukoliko je $\mathcal{B} = (B,*)$ grupoid, tj. ako je operacija $*$ zatvorena na skupu B, tada je $\mathcal{B}$* ***podgrupoid*** *grupoida $\mathcal{A}$.*

✎ Na skupu B zapravo posmatramo restrikciju operacije $*$ sa skupa A na skup B, ali je uobičajeno da za tu restrikciju koristimo isti simbol kao i za operaciju skupa A.

☞ Na skupu svih grupoida, relacija „*biti podgrupoid*” je relacija poretka. Naime, refleksivna je jer je svaki grupoid $(A,*)$ podgrupoid samog sebe; antisimetrična jer ako je $(A,*)$ podgrupoid od $(B,\oplus)$ i $(B,\oplus)$ je podgrupoid od $(A,*)$, tada je $A = B$ i $* = \oplus$; tranzitivna je, jer ako je $(A,*)$ podgrupoid od $(B,\oplus)$ i $(B,\oplus)$ je podgrupoid od $(C,\cdot)$, tada je $(A,*)$ podgrupoid od $(C,\cdot)$.

☞ Zakonitosti kao što su komutativnost i asocijativnost, tj. one u kojima od kvantifikatora figuriše samo $\forall$, se prenose sa grupoida na svaki njegov podgrupoid. Dakle, ako je operacija u nekom grupoidu asocijativna ili komutativna, tada je restrikcija te operacije asocijativna tj. komutativna u svakom pogrupoidu posmatranog grupoida.

Primer 4.1 *Neka je $A = [0,1]$ i neka je $B = \{0,1\}$. Posmatrajmo operaciju* max *na skupovima A i B.*

(a) *Na skupu A je operacija* max *zatvorena (za $x, y \in A$ je* $\max(x, y) \in \{x, y\} \subseteq A$*), očigledno je komutativna i idempotentna, i takođe je i asocijativna jer za sve $x, y, z \in A$ važi* $\max(x, \max(y, z)) = \max\{x, y, z\} = \max(\max(x, y), z)$ *(što možemo dokazati i diskusijom po mogućih* 6 *uzajamnih poredaka po veličini elemenata x, y i z: $x \le y \le z$, $x \le z \le y$, $y \le x \le z$, $y \le z \le x$, $z \le x \le y$ i $z \le y \le x$). Neutralni element je* 0 *(jer je* $\max(0, x) = x$ *za sve $x \in A$), a osim elementa* 0 *koji je sam sebi inverzan, ostali elementi nemaju inverzne. Nilpotentni element je* 1*. Operacija* max *nije kancelativna jer je npr.* $\max(1, 0) = \max(1, 1)$ *i* $0 \ne 1$.

(b) *Na skupu B važe potpuno iste osobine operacije* max *kao i na skupu A. Pri tome je* $(B, \max)$ *podgrupoid grupoida* $(A, \max)$*. Za svaki neprazan skup $X \subseteq A$ je* $(X, \max)$ *podgrupoid grupoida* $(A, \max)$.

(c) *Iste osobine važe na skupovima A i B i za operaciju* min*, s tim da je neutralni element* 1*, a nilpotentni element je* 0. ✔

Zadatak 4.1 *Neka je* $A = [0, 1]$*, i neka je* $x * y = x + y - xy$*. Ispitati osobine strukture* $(A, *)$.

➥ ***Rešenje:*** Operacija $*$ jeste binarna operacija skupa A (dobro je definisana) jer za sve $x, y \in A$ važi $0 \le x + y - xy \le 1$ odnosno $x * y \in A$. Naime, s jedne strane je

$$0 \le x + y - xy \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x + y(1 - x),$$

što jeste tačno jer za $x, y \in [0, 1]$ važi i $1 - x \ge 0$, proizvod nenegativnih brojeva y i $1 - x$ je nenegativan broj, i zbir nenegativnih brojeva x i $y(1 - x)$ je nenegativan broj. S druge strane je

$$x + y - xy \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad y(1 - x) \le 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad y(1 - x) \le 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \ \vee \ y \le 1),$$

što jeste tačno za sve $x, y \in [0, 1]$. Koristeći osobine sabiranja i množenja realnih brojeva (komutativnost, asocijativnost, distributivnost množenja prema sabiranju) imamo da je

$$x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz,$$

$$(x * y) * z = (x + y - xy) * z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + y - xy + z - xz - yz + xyz,$$

odakle sledi da je operacija $*$ asocijativna. Takođe je i komutativna jer je

$$x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x.$$

Jedini idempotentni elementi su 0 i 1 jer su to jedina rešenja jednačine

$$x * x = x \quad \Leftrightarrow \quad x + x - xx = x \quad \Leftrightarrow \quad x - x^2 = 0.$$

Neutralni element je 0 jer za svako $x \in [0, 1]$ važi

$$0 * x = 0 + x - 0 \cdot x = x,$$

a zbog komutativnosti je tada i $x * 0 = x$. Kako neutralni element postoji, možemo ispitivati egzistenciju inverznih elemenata. Za element $x \in [0, 1]$ postoji inverzni element $x' \in [0, 1]$ ukoliko je $0 = x * x' = x + x' - xx'$ i $0 = x' * x = x' + x - x'x$. Kako smo utvrdili da je operacija komutativna, dovoljno je ispitati jednu od ovih jednakosti:

$$0 = x + x' - xx' \quad \Leftrightarrow \quad x'(1 - x) = -x;$$

za $x = 1$ jednačina nema rešenja po x' (ne postoji inverzni element $1'$), a za $x \ne 1$ dobijamo $x' = \dfrac{x}{x - 1}$. Za $x = 0$ je $0' = 0$, a za sve ostale $x \in (0, 1]$ važi $x > 0$ i $x - 1 < 0$, te je $x' = \dfrac{x}{x-1} < 0$, što znači da $x' \notin A$, odnosno elementi $x \in (0,1]$ nemaju inverzni element u skupu A.

Nilpotentni element je 1 jer za sve $x \in [0,1]$ važi

$$1 * x = 1 + x - 1 \cdot x = 1,$$

a zbog komutativnosti je tada i $x * 1 = 1$.

Operacija $*$ nije kancelativna jer za $x = 1$, $y = 0.4$ i $z = 0.6$ važi $xy = xz = 1$ i $y \neq z$. ☑

Zadatak 4.2 *Ispitati osobine množenja brojeva na skupovima $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(0,\infty)$, $(0,1]$, $(0,1)$, $\{0,1\}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ i $\mathbb{I}$. Utvrditi koji od odgovarajućih grupoida je podgrupoid nekog od drugih posmatranih podgrupoida.*

➥ ***Rešenje:***

- Množenje je zatvorena operacija u svakom od posmatranih skupova osim u $\mathbb{I}$: proizvod realnih brojeva je realan broj, proizvod realnih brojeva različitih od 0 je realan broj različit od 0, proizvod pozitivnih realnih brojeva je pozitivan realan broj, proizvod dva reala broja iz intervala $(0,1]$ (odnosno $(0,1)$) je realan broj iz intervala $(0,1]$ (odnosno $(0,1)$), proizvod bilo koja dva broja iz skupa $\{0,1\}$ je u skupu $\{0,1\}$, i proizvod dva racionalna broja (razlomka) iz intervala $(0,1)$ je racionalan broj (razlomak) iz intervala $(0,1)$; proizvod dva iracionalna broja ne mora biti iracionalan broj - npr. $\sqrt{2}\,\sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{I}$. Dakle, svi odgovarajući uređeni parovi su grupoidi, osim $(\mathbb{I}, \cdot)$.
- Na bilo kojem skupu brojeva je množenje asocijativna i komutativna operacija.
- U bilo kojem skupu brojeva su rešenja jednačine $xx = x$ samo brojevi 0 i 1 ukoliko oni pripadaju tom skupu, tako da množenje jeste idempotentna operacija u $\{0,1\}$, a u ostalim skupovima to nije.
- Ukoliko broj 1 pripada nekom posmatranom skupu, tada je on neutralni element, i tada možemo razmatrati pitanje inverznih elemenata.
  - U skupu $\mathbb{R}$ je 1 neutralni element, 0 nema sebi inverzni element, a za sve ostale realne brojeve x je inverzni element $x' = \frac{1}{x}$.
  - U skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je 1 neutralni element, i svaki element $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ima sebi inverzni element $x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  - U skupu $(0,\infty)$ je 1 neutralni element, i svaki element $x \in (0,\infty)$ ima sebi inverzni element $x' = \frac{1}{x} \in (0,\infty)$.
  - U skupu $(0,1]$ je 1 neutralni element i on je sam sebi inverzan, ali ostali elementi $x \in (0,1)$ nemaju sebi inverzne elemente jer $\frac{1}{x} \notin (0,1)$.
  - U skupovima $(0,1)$ i A ne postoje neutralni elementi.
  - U skupu $\{0,1\}$ je 1 neutralni element i on je sam sebi inverzan, a za 0 ne postoji inverzni element.
- Nilpotentni element je 0 u svakom od skupova kojima pripada.

- U bilom kojem skupu brojeva je množenje kancelativno ukoliko skup ne sadrži 0 (implikacija $x*y=x*z \;\Rightarrow\; y=z$ ne važi za $x=0$ i $y\neq z$, a jeste tačna za $x\neq 0$); stoga je množenje kancelativno u $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $(0,\infty)$, $(0,1]$, $(0,1)$ i A, a nije u $\mathbb{R}$ i $\{0,1\}$.
- Svaki od posmatranih grupoida je sam sebi podgrupoid, i osim toga
  - $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R},\cdot)$,
  - $((0,\infty),\cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R},\cdot)$ i $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$,
  - $((0,1],\cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ i $((0,\infty),\cdot)$,
  - $((0,1),\cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $((0,\infty),\cdot)$ i $((0,1],\cdot)$,
  - $(\{0,1\},\cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R},\cdot)$,
  - $(A,\cdot)$ je podgrupoid od $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $((0,\infty),\cdot)$, $((0,1],\cdot)$ i $((0,1),\cdot)$. ☑

☞ Ako je neka operacija $*$ na skupu A zadana putem Kejlijeve tablice, tada neke od njenih osobina možemo ispitati „vizuelno”, uočavajući neki specifičan raspored elemenata u tablici. Operacija je komutativna ako je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu (elementi $x*y$ i $y*x$ se u tablici nalaze na simetričnim pozicijama). Element e je levi neutralni element ako je vrsta elementa e jednaka graničnoj vrsti, odnosno desni neutralni element ako je kolona elementa e jednaka graničnoj koloni. Ako je e neutralni element, tada postoji levi inverzni element x' elementa x ukoliko se u koloni elementa x pojavljuje bar jednom neutralni element e, i tada x' očitavamo kao projekciju elementa e na graničnu kolonu; analogno, postoji desni inverzni element x' elementa x ukoliko se u vrsti elementa x pojavljuje bar jednom neutralni element e, i tada x' očitavamo kao projekciju elementa e na graničnu vrstu; svaki element ima svoj inverzni ako i samo ako se element e pojavljuje tačno jednom u svakoj vrsti i koloni, i simetrično je raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. Operacija je idempotentna ukoliko se na glavnoj dijagonali ređaju elementi skupa A onako kako su poređani u graničnoj vrsti i koloni. Element $\mathbb{O}$ je nilpotentni element ako su cela njegova vrsta i kolona popunjeni sa $\mathbb{O}$. Osobina asocijativnosti operacije se ne može na ovakav način ispitati.

Primer 4.2 *Neka je $A=\{a,b,c,d\}$, i neka je binarna operacija $*$ skupa A definisana Kejlijevom tablicom*

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	d

Operacija $*$ je zaista binarna operacija skupa A jer se u tablici pojavljuju samo elementi skupa A. Shodno gornjim napomenama, operacija $*$ je komutativna, idempotentna, neutralni element je c, osim elementa c koji je sam sebi inverzni element, drugi elementi nemaju inverzne, i nilpotentni element je b. Operacija nije kancelativna jer je npr. $bc=bd=b$ i $c\neq d$.

Ako želimo ispitati asocijativnost operacije $*$, treba jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ proveriti za sve $x,y,z \in \{a,b,c,d\}$, što bi bilo $4^3 = 64$ provere (svaka od promenljivih može uzeti jednu od 4 vrednosti iz skupa A). Kako je c neutralni element, ako bar jedna od promenljivih uzme vrednost c, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena. Na primer, za $x = c$ je $c*(y*z) = (y*z) = (c*y)*z$ (u prvom koraku smo koristili da je $c*t = t$ za $t = y*z$, a u drugom da je $y = c*y$). Na isti način utvrđujemo da važe jednakosti $x*(c*z) = (x*c)*z$ i $x*(y*c) = (x*y)*c$. Ovo važi ne samo u ovom primeru, već je jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ u svakom grupoidu zadovoljena kada bar jedna od promenljivih x,y,z za vrednost uzme neutralni element. Prema tome, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ dalje treba proveriti za $x,y,z, \in \{a,b,d\}$, što čini $3^3 = 27$ provera. Kako je b nilpotentni element, ako bar jedna od promenljivih uzme vrednost b, jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ će biti zadovoljena jer će izrazi i na levoj i na desnoj strani jednakosti imati vrednost b (na primer, za $x = b$ je $b*(y*z) = b = (b*y)*z$). Sada je još jednakost $x*(y*z) = (x*y)*z$ dovoljno proveriti za $x,y,z, \in \{a,d\}$, što čini $2^3 = 8$ provera. Očitavajući rezultate operacije iz tablice dobijamo

$$\begin{array}{ll}
a*(a*a) = a = (a*a)*a, & a*(a*d) = b = (a*a)*d,\\
a*(d*a) = b = (a*d)*a, & a*(d*d) = b = (a*d)*d,\\
d*(a*a) = b = (d*a)*a, & d*(a*d) = b = (d*a)*d,\\
d*(d*a) = b = (d*d)*a, & d*(d*d) = d = (d*d)*d,
\end{array}$$

te operacija $*$ jeste asocijativna. Još jedan način na se utvrdi asocijativnost operacije $*$ je prikazan u primeru **4.3**. ✔

Zadatak 4.3 *Ispitati osobine grupoida $(A,*)$ gde je $A = \{1,2,3\}$ i*

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

.

➥ ***Rešenje:*** Uočimo iz Kejlijeve tablice da je $x*y \overset{❀}{=} y$ za sve $x,y \in A$.

Operacija $*$ jeste asocijativna jer važi $x*(y*z) \overset{❀}{=} x*z \overset{❀}{=} z$ i $(x*y)*z \overset{❀}{=} z$ za sve $x,y,z \in A$. Nije komutativna jer tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. Jeste idempotentna. Nilpotentni element ne postoji, ali je svaki element $x \in A$ desni nilpotentni element. Svaki element $e \in A$ je levi neutralni element (npr. 1 je levi neutralni element jer za sve $x \in A$ važi $1*x \overset{❀}{=} x$), a desni neutralni element ne postoji. Kako nema neutralnog elementa, o inverznim elementima ne možemo govoriti. Operacija $*$ nije kancelativna jer je npr. $1*1 = 2*1 = 1$ i $1 \neq 2$. ☑

☞ Iste osobine važe za proizvoljan skup $A \neq \emptyset$ i binarnu operaciju $*$ skupa A definisanu sa $\forall x,y \in A,\ x*y = y$. Slična je situacija sa binarnom operacijom $\circledast$ skupa A definisanom sa $\forall x,y \in A,\ x \circledast y = x$.

Definicija 4.3 *Neka su $\mathcal{A} = (A,*)$ i $\mathcal{B} = (B,\otimes)$ grupoidi, i neka je $h : A \to B$. Funkcija h je* **homomorfizam** *grupoida $\mathcal{A}$ u grupoid $\mathcal{B}$ ako za sve $x,y \in A$ važi*

$$h(x*y) = h(x) \otimes h(y).$$

Ako je homomorfizam h bijektivna funkcija, tada se funkcija h naziva **izomorfizam***, i kažemo da je grupoid $\mathcal{A}$* **izomorfan** *sa grupoidom $\mathcal{B}$, pišemo $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.*

☞ Homomorfizam $h : A \to B$ grupoida $(A,*)$ u grupoid $(B,\otimes)$ predstavlja u određenom smislu „slaganje" operacija $*$ i $\otimes$ preko funkcije h. Ako je pri tome h sirjektivna funkcija, tada ona „prenosi" mnoge (ne sve) osobine grupoida $(A,*)$ u grupoid $(B,\otimes)$, tj. ako neka osobina važi u $(A,*)$, tada važi i u $(B,\otimes)$. Izomorfizam $h : A \to B$ grupoida $(A,*)$ u grupoid $(B,\otimes)$ „prenosi" sve osobine grupoida $(A,*)$ u grupoid $(B,\otimes)$, tj. grupoidi između kojih postoji izomorfizam su sa stanovišta teorije grupoida „jednaki", odnosno razlikuju se samo u oznakama elemenata skupova i operacija (naravno, sa nekih drugih aspekata oni mogu biti potpuno različiti).
Kako izomorfizam prenosi sve osobine iz jednog grupoida u drugi, on se tipično koristi na sledeći način: Ako treba da ispitamo neke osobine grupoida $(A,*)$, a uočimo da je on izomorfan sa grupoidom $(B,\otimes)$ čije su nam osobine poznate ili čije osobine lakše ispitujemo, tada možemo poznatu ili ispitanu osobinu grupoida $(B,\otimes)$ preneti odgovarajućim izomorfizmom u grupoid $(A,*)$ (vidi primer **4.3**).

☞ Ako su grupoidi $(A,*)$ i $(B,\otimes)$ definisani Kejlijevim tablicama, i ako je $h : A \to B$ izomorfizam grupoida $(A,*)$ u grupoid $(B,\otimes)$, tada ukoliko u tablici grupoida $(A,*)$ svaki element $x \in A$ zamenimo elementom $h(x) \in B$, dobijamo tablicu grupoida $(B,\otimes)$ (pri čemu eventualno u tablici dobijenoj zamenom elemenata treba promeniti redosled elemenata).

☞ Relacija „*je izomorfan sa*" u skupu grupoida je relacija ekvivalencije (vidi npr. zadatak **??** i dodatak B).

Primer 4.3 *Neka je $B = \{1,2,3,6\}$, i na skupu B posmatrajmo operaciju „najmanji zajednički sadržalac"* NZS *definisanu sa*

$$\forall x,y,s \in B, \quad \mathsf{NZS}(x,y) = s \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (x \mid s \ \wedge \ y \mid s \ \wedge \ (\forall t \in B)\,((x \mid t \ \wedge \ y \mid t) \ \Rightarrow \ s \le t))$$

(najmanji element skupa B koji je deljiv i sa x i sa y). NZS *je zaista binarna operacija skupa B, i njena Kejlijeva tablica je*

NZS	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

Na osnovu tablice zaključujemo (vidi komentar na strani 52) da je operacija NZS *komutativna, idempotentna, neutralni element je* 1*, inverzni element postoji samo za* 1*, i nilpotentni element je* 6 *(sve ovo se može dokazati i na osnovu definicije operacije* NZS*). Operacija* NZS *nije kancelativna jer je npr.* $\mathsf{NZS}(2,3) = \mathsf{NZS}(2,6) = 6$ *i* $3 \neq 6$*. Što se tiče asocijativnosti, uočimo da se svaki element skupa B može napisati u obliku* $2^\alpha \cdot 3^\beta$ *za neke* $\alpha,\beta \in \{0,1\}$*:*

$$1 = 2^0 \cdot 3^0, \qquad 2 = 2^1 \cdot 3^0, \qquad 3 = 2^0 \cdot 3^1, \qquad 6 = 2^1 \cdot 3^1.$$

Kako su 2 *i* 3 *različiti prosti brojevi, operaciju* NZS *na skupu B možemo predstaviti na sledeći način*

$$\mathsf{NZS}\left(\underbrace{2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}}_{x},\underbrace{2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}}_{y}\right)=2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}},\qquad \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2\in\{0,1\}$$

jer je rezultat od $\mathsf{NZS}(x,y)$ *deljiv sa* 2 *ako i samo ako je bar jedan od* x *i* y *deljiv sa* 2, *i deljiv je sa* 3 *ako i samo ako je bar jedan od* x *i* y *deljiv sa* 3.

Sada koristeći asocijativnost operacije $\max$ *na skupu* $\{0,1\}$ *(vidi primer* **4.1***) možemo utvrditi da zbog asocijativnosti operacije* $\max$ *na skupu* $\{0,1\}$ *sledi asocijativnost operacije* NZS *na skupu* B*; naime, za sve* $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3,\beta_3\in\{0,1\}$ *(odnosno za sve* $2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1},2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2},2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\in B$*) važi*

$$\mathsf{NZS}\Big(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1},\mathsf{NZS}\big(2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2},2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\big)\Big)=\mathsf{NZS}\Big(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1},2^{\max\{\alpha_2,\alpha_3\}}\cdot 3^{\max\{\beta_2,\beta_3\}}\Big)=$$
$$=2^{\max\{\alpha_1,\max\{\alpha_2,\alpha_3\}\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,\max\{\beta_2,\beta_3\}\}}=2^{\max\{\max\{\alpha_1,\alpha_2\},\alpha_3\}}\cdot 3^{\max\{\max\{\beta_1,\beta_2\},\beta_3\}}=$$
$$=\mathsf{NZS}\Big(2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}},2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\Big)=\mathsf{NZS}\Big(\mathsf{NZS}\big(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1},2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\big),2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\Big).$$

Sve navedene osobine operacije NZS *na skupu* B *možemo utvrditi na još jedan način. Posmatrajmo grupoid iz primera* **4.2** *i funkciju* $\varphi:\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3,6\}$ *definisanu sa* $\varphi=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 3 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix}$. *Funkcija* φ *je očigledno bijektivna. Ako u tablici operacije* $*$ *iz primera* **4.2** *zamenimo svako* a *sa* 3, *svako* b *sa* 6, *svako* c *sa* 1 *i svako* d *sa* 2, *a zatim u dobijenoj tablici zamenimo prvu i treću vrstu kao i prvu i treću kolonu, i zamenimo drugu i četvrtu vrstu kao i drugu i četvrtu kolonu, dobijamo tablicu operacije* NZS *na skupu* B *(vidi komentar na strani 54). To znači da je funkcija* φ *izomorfizam iz grupoida* $(A,*)$ *u grupoid* (B,NZS). *Dakle, grupoidi* $(A,*)$ *i* (B,NZS) *su izomorfni, što znači da imaju identične osobine (vidi komentar na strani 54). Kako je u primeru* **4.2** *dokazano da je operacija* $*$ *asocijativna u skupu* A, *zbog izomorfizma sledi da je operacije* NZS *asocijativna u skupu* B.

Za vežbu možete pokazati da je takođe i funkcija $\psi:\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3,6\}$ *definisana sa* $\psi=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 2 & 6 & 1 & 3\end{pmatrix}$ *izomorfizam iz* $(A,*)$ *u* (B,NZS), *kao i da su funkcije*

$$f:\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3,6\},\quad f=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$
$$g:\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3,6\},\quad g=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 1 & 6 & 1 & 6\end{pmatrix},$$
$$h:\{a,b,c,d\}\to\{1,2,3,6\},\quad h=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 6 & 6 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

homomorfizmi iz grupoida $(A,*)$ *u grupoid* (B,NZS). ✔

Zadatak 4.4 *Neka je* $A\neq\emptyset$, *i neka je* $\mathbb{F}=\{f\mid f:A\to A\}$ *i* $\mathbb{B}=\left\{f\mid f:A\overset{\text{"1-1"}}{\underset{\text{"na"}}{\longrightarrow}}A\right\}$. *Ispitati strukture* $\mathcal{F}=(\mathbb{F},\circ)$ *i* $\mathcal{B}=(\mathbb{B},\circ)$ *(gde je* $\circ$ *kompozicija funkcija).*

➥ ***Rešenje:***

(a) $\mathcal{F}$ je grupoid, jer za $f,g\in\mathbb{F}$, tj. $f:A\to A$ i $g:A\to A$, važi $h=f\circ g\in\mathbb{F}$ jer je $h:A\to A$.

Kompozicija funkcija je asocijativna operacija.

U opštem slučaju, kompozicija funkcija nije komutativna operacija - vidi zadatak **2.4** gde je $f \circ g \neq g \circ f$ (samo za neke specijalne slučajeve važi $f \circ g \neq g \circ f$, npr. za funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f(x) = 5x$ i $g(x) = 2x$ je $f(g(x)) = g(f(x)) = 10x$).

Takođe, u opštem slučaju kompozicija funkcija nije idempotentna. Na primer, za $A = \{1, 2\}$ i funkciju $f : A \to A$ definisanu sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ važi $f \circ f = i_A \neq f$. Samo za neke specijalne slučajeve važi $g \circ g = g$, npr. za $A = \{1, 2\}$ i funkciju $g : A \to A$ definisanu sa $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ važi $g \circ g = g$.

Neutralni element je $i_A \in \mathbb{F}$ jer za sve $f \in \mathbb{F}$ i sve $x \in A$ važi

$$i_A(\underbrace{f(x)}_{t}) = \underbrace{f(x)}_{t} \qquad \text{tj.} \qquad i_A \circ f = f,$$

i analogno $f \circ i_A = f$.

Za neke funkcije postoje inverzni elementi, a za neke ne. Npr. za $A = \{1, 2, 3\}$ i funkcije $f : A \to A$ i $g : A \to A$ definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ne postoji inverzni element f' za funkciju f, dok je inverzni element funkcije g funkcija $g' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = g^{-1}$. Ako za funkciju h postoji inverzni element h', tada je $h \circ h' = h' \circ h = i_A$, te sledi da mora biti $h' = h^{-1}$ (vidi komentar na strani 24). Zaključujemo da funkcija $h \in \mathbb{F}$ ima inverzni element $h' = h^{-1}$ ako i samo ako je funkcija h bijektivna.

U skupu $\mathbb{F}$ kompozicija funkcija nije kancelativna. Npr. za $A = \{1, 2\}$ i funkcije $f : A \to A$, $g : A \to A$ i $h : A \to A$ definisane sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ važi $f \circ g = f \circ h = f$ i $g \neq h$.

(b) Skup $\mathbb{B}$ sadrži sve bijektivne funkcije skupa A u skup A, a kako je kompozicija bijektivnih funkcija bijektivna funkcija (vidi komentar na strani 24), sledi da je $\mathcal{B}$ grupoid (što znači da je $\mathcal{B}$ podgrupoid grupoida $\mathcal{A}$).

Kompozicija funkcija je uvek asocijativna funkcija.

Kompozicija funkcija ni u skupu bijektivnih funkcija nije idempotentna operacija, što potvrđuje primer pod (a).

Komutativnost u opštem slučaju ne važi ni za bijektivne funkcije. Na primer, za $A = \mathbb{R}$ i bijektivne funkcije $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = 4x + 5$ važi $f \circ g \neq g \circ f$ jer je $f(g(x)) = 8x + 13 \neq 8x + 17 = g(f(x))$.

Neutralni element je opet identička funkcija jer je i ona bijektivna (tj. $i_A \in \mathbb{B}$). Stoga se i inverzni elementi poklapaju sa inverznim funkcijama, a kako skupu $\mathbb{B}$ pripadaju samo bijektivne funkcije, sledi da svaka funkcija $f \in \mathbb{B}$ ima sebi inverzni element $f^{-1} \in \mathbb{B}$.

Kako postoje neutralni i inverzni elementi, operacija $\circ$ je kancelativna u $\mathbb{B}$. ☑

☞ Ukoliko razmatramo osobine kompozicije funkcija na skupu $\mathbb{F}$ nekih (ne obavezno svih) funkcija $f : A \to B$, tada mora biti $B = A$ jer inače urađeni par $\mathcal{F} = (\mathbb{F}, \circ)$ nije ni grupoid. Ako to jeste slučaj, tada kompozicija funkcija jeste asocijativna na skupu $\mathbb{F}$, a u opštem slučaju nije komutativna. U nekim specijalnim slučajevima operacija $\circ$ može da bude komutativna na skupu $\mathbb{F}$; na primer, za $\mathbb{F} = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ gde je funkcija $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f_a(x) = ax$ za sve $a, b \in \mathbb{R}$ važi

$$f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x)) = a(bx) = (ab)x = f_{ab}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

te je $f_a \circ f_b = f_{ab} = f_{ba} = f_b \circ f_a$ za sve $f_a, f_b \in \mathbb{F}$.

Ukoliko skup funkcija $\mathbb{F}$ sadrži identičku funkciju i_A, tada je i_A obavezno neutralni element u grupoidu $\mathcal{F}$, i u tom slučaju su inverzni elementi, ukoliko postoje, obavezno inverzne funkcije. Ukoliko $i_A \notin \mathbb{F}$, tada se može desiti da u $\mathcal{F}$ ne postoji neutralni element, a može se desiti i da je neutralni element neka funkcija $e \neq i_A$; u poslednjem slučaju inverzni elementi, ukoliko postoje, ne moraju biti inverzne funkcije. Dakle, pojam inverzne funkcije se poklapa sa pojmom inverznih elemenata na nekom skupu funkcija samo ukoliko se radi o operaciji kompozicije funkcija, i pri tome je neutralni element identička funkcija. Vidi zadatak **6.32**.

Zadatak 4.5 *Neka je $\mathbb{G} = (G, *)$ grupoid, i neka je na skupu G^n (za neko $n \in \mathbb{N}$) binarna operacija $\circledast$ definisana sa*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \circledast (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 * b_1, a_2 * b_2, \ldots, a_n * b_n)$$

za sve $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in G^n$. Dokazati da je $\mathbb{G}^n = (G^n, \circledast)$ grupoid, kao i da važi

(a) *ako je $*$ asocijativna operacija u $\mathbb{G}$, tada je $\circledast$ asocijativna operacija u $\mathbb{G}^n$;*

(b) *ako je $*$ komutativna operacija u $\mathbb{G}$, tada je $\circledast$ komutativna operacija u $\mathbb{G}^n$;*

(c) *ako je $*$ idempotentna operacija u $\mathbb{G}$, tada je $\circledast$ idempotentna operacija u $\mathbb{G}^n$;*

(d) *ako je postoji neutralni element e u $\mathbb{G}$, tada postoji neutralni element i u $\mathbb{G}^n$, i to je $\mathsf{e} = (e, e, \ldots, e)$;*

(e) *ako u $\mathbb{G}$ postoji neutralni element e i ako u $\mathbb{G}$ za sve $x \in G$ postoje inverzni elementi $x' \in G$, tada postoji neutralni element $\mathsf{e} = (e, e, \ldots, e)$ u $\mathbb{G}^n$, i za svaki element $\mathsf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ postoji njemu inverzni element $\tilde{\mathsf{a}} = \left(a_1', a_2', \ldots, a_n'\right) \in G^n$ u $\mathbb{G}^n$;*

(f) *ako je $\mathcal{A}$ komutativna grupa, tada je i $\mathcal{F}$ komutativna grupa.*

➥ ***Rešenje:*** Iz same definicije, tj. zbog zatvorenosti operacije $*$ u G je jasno da je operacija $\circledast$ zatvorena u G^n, tj. $\mathbb{G}^n$ je grupoid.

(a) Za sve $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n), (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in G^n$ važi

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_2, \ldots, a_n) \circledast ((b_1, b_2, \ldots, b_n) \circledast (c_1, c_2, \ldots, c_n)) = \\
&= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \circledast (b_1 * c_1, b_2 * c_2, \ldots, b_n * c_n) = \\
&= (a_1 * (b_1 * c_1), a_2 * (b_2 * c_2), \ldots, a_n * (b_n * c_n)) = \\
&= ((a_1 * b_1) * c_1, (a_2 * b_2) * c_2, \ldots, (a_n * b_n) * c_n) = \\
&= (a_1 * b_1, a_2 * b_2, \ldots, a_n * b_n) \circledast (c_1, c_2, \ldots, c_n) = \\
&= ((a_1, a_2, \ldots, a_n) \circledast (b_1, b_2, \ldots, b_n)) \circledast (c_1, c_2, \ldots, c_n).
\end{aligned}$$

(b) Slično kao pod (a).

(c) Slično kao pod (a).

(d) Ako je e neutralni element u $\mathbb{G}$, tada za sve $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in G^n$ važi

$$(e,e,\dots,e)\circledast(a_1,a_2,\dots,a_n)=(e*a_1,e*a_2,\dots,e*a_n)=(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

i na isti način $(a_1,a_2,\dots,a_n)\circledast(e,e,\dots,e)=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, te je $\mathsf{e}=(e,e,\dots,e)$ neutralni element u $\mathbb{G}^n$.

(e) Neka u $\mathbb{G}$ postoji neutralni element e, i neka u $\mathbb{G}$ za sve $x\in G$ postoje inverzni elementi $x'\in G$. Na osnovu (d) je tada $\mathsf{e}=(e,e,\dots,e)$ neutralni element u $\mathbb{G}^n$, i za sve $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in G^n$ važi

$$\left(a_1',a_2',\dots,a_n'\right)\circledast(a_1,a_2,\dots,a_n)=\left(a_1'*a_1,a_2'*a_2,\dots,a_n'*a_n\right)=(e,e,\dots,e)=\mathsf{e},$$

i na isti način $(a_1,a_2,\dots,a_n)\circledast\left(a_1',a_2',\dots,a_n'\right)=\mathsf{e}$, te je $\tilde{\mathsf{a}}=\left(a_1',a_2',\dots,a_n'\right)$ inverzni element elementa $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ u $\mathbb{G}^n$.

(f) Sledi iz prethodnih tačaka. ☑

Na primer, grupoidi $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$, $\left(\mathbb{R}^3,+\right)$, $\left(\mathbb{R}^4,+\right)$, ..., gde je $+$ sabiranje uređenih n-torki, ima iste osobine kao grupoid $(\mathbb{R},+)$[1].

---

[1] Uobičajeno je da se umesto sa $\oplus$ sabiranje uređenih n-torki označava sa $+$.

Glava 5

Bulove algebre

Aksiome Bulove algebre $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

[BA1] *komutativnost*
$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a,$

[BA2] *distributivnost*
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c),$

[BA3] *neutralni elementi*
$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a,$

[BA4] *inverzni elementi*
$a + a' = 1, \quad a \cdot a' = 0.$

☞ U Bulovoj algebri $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ su konstante 0 i 1 različite.

☞ U svakoj konačnoj Bulovoj algebri je broj elemenata oblika 2^n za neko $n \in \mathbb{N}$. Tako ne postoji Bulova algebra sa npr. 6 elemenata, već samo sa 2, 4, 8, 16, … elemenata.

Osnovne teoreme Bulove algebre $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

[BT1] *zakon idempotentnosti*
$a + a = a, \quad a \cdot a = a,$

[BT2] *ograničenost*
$a + 1 = 1, \quad a \cdot 0 = 0,$

[BT3] *apsorbcija*
$a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a + b) = a,$

[BT4] $a + a' \cdot b = a + b, \quad a \cdot (a' + b) = a \cdot b,$

[BT5] *asocijativnost*
$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$

[BT6] *jedinstvenost komplementa*
$(a + x = 1 \ \wedge \ a \cdot x = 0) \ \Rightarrow \ x = a',$

[BT7] *involucija*
$(a')' = a,$

[BT8] $0' = 1 \ \wedge \ 1' = 0$,

[BT9] *De Morganovi zakoni*
$(a+b)' = a' \cdot b' \ \wedge \ (a \cdot b)' = a' + b'$.

☞ U Bulovoj algebri $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je sa $x \le y \ \Leftrightarrow \ x + y = y$ definisana relacija poretka. Kada kažemo ***relacija poretka Bulove algebre***, mislimo na ovu relaciju. Pod Haseovim dijagramom Bulove algebre podrazumevamo Haseov dijagram ove relacije poretka. U odnosu na nju, 0 je najmanji, a 1 najveći element.

☞ Uočimo da se aksiome i teoreme javljaju u tzv. „dualnim" parovima. Naime, ako u nekoj aksiomi ili teoremi svako + zamenimo sa $\cdot$, $\cdot$ sa +, 0 sa 1, 1 sa 0, i iskaz $x \le y$ iskazom $y \le x$, dobijamo „dualnu" aksiomu odnosno teoremu. Ovo pravilo se naziva ***princip dualnosti***. Stoga, ako dokažemo neko tvrđenje, na osnovu principa dualnosti mora da važi i dualno tvrđenje koje se dobija gorepomenutim zamenama.

Definicija 5.1 ***Podalgebra*** *Bulove algebre* $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *je svaka Bulova algebra* $\tilde{\mathbf{B}} = \left(\tilde{B}, +, \cdot, ', 0, 1\right)$ *gde je* $\tilde{B} \subseteq B$*, a operacije iz* $\tilde{\mathbf{B}}$ *su restrikcije operacija iz* $\mathbf{B}$.

☞ Konstante 0 i 1 iz podalgebre su iste kao konstante 0 i 1 u samoj Bulovoj algebri $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$. Svaka Bulova algebra ima kao podalgebre tzv. trivijalne podalgebre $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i samu $\mathbf{B}$. Pri proveri da li je $\tilde{\mathbf{B}} = \left(\tilde{B}, +, \cdot, ', 0, 1\right)$ podalgebra Bulove algebre $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ je dovoljno proveriti zatvorenost opercija u $\tilde{B}$ (vidi dodatak B).

Sledeća tri primera predstavljaju najvažnije primere Bulovih algebri:

Primer 5.1 *Uređena šestorka* $\mathcal{I} = (I, \vee, \wedge, \rceil, \bot, \top)$ *je Bulova algebra, gde je* $I = \{\bot, \top\}$*, i gde su* $\vee$*,* $\wedge$ *i* $\rceil$ *poznate operacije iskaznog računa - disjunkcija, konjunkcija i negacija:*

$\vee$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$\wedge$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$

$\rceil$	
$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$

Umesto oznaka $\bot$*,* $\top$*,* $\vee$*,* $\wedge$*,* $\vee$*,* $\rceil$ *se često koriste redom oznake* 0, 1, +, $\cdot$ *i* ′ *(vidi zadatak* **5.8***), a* $\mathcal{I}$ *nazivamo* ***Bulovom algebrom iskaznog računa***.

Lako se proverava da je navedena uređena šestorka zaista Bulova algebra:

[BA1] *Logičke operacije* $\vee$ *i* $\wedge$ *su komutativne što sledi iz odgovarajućih tautologija* $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *i* $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$*, a što se može dokazati i direktnom proverom svih* $2^2 = 4$ *uređenih parova* $(p, q) \in \{\bot, \top\}^2$.

[BA3] *Aksiome* $a + 0 = a$ *i* $a \cdot 1 = a$ *su zadovoljene što sledi iz odgovarajućih tautologija* $(p \vee \bot) \Leftrightarrow p$ *i* $(p \wedge \top) \Leftrightarrow p$*, a što se može dokazati i direktnom proverom.*

[BA4] *Ispunjenost aksioma* $a + a' = 1$ *i* $a \cdot a' = 0$ *sledi iz tautologija* $(p \vee \rceil p) \Leftrightarrow \top$ *i* $(p \wedge \rceil p) \Leftrightarrow \bot$*, a što se može dokazati i direktnom proverom.*

[BA2] *Operacije* $\vee$ *i* $\wedge$ *su distributivne jedna prema drugoj što sledi iz tautologija* $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ *i* $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$*, a što se može dokazati i direktnom proverom svih* $2^3 = 8$ *uređenih trojki* $(p, q, r) \in \{\bot, \top\}^3$.

Naravno, sama $\mathcal{I}$ je jedina podalgebra od $\mathcal{I}$. Njeni elementi su u relaciji $\bot \leq \top$. ✔

Primer 5.2 *Neka je A proizvoljan neprazan skup. Za partitivni skup (skup svih podskupova) $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ skupa A je uređena šestorka $\mathcal{P}(A) = \big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\ \ }, \emptyset, A\big)$ Bulova algebra (zovemo je **Bulova algebra „partitivni skup"**).*

[BA1] *Za sve $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ važi $X \cup Y = Y \cup X$ i $X \cap Y = Y \cap X$:*

(1) $X \cup Y = Y \cup X$ akko $\forall x \in A,\ x \in X \cup Y \Leftrightarrow x \in Y \cup X$ akko
akko $\forall x \in A,\ (x \in X \vee x \in Y) \Leftrightarrow (x \in Y \vee x \in X)$ akko
akko $\forall x \in A,\ (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow (q(x) \vee p(x))$

gde je $p(x)$ iskaz $x \in X$, a $q(x)$ je iskaz $x \in Y$, pa pošto je poslednja u nizu ekvivalentnih formula tautologija, sledi tačnost jednakosti $X \cup Y = Y \cup X$;

(2) $X \cap Y = Y \cap X$ akko $\forall x \in A,\ x \in X \cap Y \Leftrightarrow x \in Y \cap X$ akko
akko $\forall x \in A,\ (x \in X \wedge x \in Y) \Leftrightarrow (x \in Y \wedge x \in X)$ akko
akko $\forall x \in A,\ (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (q(x) \wedge p(x))$

gde je $p(x)$ iskaz $x \in X$, a $q(x)$ je iskaz $x \in Y$, pa pošto je poslednja u nizu ekvivalentnih formula tautologija, sledi tačnost jednakosti $X \cup Y = Y \cup X$.

[BA2] *Za sve $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ je*
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ *i* $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$*:*

(1) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ akko
akko $\forall x \in A,\ x \in X \cap (Y \cup Z) \Leftrightarrow (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ akko
akko $\forall x \in A,\ (x \in X \wedge (x \in Y \vee x \in Z)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((x \in X \wedge x \in Y) \vee (x \in X \wedge x \in Z))$ akko
akko $\forall x \in A,\ (p(x) \wedge (q(x) \vee r(x))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((p(x) \wedge q(x)) \vee (p(x) \wedge r(x)))$

gde su $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, redom iskazi $x \in X$, $x \in Y$, $x \in Z$, pa pošto je poslednja u nizu ekvivalentnih formula tautologija, sledi tačnost jednakosti $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$;

(2) *analogno.*

[BA3] *Za svako $X \in \mathcal{P}(A)$ važi $X \cup \emptyset = X$ i $X \cap A = X$:*

(1) $X \cup \emptyset = X$ akko $x \in X \cup \emptyset \Leftrightarrow x \in X$ akko
akko $(x \in X \vee x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in X$ akko $(p(x) \vee \bot) \Leftrightarrow p(x)$

gde je $p(x)$ iskaz $x \in X$, pa pošto je poslednja u nizu ekvivalentnih formula tautologija, sledi tačnost jednakosti $X \cup A = X$;

(2) *analogno.*

[BA4] *Za svako $X \in \mathcal{P}(A)$ važi $X \cup \overline{X} = A$ i $X \cap \overline{X} = \emptyset$:*

(1) $X \cup \overline{X} = A$ akko $x \in X \cup \overline{X} \Leftrightarrow x \in A$ akko
akko $\big(x \in X \vee x \in \overline{X}\big) \Leftrightarrow x \in A$ akko
akko $(x \in X \vee x \notin X) \Leftrightarrow x \in A$ akko $(p(x) \vee \urcorner p(x)) \Leftrightarrow \top$

gde je $p(x)$ iskaz $x \in X$, pa pošto je poslednja u nizu ekvivalentnih formula tautologija, sledi tačnost jednakosti $X \cup \overline{X} = A$;

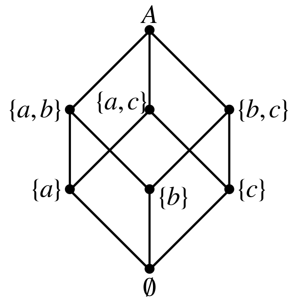
(2) *analogno.*

Uočimo da za sve $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ *važi*

$$X \leq Y \quad \Leftrightarrow \quad X \cup Y = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y,$$

te je u ovoj Bulovoj algebri relacija $\leq$ *u stvari dobro poznata skupovna relacija* $\subseteq$.

Na primer, za $A = \{a,b,c\}$ *je* $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$, *Haseov dijagram ove Bulove algebre (tj. relacije* $\subseteq$*) je*



a podalgebre od $\mathcal{P}(A)$ *su* $\big(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\{\emptyset, A, \{a\}, \{b,c\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\{\emptyset, A, \{b\}, \{a,c\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\{\emptyset, A, \{c\}, \{a,b\}\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$.

✔

Za $n \in \mathbb{N}$ ćemo nadalje sa D_n označavati skup delitelja broja n.

Primer 5.3 *Uređena šestorka* $\mathbf{D}_{30} = \big(D_{30}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\big)$, *je Bulova albegra, i zovemo je* ***Bulova algebra delitelja broja 30****, gde je* $D_{30} = (\{1,2,3,5,6,10,15,30\})$. *Operacije* NZS *i* NZD *(„najmanji zajednički sadržalac" i „najveći zajednički delilac") su definisane sa*

$$\mathsf{NZS}(x,y) = s \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (x \mid s \ \wedge\ y \mid s \ \wedge\ \forall t, ((x \mid t \ \wedge\ y \mid t) \ \Rightarrow\ s \leq t)),$$

$$\mathsf{NZD}(x,y) = s \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad (s \mid x \ \wedge\ s \mid y \ \wedge\ \forall t, ((t \mid x \ \wedge\ t \mid y) \ \Rightarrow\ t \leq s)).$$

Na isti način kao u primeru 4.3, *svaki element skupa* $x \in D_{30}$ *možemo predstaviti u obliku* $x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$ *za neke* $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$, *a operacije* NZS, NZD *i* $\frac{30}{x}$ *u obliku*

$$\mathsf{NZS}\big(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}\big) = 2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}},$$

$$\mathsf{NZD}\big(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}\big) = 2^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} \cdot 3^{\min\{\beta_1,\beta_2\}} \cdot 5^{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}},$$

$$\frac{30}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}} = \frac{2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}} = 2^{1-\alpha} \cdot 3^{1-\beta} \cdot 5^{1-\gamma},$$

gde su operacije max, min *i* $1-t$ *skupa* $\{0,1\}$ *definisane Kejlijevim tablicama:*

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

′	
0	1
1	0

i to su praktično redom logičke operacije $\vee$, $\wedge$ *i* $\rceil$ *gde je* $\perp$ *označeno kao* 0, *a* $\top$ *kao* 1 *(vidi zadatak* **5.8***).*

[BA1] *Posmatrajmo proizvoljne* $x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \in D_{30}$ *i* $y = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \in D_{30}$.

(1) $\mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}\right) = 2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}} =$
$= 2^{\max\{\alpha_2,\alpha_1\}}\cdot 3^{\max\{\beta_2,\beta_1\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_2,\gamma_1\}} = \mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}, 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\right).$
Prema tome, komutativnost operacije NZS *sledi iz komutativnosti operacije* max, *odnosno iz komutativnosti logičke disjunkcije. Komutativnost operacije* NZS *je inače i očigledna iz same definicije te operacije.*

(2) *Analogno (komutativnost operacije* NZD *sledi iz komutativnosti operacije* min *odnosno logičke konjunkcije).*

[BA2] *Posmatrajmo proizvoljne elemente* $x = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\in D_{30}$, $y = 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}\in D_{30}$ *i* $y = 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}\in D_{30}$. *Ako operacije* max *i* min *posmatramo kao logičke operacije* $\vee$ *i* $\wedge$, *koristeći distributivnost operacije* $\wedge$ *prema operaciji* $\vee$ *i obratno, tj. tautologije* $(p\wedge(q\vee r)) \overset{[*]}{\Leftrightarrow} ((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$ *i* $(p\vee(q\wedge r)) \overset{[**]}{\Leftrightarrow} ((p\vee q)\wedge(p\vee r))$ *dobijamo*

(1) $\mathsf{NZD}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, \mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}, 2^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}\right)\right) =$
$= \mathsf{NZD}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\max\{\alpha_2,\alpha_3\}}\cdot 3^{\max\{\beta_2,\beta_3\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_2,\gamma_3\}}\right) =$
$= 2^{\min\{\alpha_1,\max\{\alpha_2,\alpha_3\}\}}\cdot 3^{\min\{\beta_1,\max\{\beta_2,\beta_3\}\}}\cdot 5^{\min\{\gamma_1,\max\{\gamma_2,\gamma_3\}\}} =$
$\overset{[*]}{=} 2^{\max\{\min\{\alpha_1,\alpha_2\},\min\{\alpha_1,\alpha_3\}\}}.3^{\max\{\min\{\beta_1,\beta_2\},\min\{\beta_1,\beta_3\}\}}.5^{\max\{\min\{\gamma_1,\gamma_2\},\min\{\gamma_1,\gamma_3\}\}} =$
$= \mathsf{NZS}\left(2^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}}.3^{\min\{\beta_1,\beta_2\}}.5^{\min\{\gamma_1,\gamma_2\}}, 2^{\min\{\alpha_1,\alpha_3\}}.3^{\min\{\beta_1,\beta_3\}}.5^{\min\{\gamma_1,\gamma_3\}}\right) =$
$= \mathsf{NZS}\left(\mathsf{NZD}\left(2^{\alpha_1}.3^{\beta_1}.5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2}.3^{\beta_2}.5^{\gamma_2}\right), \mathsf{NZD}\left(2^{\alpha_1}.3^{\beta_1}.5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_3}.3^{\beta_3}.5^{\gamma_3}\right)\right).$

(2) *Analogno (distributivnost operacije* NZS *prema operaciji* NZD *sledi iz tautologije* $[**]$*).*

[BA3] *Posmatrajmo proizvoljno* $x = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\in D_{30}$. *Jednakosti* $\mathsf{NZS}(x,1) = x$ *i* $\mathsf{NZD}(x,30) = x$ *su očigledne, ali ih možemo dokazati i primenom odgovarajućih osobina operacija iz Bulove algebre iz primera* **5.3** *(tj. tautologija* $(p\vee\bot)\Leftrightarrow p$ *i* $(p\wedge\top)\Leftrightarrow p$*).*

(1) $\mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, 1\right) = \mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, 2^0\cdot 3^0\cdot 5^0\right) =$
$= 2^{\max\{\alpha_1,0\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,0\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_1,0\}} = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}.$

(2) *Analogno.*

[BA4] *Posmatrajmo proizvoljno* $x = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\in D_{30}$. *Jednakosti* $\mathsf{NZS}\left(x, \frac{30}{x}\right) = 30$ *i* $\mathsf{NZD}\left(x, \frac{30}{x}\right) = 1$ *se lako proveravaju za svih* 8 *elemenata skupa* D_{30}, *ali ih možemo dokazati i primenom odgovarajućih osobina operacija iz Bulove algebre iz primera* **5.3** *(tj. tautologija* $(p\vee\rceil p)\Leftrightarrow\top$ *i* $(p\wedge\rceil p)\Leftrightarrow\bot$*).*

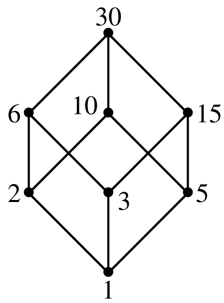
(1) $\mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, \frac{30}{2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}}\right) = \mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}, 2^{1-\alpha_1}\cdot 3^{1-\beta_1}\cdot 5^{1-\gamma_1}\right) =$
$= 2^{\max\{\alpha_1,1-\alpha_1\}}\cdot 3^{\max\{\beta_1,1-\beta_1\}}\cdot 5^{\max\{\gamma_1,1-\gamma_1\}} = 2^1\cdot 3^1\cdot 5^1 = 30.$

(2) *Analogno.*

Uočimo da za sve $x,z\in D30$ *važi*

$$x\le z \quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{NZS}(x,y) = y \quad\Leftrightarrow\quad x\mid y,$$

te je u ovoj Bulovoj algebri relacija $\le$ *u stvari dobro poznata relacija „deli". Haseov dijagram ove Bulove algebre (tj. relacije „deli") je*



a podalgebre od $\mathbf{D}_{30}$ *su (vidi zadatak* **5.10***)*
$\left(\{1,30\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, $\left(\{1,30,2,15\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$,
$\left(\{1,30,3,10\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, $\left(\{1,30,5,6\}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{30}{x}, 1, 30\right)$, $\mathbf{D}_{30}$. ✔

Zadatak 5.1 *Ispitati da li je* $\mathbf{D}_{12} = \left(D_{12}, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{12}{x}, 1, 12\right)$ *Bulova algebra, gde je* $D_{12} = \{1,2,3,4,6,12\}$ *skup delilaca broja* 12.

➥ ***Rešenje:*** Primetimo da je $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, i analogno primeru **5.3**, uvedimo reprezentaciju $x = 2^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \cdot 3^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0,1\}$ elemenata skupa D_{12}.

[BA1] Komutativnost operacija NZD i NZS je očigledna.

[BA2] Uzajamna distributivnost operacija NZD i NZS se proverava kao u primeru **5.3**.

[BA3] Za svako $x \in D_{12}$ očigledno važi $\mathsf{NZD}(x,1) = 1$ i $\mathsf{NZS}(x,12) = 12$.

[BA4] Aksiome $\mathsf{NZS}\left(x, \frac{12}{x}\right) = 12$ i $\mathsf{NZD}\left(x, \frac{12}{x}\right) = 1$ međutim nisu zadovoljene, jer je npr. $\mathsf{NZS}\left(2, \frac{12}{2}\right) = \mathsf{NZS}(2,6) = 6 \neq 12$ i $\mathsf{NZD}\left(2, \frac{12}{2}\right) = \mathsf{NZD}(2,6) = 2 \neq 1$. ☑

☞ Pokušajmo odgovoriti na pitanje zašto $\mathbf{D}_{30}$ jeste, a $\mathbf{D}_{12}$ nije Bulova algebra. Aksiome [BA1], [BA2] i [BA3] važe u obe strukture, a aksiome [BA4] su te kod kojih se situacija razlikuje, tj. aksioma [BA4] važi u $\mathbf{D}_{30}$ a ne važi u $\mathbf{D}_{12}$. U čemu je razlika? Kod uređene šestorke $\mathbf{D}_{12}$ imamo da je npr. $\mathsf{NZS}\left(2, \frac{12}{2}\right) = \mathsf{NZS}(2,6) = 6 \neq 12$ i $\mathsf{NZD}\left(2, \frac{12}{2}\right) = \mathsf{NZD}(2,6) = 2 \neq 1$ zato što su i 2 i 6 brojevi koji osim 1 imaju još jedan zajednički faktor, a to je 2. Tako dolazimo do odgovora na naše pitanje, i taj je odgovor precizno formulisan u zadatku **5.2**. Podsetimo se pre toga da se svaki prirodan broj n može razložiti na proste faktore, odnosno da je $n = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{s_r}$ gde su p_i različiti prosti brojevi i $s_i \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5.2 *Neka je n prirodan broj različit od jedinice, i neka je* $D_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid n\}$ *(skup svih delitelja broja n). Dokazati da je* $\mathbf{D}_n = \left(D_n, \mathsf{NZS}, \mathsf{NZD}, \frac{n}{x}, 1, n\right)$ *Bulova algebra ako i samo ako je* $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ *gde su* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *među sobom različiti prosti brojevi (tj. ako i samo ako se u faktorizaciji broja n svaki prost faktor pojavljuje najviše jednom).*

➥ ***Rešenje:***

($\Leftarrow$) Neka su p_i među sobom različiti prosti brojevi. Da je $\mathbf{D}_n$ Bulova algebra, dokazuje se na isti način kao u primeru **5.3**.

($\Rightarrow$) Neka je $\mathbf{D}_n$ Bulova algebra, i dokažimo da su p_i među sobom različiti prosti brojevi. Pretpostavimo suprotno, da među brojevima p_i ima i jednakih. Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $n = p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$ (pri čemu među brojevima p_i može biti i još jednakih). Pošto je $\frac{n}{p_1} = \frac{p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r}{p_1} = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$, sledi da je

$$\mathsf{NZS}\left(p_1, \frac{n}{p_1}\right) = \mathsf{NZS}(p_1, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r) =$$
$$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r \neq p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r = n,$$

što znači da u $\mathbf{D}_n$ ne važi aksioma [BA4] čime smo došli u kontradikciju s tim da je $\mathbf{D}_n$ Bulova algebra. ☑

Zadatak 5.3 *Zaokružiti slova (ili slovo) ispred iskaza koji su tačni u svakoj Bulovoj algebri* $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$.

1. $ab = a$	2. $(a+b)' = a'b'$	3. $a+b = ab$
4. $a+1 = 0'$	5. $a+a'b = a+b$	6. $ab = (a'+b')'$
7. $a+ab = a$	8. $a+b = (ab)'$	9. $a+bc = (a+b)(a+c)$
10. $1 \cdot 0 = 1$	11. $a+b = a+b'$	12. $a+b = (a'b')'$
13. $a+a = aa$	14. $a+a' = (aa')'$	15. $(a = 1 \vee b = 1) \Rightarrow a+b = 1$
16. $a \leq 0$	17. $a+b = 1 \Leftrightarrow b = a'$	18. $a+b = 1 \Rightarrow b = a'$
19. $a \leq a'$	20. $a = b' \Rightarrow a+b = 1$	21. $(a = 1 \vee b = 1) \Leftrightarrow a+b = 1$
22. $a \leq 1$	23. $ab \leq a+b$	

➥ ***Rešenje:*** Da bi utvrdili da je neko tvrđenje netačno, dovoljno je navesti bar jedan primer koji to potvrđuje. Netačna tvrđenja će biti ilustrovana na primeru Bulove algebre $\left(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\right)$ za $A = \{1, 2, 3\}$.

1. NE: $a = \{1\}$, $b = \emptyset$.
2. DA: teorema [BT9].
3. NE: $a = \{1\}$, $b = \emptyset$.
4. DA: $a + 1 \overset{[BT2]}{=} 1 \overset{[BT8]}{=} 0'$.
5. DA: teorema [BT4].
6. DA: $(a'+b')' \overset{[BT9]}{=} a''b'' \overset{[BT7]}{=} ab$.
7. DA: teorema [BT3].
8. NE: $a = \emptyset$, $b = \emptyset$.
9. DA: aksioma [BA2].
10. NE: $A \cap \emptyset \neq A$.
11. NE: $a = \emptyset$, $b = \{1\}$.
12. DA: $(a'b')' \overset{[BT9]}{=} a'' + b'' \overset{[BT7]}{=} a + b$.
13. DA: teorema [BT1].
14. DA: $(aa')' \overset{[BT9]}{=} a' + a'' \overset{[BT7]}{=} a' + a \overset{[BA1]}{=} a + a'$.

15. DA: $a+1 \overset{[BT2]}{=} 1$ i $1+b \overset{[BT2],[BA1]}{=} 1$.
16. NE: $a=\{1\} \nsubseteq \emptyset$.
17. NE: $a=\{1,2\}$, $b=\{1,3\}$.
18. NE: $a=\{1,2\}$, $b=\{1,3\}$.
19. NE: za $a=\{1\}$ je $a' = \overline{\{1\}} = \{2,3\}$, te ne važi $a \subseteq a'$.
20. DA: aksioma [BA4] (uz primenu aksiome [BA1]).
21. NE: $a=\{1,2\}$, $b=\{1,3\}$.
22. DA: za svako $a \in B$ je $a+1 \overset{[BT2]}{=} 1$ (po definiciji relacije $\leq$ je $x \leq y \Leftrightarrow x+y=y$).
23. DA: za sve $a,b \in B$ je $(ab)+(a+b) \overset{[BT5]}{=} (ab+a)+b \overset{[BT3],[BA1]}{=} a+b$. ☑

Zadatak 5.4 *Neka je* $\mathbf{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$ *proizvoljna Bulova algebra, i neka je* $a,b,c \in B$. *Dokazati zakone kancelacije*

(a) $(ab=ac \ \wedge \ a'b=a'c) \ \Rightarrow \ b=c$,

(b) $(a+b=a+c \ \wedge \ a'+b=a'+c) \ \Rightarrow \ b=c$.

➥ ***Rešenje:***

(a) Neka je $ab \overset{[1]}{=} ac$ i $a'b \overset{[2]}{=} a'c$. Sledi

$$b \overset{[BA3]}{=} b\cdot 1 \overset{[BA4]}{=} b(a+a') \overset{[BA2]}{=} ba+ba' \overset{[BA1]}{=} ab+a'b \overset{[1],[2]}{=}$$
$$= ac+a'c \overset{[BA1]}{=} ca+ca' \overset{[BA2]}{=} c(a+a') \overset{[BA4]}{=} c\cdot 1 \overset{[BA3]}{=} c.$$

(b) Sledi na osnovu (a) i principa dualnosti. ☑

Zadatak 5.5 *Dokazati da su u svakoj Bulovoj algebri* $\mathbf{B}=(B,+,\cdot,',0,1)$ *sledeći iskazi ekvivalentni:*

(a) $xy=x$, (b) $x+y=y$, (c) $x'+y=1$, (d) $xy'=0$.

➥ ***Rešenje:*** Umesto da dokazujemo ekvivalentost svaka dva iskaza (što čini dokaz 6 ekvivalencija tj. 12 implikacija), zbog tranzitivnosti ekvivalencije je dovoljno dokazati npr. da je (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\wedge$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\wedge$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) (samo 3 ekvivalencije tj. 6 implikacija). Međutim, zbog tranzitivnosti implikacije, umesto pomenutih 6 implikacija dovoljno je dokazati npr. (a) $\Rightarrow$ (b) $\wedge$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\wedge$ (d) $\Rightarrow$ (a).

(a $\Rightarrow$ b) Neka je $xy \overset{*}{=} x$. Sledi

$$x+y \overset{*}{=} xy+y \overset{[BA3],[BA1]}{=} yx+y1 \overset{[BA2]}{=} y(x+1) \overset{[BT2]}{=} y1 \overset{[BA3]}{=} y.$$

(b $\Rightarrow$ c) Neka je $x+y \overset{*}{=} y$. Sledi

$$x'+y \overset{*}{=} x'+(x+y) \overset{[BT5]}{=} (x'+x)+y \overset{[BA1],[BA4]}{=} 1+y \overset{[BA1],[BT2]}{=} 1.$$

(c $\Rightarrow$ d) Neka je $x'+y \overset{*}{=} 1$. Sledi

$$xy' \overset{[BT7]}{=} (x')'y' \overset{[BT9]}{=} (x'+y)' \overset{*}{=} 1' \overset{[BT8]}{=} 0.$$

(d $\Rightarrow$ a) Neka je $xy' \stackrel{*}{=} 0$. Sledi

$$xy \stackrel{[BA3]}{=} xy+0 \stackrel{*}{=} xy+xy' \stackrel{[BA2]}{=} x(y+y') \stackrel{[BA4]}{=} x1 \stackrel{[BA3]}{=} x. \qquad \boxtimes$$

☞ Prethodno tvrđenje nam praktično daje još tri ekvivalentne definicije relacije poretka $\leq$ u Bulovoj algebri.

Zadatak 5.6 *Dokazati da u svakoj Bulovoj algebri* $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *za sve* $a, b, c \in B$ *važi*

(a) $a \leq a+b$ *i* $ab \leq a$
(i, naravno, zbog komutativnosti: $b \leq a+b$ *i* $ab \leq b$*),*

(b) $(a \leq c \ \wedge\ b \leq c) \Leftrightarrow a+b \leq c \quad i \quad (c \leq a \ \wedge\ c \leq b) \Leftrightarrow c \leq ab,$

(c) $(a \leq c \ \wedge\ b \leq c) \Rightarrow ab \leq c \quad i \quad (c \leq a \ \wedge\ c \leq b) \Rightarrow c \leq a+b,$
a obratne implikacije ne važe,

(d) $a \leq b \Leftrightarrow (a+c \leq b+c \ \wedge\ ac \leq bc),$

(e) $a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a' \quad i \quad a < b \Leftrightarrow b' < a',$
gde je $a < b$ *akko* $(a \leq b \ \wedge a \neq b)$*).*

➥ ***Rešenje:*** Koristeći teoreme i aksiome Bulove algebre, kao i definiciju relacije poretka $x \leq y \stackrel{[*]}{\Leftrightarrow} x+y=y$ dokazujemo redom tvrđenja. Koristićemo i ekvivalentnu definiciju relacije poretka (vidi zadatak **5.5**) $x \leq y \stackrel{[**]}{\Leftrightarrow} xy = x$.

(a) $a \leq a+b \stackrel{[*]}{\Leftrightarrow} a+(a+b) = a+b \stackrel{[BT6]}{\Leftrightarrow} (a+a)+b = a+b \stackrel{[BT1]}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow a+b = a+b \Leftrightarrow \top,$

$ab \leq a \stackrel{[*]}{\Leftrightarrow} ab+a = a \stackrel{[BA2]}{\Leftrightarrow} a(b+1) = a \stackrel{[BT2]}{\Leftrightarrow} a \cdot 1 = a \stackrel{[BA3]}{\Leftrightarrow} \top.$

(b) Dokazujemo prvu od navedenih ekvivalencija:

$(\rightarrow)$ $(a \leq c \ \wedge\ b \leq c) \stackrel{[*]}{\Rightarrow} (a+c = c \ \wedge\ b+c = c) \Rightarrow$
$\Rightarrow (a+c)+(b+c) = c+c \stackrel{[BT5],[BA1],[BT1]}{\Rightarrow} (a+b)+c = c \stackrel{[*]}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow a+b \leq c,$

$(\leftarrow)$ $a+b \leq c \stackrel{[*]}{\Rightarrow} (a+b)+c = c \stackrel{[BT1],[BA1],[BT5]}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow (a+c)+(b+c) \stackrel{\star}{=} c+c,$
te je s jedne strane
$a+c \stackrel{[BA3],[BA4]}{=} a+c+bb' \stackrel{[BA2]}{=} (a+c+b)(a+c+b') \stackrel{[BT1],[BA1],[BT5]}{=}$
$= ((a+c)+(b+c))(c+(a+b')) \stackrel{\star,[BT1]}{=} c(c+(a+b')) \stackrel{[BT3]}{=} c,$
i analogno
$b+c \stackrel{[BA3],[BA4]}{=} b+c+aa' \stackrel{[BA2]}{=} (b+c+a)(b+c+a') \stackrel{[BT1],[BA1],[BT5]}{=}$
$= ((a+c)+(b+c))(c+(b+a')) \stackrel{\star,[BT1]}{=} c(c+(b+a')) \stackrel{[BT3]}{=} c.$

Analogno, tj. dualno se dokazuje ekvivalencija $(c \leq a \ \wedge\ c \leq b) \Leftrightarrow c \leq ab$.

(c) Dokazujemo prvu od navedenih implikacija:

$$(a \le c \ \wedge \ b \le c) \overset{[**]}{\Rightarrow} (ac = a \ \wedge \ bc = b) \ \Rightarrow \ (ac)(bc) = ab \overset{[BT5],[BA1]}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \ abcc = ab \overset{[BT1],[BT5]}{\Rightarrow} (ab)c = ab \overset{[**]}{\Rightarrow} ab \le c.$$

Analogno, tj. dualno se dokazuje implikacija $(c \le a \ \wedge \ c \le b) \Rightarrow c \le a + b$.

Da obratne implikacije ne važe, dokazuje sledeći primer. Neka je $X = \{1,2,3\}$. U Bulovoj algebri $\left(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, X\right)$ posmatrajmo elemente $a = \{1,2\}$, $b = \{2,3\}$ i $c = \{2\}$ za koje važi $a \cap b \le c$ (jer je $(a \cap b) \cup c = \{2\} = c$), ali s druge strane ne važi $a \le c \ \wedge \ b \le c$ (npr. ne važi relacija $a \le c$ jer je $a \cup c = \{1,2\} \ne c$), tako da implikacija $ab \le c \ \Rightarrow \ (a \le c \ \wedge \ b \le c)$ nije zadovoljena. U istoj Bulovoj algebri nije zadovoljena ni implikacija $c \le a + b \ \Rightarrow \ (c \le a \ \wedge \ c \le b)$, npr. za $a = \{1\}$, $b = \{2\}$, $c = \{1,2\}$.

(d) Dokazujemo da prvi iskaz implicira drugi, i obratno.

$(\rightarrow)$ $a \le b \overset{[*],[**]}{\Rightarrow} (a + b = b \ \wedge \ ab = a) \ \Rightarrow$
$$\Rightarrow \ ((a+b)+c = b+c \ \wedge \ (ab)c = ac) \overset{[BT1],[BA1],[BT5]}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \ ((a+c)+(b+c) = b+c \ \wedge \ (ac)(bc) = ac) \overset{[*]}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \ (a+c \le b+c \ \wedge \ ac \le bc);$$

$(\leftarrow)$ Neka je $a + c \le b + c$ i $ac \le bc$. Iz implikacija

$$[1] \ a+c \le b+c \overset{[*]}{\Rightarrow} (a+c)+(b+c) = b+c \overset{[BT1],[BA1],[BT5]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Rightarrow \ (a+b)+c = b+c \ / \cdot c' \overset{[BA1],[BT5]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Rightarrow \ (a+b)c' + cc' = bc' + cc' \overset{[BA4],[BA3]}{\Leftrightarrow} (a+b)c' = bc',$$
$$[2] \ ac \le bc \overset{[*]}{\Rightarrow} ac + bc = bc \overset{[BA1],[BA2]}{\Leftrightarrow} (a+b)c = bc,$$

sledi da je

$$a+b \overset{[BA3],[BA4]}{=} (a+b)(c+c') \overset{[BA2]}{=} (a+b)c + (a+b)c' \overset{[1],[2]}{=}$$
$$= bc + bc' \overset{[BA2]}{=} b(c+c') \overset{[BA4]}{=} b \cdot 1 \overset{[BA3]}{=} b,$$

odnosno $a \le b$.

(e) [1] $a \le b \overset{[*]}{\Leftrightarrow} a + b = b \overset{[BT7]}{\Leftrightarrow} (a+b)' = b' \overset{[BT9]}{\Leftrightarrow} a'b' = b' \overset{[BA1]}{\Leftrightarrow}$
$$\Leftrightarrow \ b'a' = b' \overset{[*]}{\Leftrightarrow} b' \le a';$$

[2] $a < b \ \Leftrightarrow \ (a \le b \ \wedge \ a \ne b) \overset{[1],[BT9]}{\Leftrightarrow} (b' \le a' \ \wedge \ a' \ne b') \ \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \ b' < a'.$$

☑

☞ Iz ovih tvrđenja pod (b) lako sledi da je $a + b = \sup\{a,b\}$ i $ab = \inf\{a,b\}$ u odnosu na relaciju $\le$.

Definicija 5.2 *Neka su* $\mathbf{B}_1 = \left(B_1, +_1, \cdot_1, \overline{}^1, 0_1, 1_1\right)$ *i* $\mathbf{B}_2 = \left(B_2, +_2, \cdot_2, \overline{}^2, 0_2, 1_2\right)$ *Bulove algebre. Funkcija* $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ *je* ***homomorfizam*** *iz Bulove algebre* $\mathbf{B}_1$ *u Bulovu algebru* $\mathbf{B}_2$ *ako za sve* $x, y \in B_1$ *važi*

$$\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y), \qquad \varphi(x \cdot_1 y) = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y), \qquad \varphi\left(\overline{x}^1\right) = \overline{\varphi(x)}^2.$$

Ako je funkcija φ još i bijektivna, tada je ona **izomorfizam***, i u tom slučaju pišemo* $\mathbf{B}_1 \simeq \mathbf{B}_2$.

☞ Izomorfizam prenosi osobine sa jedne Bulove algebre na drugu. Ako je funkcija $\varphi : B_1 \to B_2$ izomorfizam iz Bulove algebre $\mathbf{B}_1 = \left(B_1, +_1, \cdot_1, \overline{}^1, 0_1, 1_1\right)$ u Bulovu algebru $\mathbf{B}_2 = \left(B_2, +_2, \cdot_2, \overline{}^2, 0_2, 1_2\right)$, tada je

$$\varphi(0_1) = 0_2, \qquad \varphi(1_1) = 1_2, \qquad \forall x, y \in B_1,\ x \leq y \ \Rightarrow\ \varphi(x) \leq \varphi(y),$$

i sl. Analogno kao kod grupa, ako je $\varphi : B_1 \to B_2$ izomorfizam iz Bulove algebre $\mathbf{B}_1 = \left(B_1, +_1, \cdot_1, \overline{}^1, 0_1, 1_1\right)$ u uređenu šestorku $\mathbf{B}_2 = \left(B_2, +_2, \cdot_2, \overline{}^2, 0_2, 1_2\right)$, gde su $+_2, \cdot_2$ binarne operacije skupa B_2, $\overline{}^2$ unarna operacija skupa B_2, i $0_2, 1_2 \in B_2$, tada sledi da je i $\mathbf{B}_2$ Bulova algebra.

☞ Za Bulovu algebru $\mathbf{B}_1$ kažemo da je izomorfna sa Bulovom algebrom $\mathbf{B}_2$ ako postoji izomorfizam $\varphi : B_1 \to B_2$. Relacija „je izomorfna sa” u skupu Bulovih algebri je relacija ekvivalencije (vidi zadatak **??**).

☞ Ako su Bulove algebre $\mathbf{B}_1 = \left(B_1, +_1, \cdot_1, \overline{}^1, 0_1, 1_1\right)$ i $\mathbf{B}_2 = \left(B_2, +_2, \cdot_2, \overline{}^2, 0_2, 1_2\right)$ definisane Kejlijevim tablicama, i ako je $\varphi : A \to B$ izomorfizam Bulove algebre $\mathbf{B}_1$ u Bulovu algebru $\mathbf{B}_2$, tada, ukoliko u Kejlijevim tablicama Bulove algebre $\mathbf{B}_1$ svaki element $x \in B_1$ zamenimo elementom $\varphi(x) \in B_2$, dobijamo tablice Bulove algebre $\mathbf{B}_2$ (pri čemu eventualno u tablicama dobijenim zamenom elemenata treba promeniti redosled elemenata).

Zadatak 5.7 *Neka je $A = \{a, b, c\}$. Dokazati da su Bulove algebre iz primera* **5.2** *i* **5.3** *($\mathcal{P}(A)$ i $\mathbf{D}_{30}$) izomorfne.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je $B = \{2, 3, 5\}$. Bulove algebre $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(B)$; su očigledno izomorfne (formalan dokaz za vežbu), pa ćemo dokazati izomornost Bulovih algebri $\mathcal{P}(B)$ i $\mathbf{D}_{30}$, a tada izomorfnost Bulovih algebri $\mathcal{P}(A)$ i $\mathbf{D}_{30}$ sledi iz tranzitivnosti relacije „biti izomorfan”.

Posmatrajmo funkciju $\varphi : \mathcal{P}(B) \to D_{30}$ definisanu sa $\forall X \subseteq B$, $\varphi(X) = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, gde je

$$\alpha = \begin{cases} 1 & , \quad 2 \in X \\ 0 & , \quad 2 \notin X \end{cases}, \qquad \beta = \begin{cases} 1 & , \quad 3 \in X \\ 0 & , \quad 3 \notin X \end{cases}, \qquad \gamma = \begin{cases} 1 & , \quad 5 \in X \\ 0 & , \quad 5 \notin X \end{cases}.$$

Funkcija φ je očigledno dobro definisana i bijektivna. Za proizvoljne $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ je $\varphi(X) = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ i $\varphi(Y) = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ za neke $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \{0, 1\}$. Važi (vidi primer **5.3**)

$$\begin{aligned} \mathsf{NZS}(\varphi(X), \varphi(Y)) &= \mathsf{NZS}\left(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}, 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}\right) = \\ &= 2^{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1, \beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}}, \end{aligned}$$

gde je

$\max\{\alpha_1,\alpha_2\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_1 = 1 \vee \alpha_2 = 1) \quad \Leftrightarrow \quad (2 \in X \vee 2 \in Y) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \in X \cup Y,$
i analogno
$\max\{\beta_1,\beta_2\} = 1 \;\Leftrightarrow\; 3 \in X \cup Y, \qquad \max\{\gamma_1,\gamma_2\} = 1 \;\Leftrightarrow\; 3 \in X \cup Y,$
te je $\mathsf{NZS}(\varphi(X),\varphi(Y)) = 2^{\max\{\alpha_1,\alpha_2\}} \cdot 3^{\max\{\beta_1,\beta_2\}} \cdot 5^{\max\{\gamma_1,\gamma_2\}} = \varphi(X \cup Y)$.

Na analogan način se dokazuje da je $\varphi(X \cap Y) = \mathsf{NZD}(\varphi(X),\varphi(Y))$ i $\varphi\big(\overline{X}\big) = \dfrac{1}{\varphi(X)}$ za sve $X,Y \in \mathcal{P}(B)$. Prema tome, funkcija φ je izomorfizam. ☑

Zadatak 5.8 *Neka je $B = \{0,1\}$, i neka su $+$, $\cdot$ i $\overline{}$ operacije skupa B definisane Kejlijevim tablicama:*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$\overline{}$
0	1
1	0

Neka je $\mathbf{B} = \big(B,+,\cdot,\overline{},0,1\big)$.

(a) *Dokazati da je* $\mathbf{B}$ *Bulova algebra koja je izomorfna sa Bulovom algebrom iz primera* **5.1**.

(b) *Neka je A proizvoljan neprazan skup, neka je $F = \{f \mid f : A \to B\}$, i neka su na skupu F definisane binarne operacije $\oplus$, $\odot$ i unarna operacija $\tilde{}$, kao i nularne operacije (konstante) $\mathbb{0}$ i $\mathbb{1}$ na sledeći način: za sve $f,g \in F$ definišemo*

$$\begin{array}{rl} f \oplus g: & \forall a \in A,\ (f \oplus g)(a) = f(a) + g(a), \\ f \odot g: & \forall a \in A,\ (f \odot g)(a) = f(a) \cdot g(a), \\ \tilde{f}: & \forall a \in A,\ \tilde{f}(a) = \overline{f(a)}, \\ \mathbb{0}: & \forall a \in A,\ \mathbb{0}(a) = 0, \\ \mathbb{1}: & \forall a \in A,\ \mathbb{1}(a) = 1. \end{array}$$

Dokazati da je $\mathbf{F} = \big(F,\oplus,\odot,\tilde{},\mathbb{0},\mathbb{1}\big)$ *Bulova algebra.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Da je **B** Bulova algebra, možemo dokazati direktno verifikujući aksiome Bulove algebre, ili, još jednostavnije, ovo tvrđenje će slediti i iz izomorfnosti struktura $\mathcal{I}$ iz primera **5.3** i **B**. Ovaj izomorfizam opet možemo dokazati na dva načina.

Prvi način

Funkcija $\varphi : \{\bot,\top\} \to \{0,1\}$ definisana sa $\varphi(\bot) = \begin{pmatrix} \bot & \top \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ je izomorfizam, što se lako proverava verifikacijom jednakosti

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \qquad \varphi(\urcorner x) = \overline{\varphi(x)},$$

za sva 4 uređena para $(x,y) \in \{\bot,\top\}^2$.

Drugi način

Izomorfnost - preko funkcije $\varphi(\bot) = \begin{pmatrix} \bot & \top \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - se lako vidi upoređivanjem Kejlijevih tablica odgovarajućih parova operacija $\vee$ i $+$, $\wedge$ i $\cdot$, $\urcorner$ i $\overline{}$. Naime, ako se u Kejlijevim tablicama operacija iz $\mathcal{I}$

$\vee$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$\wedge$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\top$

$\rceil$	
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

simboli operacija $\vee$, $\wedge$ i $\rceil$ zamene redom simbolima operacija $+$, $\cdot$ i $\overline{}$, a simboli elemenata $\perp$ i $\top$ skupa B se redom zamene simbolima elemenata $0 = \varphi(\perp)$ i $1 = \varphi(\top)$ skupa I, dobijamo Kejlijeve tablice

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\overline{}$	
0	1
1	0

operacija iz **B**, što znači da je φ izomorfizam (vidi komentar na strani 69).

(b) Pre svega, skup F ima bar dva različita elementa, odnosno važi $\mathbb{0} \neq \mathbb{1}$ jer je A neprazan skup i $0 \neq 1$. Koristeći da je **B** Bulova algebra [$*$], dokazujemo da je **F** Bulova algebra. Posmatrajmo proizvoljne $f, g, h \in F$.

[BA1] Dokaz da je $f \oplus g = g \oplus f$ i $f \odot g = g \odot f$:

(1) za svako $a \in A$ važi
$(f \oplus g)(a) = f(a) + g(a) \stackrel{[*]}{=} g(a) + f(a) = (g \oplus f)(a)$;

(2) analogno je $f \odot g = g \odot f$.

[BA2] Dokaz da je $f \odot (g \oplus h) = (f \odot g) \oplus (f \odot h)$ i $f \oplus (g \odot h) = (f \oplus g) \odot (f \oplus h)$:

(1) za svako $a \in A$ važi

$$\begin{aligned}&(f \odot (g \oplus h))(a) = f(a) \cdot (g \oplus h)(a) = f(a) \cdot (g(a) + h(a)) \stackrel{[*]}{=} \\ &= f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot h(a) = (f \odot g)(a) + (f \odot h)(a) = \\ &= ((f \odot g) \oplus (f \odot h))(a);\end{aligned}$$

(2) analogno je $f \oplus (g \odot h) = (f \oplus g) \odot (f \oplus h)$.

[BA3] Dokaz da je $f \odot \mathbb{1} = f$ i $f \oplus \mathbb{0} = f$:

(1) za svako $a \in A$ važi
$(f \odot \mathbb{1})(a) = f(a) \cdot \mathbb{1}(a) = f(a) \cdot 1 \stackrel{[*]}{=} f(a)$;

(2) analogno je $f \oplus \mathbb{0} = f$.

[BA4] Dokaz da je $f \odot \tilde{f} = \mathbb{0}$ i $f \oplus \tilde{f} = \mathbb{1}$:

(1) za svako $a \in A$ važi
$\left(f \odot \tilde{f}\right)(a) = f(a) \cdot \tilde{f}(a) = f(a) \cdot \overline{f(f)} \stackrel{[*]}{=} 0 = \mathbb{0}(a)$;

(2) analogno je $f \oplus \tilde{f} = \mathbb{1}$.

Dakle, svaki aksiom u **F** važi zato što važi odgovarajući aksiom u **B**.

☞ Važi i sledeće uopštenje. Ako je $\mathbf{B} = \left(B, +, \cdot, \overline{}, 0, 1\right)$ proizvoljna Bulova algebra, a na skupu $F = \{f \mid f : A \to B\}$ su operacije definisane na isti način kao u ovom zadatku, tada je **F** opet Bulova algebra što se dokazuje na isti način kao u ovom zadatku. ☑

Zadatak 5.9 *Na skupu* $B = \{0,1,2,3\}$ *popuniti Kejlijeve tablice operacija*

$+$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$\cdot$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$'$	
0	
1	
2	
3	

tako da $\mathbf{B} = (B,+,\cdot,',0,1)$ *bude Bulova algebra.*

➥ ***Rešenje:***

- Na osnovu [BT8] mora biti $0' = 1$ i $1' = 0$. Odavde sada zbog [BT6] sledi da $2' \in \{2,3\}$ i $3' \in \{2,3\}$, ali zbog [BT1] ne može biti $2' = 2$ i $3' = 3$ jer bismo dobili $2+2' = 2+2 = 2 \neq 1$ i $3+3' = 3+3 = 3 \neq 1$, pa tako dobijamo da mora biti $2' = 3$ i $3' = 3$ čime smo (na jedini mogući način) popunili Kejlijevu tablicu operacije $'$.

- Na osnovu prethodne analize i zbog aksiome [BA3] i teoreme [BT2] dobijamo da delimično popunjene Kejlijeve tablice moraju izgledati ovako:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	1		
3	3	1		

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2		
3	0	3		

$'$	
0	1
1	0
2	3
3	2

- Sada zbog aksioma [BA4] mora da važi $2+3 = 2+2' = 1$, $3+2 = 3+3' = 1$, $2\cdot 3 = 2\cdot 2' = 0$, $3\cdot 2 = 3\cdot 3' = 0$, a zbog teoreme [BT1] mora da važi $2+2 = 2$, $3+3 = 3$, $2\cdot 2 = 2$, $3\cdot 3 = 3$, tako da Kejlijeve tablice operacija $+$, $\cdot$, $'$ moraju izgledati ovako:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
3	3	1	1	3

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

$'$	
0	1
1	0
2	3
3	2

Sada je ostalo da proverimo da li ovako definisina operacije zadovoljavaju sve aksiome Bulove algebre. Verifikujemo ih direktnom proverom za sve moguće vrednosti promenljivih (uraditi za vežbu), čime dokazujemo da smo sa ovim operacijama dobili da **B** jeste Bulova algebra. ☑

☞ Primećujemo da smo tablice *morali* popuniti na navedeni način da bismo dobili Bulovu algebru, odakle takođe praktično sledi da „do na izomorfizam" postoji samo jedna Bulova algebra sa 4 elementa.

Zadatak 5.10 *Naći sve podalgebre Bulove algebre iz rešenja zadatka* **5.9***, sve podalgebre Bulove algebre iz primera* **5.3***, i sve podalgebre Bulove algebre iz primera* **5.2** *za* $A = \{a,b,c,d\}$.

➥ ***Rešenje:*** Kod konačnih Bulovih algebri, broj elemenata nosećeg skupa je uvek oblika 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, Bulova algebra može imati $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ elemenata, pa i pri traženju podalgebri ispitujemo samo podskupove čiji je broj elemenata oblika 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Pri tome još imamo u vidu da svaka Bulova algebra $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ ima bar dve podalgebre: $(\{0,1\}, +, \cdot, ', 0, 1)$ i $\mathbf{B}$ (sama sebi je podalgebra). Ovo su takozvane trivijalne podalgebre. Takođe još imamo u vidu da svaka podalgebra Bulove algebre $\mathbf{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ sadrži konstante 0 i 1.

(a) Bulova algebra iz rešenja zadatka **5.9** je četvoroelementna pa može imati samo dvoelementne i četvoroelementne podalgebre, što znači da ova Bulova algebra ima samo trivijalne podalgebre.

(b) Bulova algebra $\mathbf{D}_{30}$ iz primera **5.3** je 8-elementna tako da osim trivijalnih podalgebri može imati još samo 4-elementne, pa treba da ispitamo sve 4-elementne skupove (podskupove od D_{30}) koji sadrže konstante 1 i 30. Pošto i operacija $\frac{30}{x}$ mora biti zatvorena na tim skupovima, to svaki 3-člani skup oblika $\{1, 30, x\}$ još dopunjavamo komplementom elementa x i time dobijamo skupove $\{1, 2, 15, 30\}$, $\{1, 3, 10, 30\}$ i $\{1, 5, 6, 30\}$. Lako se proverava da su na ovim skupovima sve operacije zatvorene (dokaz za vežbu), te su podalgebre nabrojane u primeru **5.3** zaista sve podalgebre od $\mathbf{D}_{30}$.

(c) Bulova algebra $\big(\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, \{a,b,c,d\}\big)$ iz primera **5.2** je 16-elementna, te osim trivijalnih podalgebri $\big(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$ i $\big(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$ može imati još 4-elementne i 8-elementne podalgebre, pa treba da ispitamo sve 4-elementne i 8-elementne skupove (podskupove od $\mathcal{P}(A)$) koji sadrže konstante $\emptyset$ i A. Do 4-elementnih podalgebri dolazimo na sličan način kao pod (b). Operacija $\overline{}$ mora biti zatvorena na tim skupovima, pa svaki 3-člani skup oblika $\{\emptyset, A, X\}$ još dopunjavamo komplementom skupa X i time dobijamo skupove

$\{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, A\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a,c,d\}, A\}$, $\{\emptyset, \{c\}, \{a,b,d\}, A\}$,

$\{\emptyset, \{d\}, \{a,b,c\}, A\}$, $\{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, A\}$,

$\{\emptyset, \{a,c\}, \{b,d\}, A\}$, $\{\emptyset, \{a,d\}, \{b,c\}, A\}$.

Lako se proverava da su na ovim skupovima sve operacije zatvorene (dokaz za vežbu) i tako konačno dolazimo do svih 4-elementnih podalgebri:

$\big(\{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\{\emptyset, \{b\}, \{a,c,d\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$,

$\big(\{\emptyset, \{c\}, \{a,b,d\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\{\emptyset, \{d\}, \{a,b,c\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$,

$\big(\{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$, $\big(\{\emptyset, \{a,c\}, \{b,d\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$,

$\big(\{\emptyset, \{a,d\}, \{b,c\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$.

Do 8-elementnih podalgebri ćemo doći dodatnim dopunjavanjem 4-elementnih podalgebri. Tako na primer, ako u skup $\{\emptyset, \{a\}, \{b,c,d\}, A\}$ ubacimo još i $\{b\}$, tada zbog zatvorenosti operacija $\cup$, $\cap$ i $\overline{}$ moramo ubaciti i skupove $\{a,c,d\}$, $\{a,b\}$ i $\{c,d\}$, i zatim lako proveravamo da su sve operacije zatvorene, tj. da $\big(\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, A\}, \cup, \cap, \overline{}, \emptyset, A\big)$ jeste jedna podalgebra. Na isti način dolazimo do sledećih podalgebri:

$$\left(\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,d\},\{b,c,d\},\{a,b,d\},A\},\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A\right),$$
$$\left(\{\emptyset,\{a\},\{d\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,c,d\},\{a,b,c\},A\},\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A\right),$$
$$\left(\{\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d\},A\},\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A\right),$$
$$\left(\{\emptyset,\{b\},\{d\},\{b,d\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c\},A\},\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A\right),$$
$$\left(\{\emptyset,\{c\},\{d\},\{c,d\},\{a,b\},\{a,b,d\},\{a,b,c\},A\},\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A\right).$$

☑

Zadatak 5.11 *Ispitati da li su data preslikavanja homomorfizmi u Bulovu algebru* $\mathcal{I} = \{\{\bot,\top\},\vee,\wedge,\rceil,\bot,\top\}$*:*

(a) $A_1 = \{a,b\}$, $\mathcal{A}_1 = \left(\mathcal{P}(A_1),\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A_1\right)$,

$$\varphi : \mathcal{P}(A_1) \to \{\bot,\top\},\ \varphi : \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & A_1 \\ \bot & \bot & \top & \top \end{pmatrix};$$

(b) $A_2 = \{a,b,c\}$, $\mathcal{A}_2 = \left(\mathcal{P}(A_2),\cup,\cap,\overline{\ },\emptyset,A_2\right)$,

$$\psi : \mathcal{P}(A_2) \to \{\bot,\top\},\ \psi : \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} & \{c\} & \{a,c\} & \{b,c\} & A_2 \\ \bot & \bot & \bot & \bot & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix}.$$

➥ ***Rešenje:***

(a) Za vežbu.

(b) Neposredno se lako proverava da za svako $X \subseteq A_2$ važi $\psi\left(\overline{X}\right) = \rceil\psi(X)$. Za neposrednu verifikaciju uslova $\forall X,Y \in \mathcal{P}(A_2)$, $\psi(X \cup Y) = \psi(X) \vee \psi(Y)$ nam treba $|\mathcal{P}(A_2)| = 8^2 = 64$ provera, odnosno pola od toga tj. 32 ako imamo u vidu komutativnost operacija $\cup$ i $\vee$, ali ćemo mi proveru izvršiti na drugi način - tako što ćemo parove $X,Y \in \mathcal{P}(A_2)$ podeliti u četiri klase:

(1) za $X,Y \in \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ je i $X \cup Y \in \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, odakle sledi
$\psi(X \cup Y) = \bot = \bot \vee \bot = \psi(X) \vee \psi(Y)$;

(2) za $X,Y \in \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A_2\}$ je i $X \cup Y \in \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A_2\}$, odakle sledi
$\psi(X \cup Y) = \top = \top \vee \top = \psi(X) \vee \psi(Y)$;

(3) za skupove $X \in \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ i $Y \in \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A_2\}$ važi da je
$X \cup Y \in \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A_2\}$, odakle sledi
$\psi(X \cup Y) = \top = \bot \vee \top = \psi(X) \vee \psi(Y)$;

(4) za skupove $X \in \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A_2\}$ i $Y \in \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ važi da je
$X \cup Y \in \{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},A_2\}$, odakle sledi
$\psi(X \cup Y) = \top = \top \vee \bot = \psi(X) \vee \psi(Y)$.

Potpuno analogno proveravamo da je $\forall X,Y \in \mathcal{P}(A_2)$, $\psi(X \cap Y) = \psi(X) \wedge \psi(Y)$.

Komentar: na isti način se može dokazati da je funkcija $\theta : \mathcal{P}(A_2) \to \mathcal{P}(A_2)$ definisana sa

$$\theta : \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{c\} & \{a,c\} & \{b\} & \{b,c\} & \{a,b\} & A_2 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

homomorfizam Bulove algebre $\mathcal{P}(A_2)$ u samu sebe.

☑

Od raznih ekvivalentnih oblika nekog Bulovog izraza, po značaju se izdvajaju izrazi u obliku ***disjunktivne normalne forme*** (DNF), ***savršene disjunktivne normalne forme*** (SDNF), ***konjunktivne normalne forme*** (KNF), ***savršene konjunktivne normalne forme*** (SKNF) i ***minimalne disjunktivne normalne forme*** (MDNF). MDNF je „optimalan" oblik u smislu da je u njemu upotrebljen minimalan broj operacija (što je važno pri izradi elektronskih kola za realizaciju neke Bulove funkcije, jer manji broj operacija znači jednostavnije i jeftinije elektronsko kolo). Bulov izraz može da ima više DNF i KNF, takođe i više MDNF, dok su oblici SDNF i SKNF jedinstveno određeni u odnosu na zadani skup promenljivih koji se pojavljuju u izrazu.

☞ Ako treba naći npr. SDNF nekog Bulovog izraza, i ako nije drugačije naglašeno, podrazumeva se skup promenljivih koje se pojavljuju u zadanom izrazu.

Primer 5.4 *Na primer, za Bulov izraz $I = (xy' + x'z)'$, primenom aksioma i teorema Bulove algebre možemo dobiti razne* DNF *tog izraza:*

$$I = (xy' + x'z)' \overset{[BT9]}{=} (xy')'(x'z)' \overset{[BT9]}{=} (x' + y'')(x'' + z') \overset{[BT7]}{=} (x' + y)(x + z') =$$
$$\overset{[BT5],[BA1]}{=} x'x + x'z' + xy + yz' \overset{[BA4]}{=} 0 + x'z' + xy + yz' \overset{[BA3]}{=}$$
$$= \underbrace{x'z' + xy + yz'}_{\text{DNF}} \overset{[BA3],[BT5]}{=} x' \cdot 1 \cdot z' + xy + yz' \overset{[BA4]}{=} x'(y + y')z' + xy + yz' \overset{[BA2],[BT5]}{=}$$
$$= \underbrace{x'yz' + x'y'z' + xy + yz'}_{\text{DNF}} \overset{[BA3],[BT5]}{=} x'yz' + x'y'z' + xy \cdot 1 + 1 \cdot yz' \overset{[BA4]}{=}$$
$$= x'yz' + x'y'z' + xy(z + z') + (x + x')yz' \overset{[BA2],[BT5]}{=}$$
$$= x'yz' + x'y'z' + xyz + xyz' + xyz' + x'yz' \overset{[BT5],[BA1],[BT1]}{=} \underbrace{x'yz' + x'y'z' + xyz + xyz'}_{\text{DNF,SDNF}},$$

kao i razne KNF *tog izraza:*

$$I = (xy' + x'z)' \overset{[BT9]}{=} (xy')'(x'z)' \overset{[BT9]}{=} (x' + y'')(x'' + z') \overset{[BT7]}{=} \underbrace{(x' + y)(x + z')}_{\text{KNF}} =$$
$$\overset{[BA3],[BT5]}{=} (x' + y + 0)(x + 0 + z') \overset{[BA4]}{=} (x' + y + zz')(x + yy' + z') \overset{[BA1],[BT5],[BA2]}{=}$$
$$= \underbrace{(x' + y + z)(x' + y + z')(x + y + z')(x + y' + z')}_{\text{KNF,SKNF}}.$$

✔

Opis postupka nalaženja DNF i SDNF:

$[k1]$ - Koristeći De Morganove zakone [BT9] i zakon involucije [BT7] se oslobađamo delovanja komplementa na izraze u zagradama, tako da dobijemo izraz kod kojeg komplement deluje samo na promenljive.

$[k2]$ - Koristeći distributivnost operacije $\cdot$ prema operaciji $+$ dovodimo izraz na oblik „zbira" konjunkcija; pri tome možemo koristiti i uopštenje distributivnog zakona:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

$[k3]$ - Koristeći zakone $aa = a$, $aa' = 0$, $a + 0 = a$, i uklanjajući višestruka pojavljivanja jedne promenljive u jednoj konjunkciji, dobijamo izraz u obliku DNF (kao što smo videli u primeru **5.4**, koristeći zakon absorbcije [BT3], teoremu [BT4] i druge zakone možemo dobiti i druge ekvivalentne izraze u obliku DNF.

$[k4]$ - Da bismo od bilo koje DNF dobili SDNF, svaku elementarnu konjunkciju po potrebi „proširimo” promenljivama koje se ne pojavljuju u toj elementarnoj konjunkciji; na primer, ako u xz treba da ubacimo i promenljivu y, to radimo na sledeći način:

$$xz \overset{\text{[BA3],[BT5]}}{=} x\cdot 1\cdot z \overset{\text{[BA4]}}{=} x(y+y')z \overset{\text{[BA2],[BT5]}}{=} xyz + xy'z;$$

u završnom koraku koristeći idempotentni zakon [BT5] uklanjamo elementarne konjunkcije koje se u „zbiru” pojavljuju više puta.

Pri nalaženju KNF **i** SKNF postupamo dualno. Korak $[k1]$ je isti kao pri traženju DNF, a koraci $[k2]$, $[k3]$, $[k4]$ se zamenjuju koracima $[k2']$, $[k3']$, $[k4']$:

$[k2']$ - Koristeći distributivnost operacije $+$ prema operaciji $\cdot$ dovodimo izraz na oblik „proizvoda” disjunkcija; pri tome možemo koristiti i uopštenje distributivnog zakona:

$$(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m) + (b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\left(a_i + b_j\right).$$

$[k3']$ - Koristeći zakone $a + a = a$, $a + a' = 1$, $a\cdot 1 = a$ dobijamo izraz u obliku KNF.

$[k4']$ - Da bismo od KNF dobili SKNF, svaku elementarnu disjunkciju po potrebi „proširimo” promenljivama koje se ne pojavljuju u toj elementarnoj disjunkciji; u završnom koraku koristeći idempotentni zakon uklanjamo elementarne konjunkcije koje se u „proizvodu” pojavljuju više puta.

Pri svemu ovome koristimo komutativnost i asocijativnost operacija $+$ i $\cdot$.

Što se tiče Bulovih funkcija, radićemo samo na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$ iz primera **5.1**.[1]

☞ Svaki Bulov izraz jednoznačno određuje Bulovu funkciju, a jednoj Bulovoj funkciji odgovara više (beskonačno mnogo) ekvivalentnih Bulovih izraza.

Ako je $f(x_1,\ldots,x_n)$ Bulova funkcija definisana na dvoelementnoj Bulovoj algebri $(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$, tada se jedinstvene SDNF i SKNF mogu konstruisati na sledeći način:

$$\mathsf{SDNF}(f(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},$$

$$\mathsf{SKNF}(f(x_1,\ldots,x_n)) = \prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} \left(f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + x_1^{\rceil\alpha_1} + \ldots + x_n^{\rceil\alpha_n}\right),$$

gde je $x^\alpha = \left\{\begin{array}{lcl} x & , & \alpha = 1 \\ x' & , & \alpha = 0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{lcl} 1 & , & x = \alpha \\ 0 & , & x \neq \alpha \end{array}\right.$.

Zadatak 5.12 *Svesti na* DNF, KNF, SDNF *i* SKNF *sledeće Bulove izraze:*

(a) $I_1 = ((x+y')y(x'+z'))'(x(yz)')'$,

(b) $I_2 = ((x+y')z' + ux')'(xz')'$,

(c) $I_3 = (xy+x')(xy+z) + z'(x+z)' + y'(x+x'z)$,

[1] Bulove funkcije se mogu razmatrati na bilo kojoj Bulovoj algebri.

➥ ***Rešenje:***

(a) $\mathsf{DNF}(I_1)$:

$$I_1 = ((x+y')y(x'+z'))'(x(yz)')' \overset{[1]}{=} (((x+y')y)'+(x'+z')')(x'+(yz)'') \overset{[1]}{=}$$
$$= (((x+y')'+y')+x''z'')(x'+yz) \overset{[1]}{=} (x'y''+y'+xz)(x'+yz) \overset{[1]}{=}$$
$$= (\underbrace{x'y+y'+xz}_{a})(\underbrace{x'}_{b}+\underbrace{yz}_{c}) \overset{[2]}{=}$$
$$= (\underbrace{x'y}_{a_1}+\underbrace{y'}_{a_2}+\underbrace{xz}_{a_3})\underbrace{x'}_{b}+(\underbrace{x'y}_{c_1}+\underbrace{y'}_{c_2}+\underbrace{xz}_{c_3})\underbrace{yz}_{d} \overset{[2]}{=}$$
$$= x'x'y+x'y'+xx'z+x'yyz+yy'z+xyzz \overset{[3]}{=} x'y+x'y'+0+x'yz+0+xyz \overset{[3]}{=}$$
$$= \underbrace{x'y+x'y'+x'yz+xyz}_{\mathsf{DNF}};$$

navodimo još neke DNF izraza I_1:

$$I_1 = x'y+x'y'+x'yz+xyz = x'(y+y')+x'yz+xyz =$$
$$= \underbrace{x'+x'yz+xyz}_{\mathsf{DNF}} \overset{[\mathsf{BT3}]}{=} \underbrace{x'+xyz}_{\mathsf{DNF}} \overset{[\mathsf{BT4}]}{=} \underbrace{x'+yz}_{\mathsf{DNF}};$$

$\mathsf{SDNF}(I_1)$:

$$I_1 = x'+yz \overset{[4]}{=} x'(y+y')(z+z')+(x+x')yz \overset{[4]}{=}$$
$$= x'yz+x'yz'+x'y'z+x'y'z'+xyz+x'yz \overset{[4]}{=} \underbrace{x'yz+x'yz'+x'y'z+x'y'z'+xyz}_{\mathsf{SDNF}};$$

u odnosu na promenljive x,y,z,u bi $\mathsf{SDNF}(I_1)$ izgledala ovako:

$$I_1 = x'yz+x'yz'+x'y'z+x'y'z'+xyz \overset{[4]}{=}$$
$$= x'yz(u+u')+x'yz'(u+u')+x'y'z(u+u')+x'y'z'(u+u')+xyz(u+u') \overset{[4]}{=}$$
$$= \underbrace{x'yzu+x'yzu'+x'yz'u+x'yz'u'+x'y'zu+ +x'y'zu'+x'y'z'u+x'y'z'u'+xyzu+xyzu'}_{\mathsf{SDNF}};$$

$\mathsf{KNF}(I_1)$:

$$I_1 \overset{[1]}{=} (\underbrace{x'}_{a_1}\underbrace{y}_{a_2}+\underbrace{y'}_{b}+\underbrace{x}_{c_1}\underbrace{z}_{c_2})(\underbrace{x'}_{d}+\underbrace{y}_{e_1}\underbrace{z}_{e_2}) \overset{[2']}{=}$$
$$= (x'+y'+x)(x'+y'+z)(y+y'+x)(y+y'+z)(x'+y)(x'+z) \overset{[3']}{=}$$
$$= 1\cdot(x'+y'+z)\cdot 1\cdot 1\cdot(x'+y)(x'+z) \overset{[3']}{=} \underbrace{(x'+y'+z)(x'+y)(x'+z)}_{\mathsf{KNF}};$$

još neke KNF izraza I_1:

$$I_1 = ((x'+z)+y')(x'+z)(x'+y) \overset{[\mathsf{BT3}]}{=} (x'+z)(x'+y);$$

$\mathsf{SKNF}(I_1)$:

$$\begin{aligned} I_1 &= (x'+z)(x'+y) \overset{[4']}{=} (x'+yy'+z)(x'+y+zz') = \\ &= (x'+y+z)(x'+y'+z)(x'+y+z)(x'+y+z') = \\ &= (x'+y+z)(x'+y'+z)(x'+y+z'); \end{aligned}$$

u odnosu na promenljive x, y, z, u bi SKNF (I_1) izgledala ovako:

$$\begin{aligned} I_1 &\overset{[4']}{=} (x'+y+z)(x'+y'+z)(x'+y+z') = \\ &= (x'+y+z+uu')(x'+y'+z+uu')(x'+y+z'+uu') = \\ &= (x'+y+z+u)(x'+y+z+u')(x'+y'+z+u)\cdot \\ &\quad \cdot \underbrace{(x'+y'+z+u')(x'+y+z'+u)(x'+y+z'+u')}_{\text{SKNF}}. \end{aligned}$$

☞ Primetimo da je zbir elementarnih konjunkcija u SDNF i elementarnih disjunkcija u SKNF jednak sa 2^n, gde je n broj promenljivih. U našem primeru je to $5+3=2^3=8$. Ovo lako sledi na osnovu dokaza teoreme o predstavljanju Bulovog izraza u obliku SDNF i SKNF.

(b) DNF $(I_2) = x'yu' + x'yzu' + x'zu' + zu' + xz;$

SDNF $(I_2) = xyzu + xyzu' + xy'zu + xy'zu' + x'yzu' + x'yz'u' + x'y'zu';$

KNF $(I_2) = (x'+z)(y+z)(x+u');$

$$\begin{aligned} \text{SKNF}(I_2) = &(x+y+z+u)(x+y+z+u')(x+y+z'+u')\cdot \\ &\cdot (x+y'+z+u')(x+y'+z'+u')(x'+y+z+u)\cdot \\ &\cdot (x'+y+z+u')(x'+y'+z+u)(x'+y'+z+u'). \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} \text{DNF}(I_3) &= \underbrace{xy+xyz}+\underbrace{x'z+x'z'}+xy'+x'y'z = xy(\underbrace{1+z}_{1})+x'(\underbrace{z+z'}_{1})+xy'+x'y'z = \\ &= xy+x'+xy'+x'y'z = xy+xy'+x'+x'y'z = x(\underbrace{y+y'}_{1})+x'(\underbrace{1+y'z}_{1}) = \\ &= x+x' = 1, \end{aligned}$$

odakle automatski sledi

SDNF $(I_3) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z';$

SKNF $(I_3) = 1.$ ☑

Zadatak 5.13 *Bulove funkcije date tablicom predstaviti preko* SDNF *i* SKNF*:*

(a)

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(b)

x	y	z	$f(x,y)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(c)

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

➥ ***Rešenje:***

(a) $\mathsf{SDNF}(f) = x'y'$;

$\mathsf{SKNF}(f) = (x'+y)(x+y')(x'+y')$;

(b) $\mathsf{SDNF}(f) = x'y'z + x'yz' + xy'z' + xyz$;

$\mathsf{SKNF}(f) = (x+y+z)(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z)$;

(c) $\mathsf{SDNF}(f) = 0$;

$\mathsf{SKNF}(f) = (x+y)(x'+y)(x+y')(x'+y')$; ☑

Primer 5.5 *Posmatrajmo Bulovu funkciju (Bulov izraz)*

$$f(x,y,z) = \underbrace{xyz' + xy'z' + x'yz' + x'y'z'}_{\phi_1}.$$

Napravićemo nekoliko njoj njoj ekvivalentnih Bulovih izraza u obliku DNF*:*

$$f(x,y,z) = xz'(y+y') + x'z'(y+y') = \underbrace{xz' + x'z'}_{\phi_2} = z'(x+x') = \underbrace{\ z'\ }_{\phi_3},$$

$$f(x,y,z) = yz'(x+x') + y'z'(x+x') = \underbrace{yz' + y'z'}_{\phi_4}.$$

Označimo sa M_ϕ broj monoma, a sa C_ϕ broj elementarnih konjunkcija u Bulovom izrazu ϕ koji je u DNF *obliku. U našim primerima imamo da je*

$M_{\phi_1} = 12$, $M_{\phi_2} = 4$, $M_{\phi_3} = 1$, $M_{\phi_4} = 4$,

$C_{\phi_1} = 4$, $C_{\phi_2} = 2$, $C_{\phi_3} = 1$, $C_{\phi_4} = 2$,

te je $M_{\phi_3} \le M_{\phi_i}$ $(i \in \{1,2,3,4\})$, $M_{\phi_2} \le M_{\phi_1}$, $M_{\phi_4} \le M_{\phi_1}$, $C_{\phi_3} \le C_{\phi_i}$ $(i \in \{1,2,3,4\})$, $C_{\phi_2} \le C_{\phi_1}$, $C_{\phi_4} \le C_{\phi_1}$, pa tako da imamo da su ϕ_2 i ϕ_4 prostije DNF *od ϕ_1, a ϕ_3 je prostija* DNF *od svih ostalih navedenih (očigledno je da od ϕ_3 i nema druge prostije ekvivalentne* DNF *pa je ϕ_3 minimalna* DNF*). ϕ_2 i ϕ_4 u ovom smislu nisu uporedive.* ✔

Zadatak 5.14 *Naći sve proste implikante i minimalne* DNF *Bulovih funkcija datih svojom tablicom vrednosti ili odgovarajućim Bulovim izrazom:*

(a)

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$f(x,y)$	1	1	1	0

,

(b) $f(x,y) = xy' + x'y$,

(c) $f(x,y,z) = (x'+z)' + (x + (z'(y+z)))'$,

(d) $f(x,y,z,u) = xyzu + xyzu' + xyz'u + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u' +$
$+ x'yzu + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu + x'y'z'u$,

(e) $f(x,y,z) = 1$,

(f)

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1

,

(g) $f(x,y,u,v) = xyuv + xy'uv + x'yuv' + xy'u'v' + x'yu'v' + xyuv' +$
$+ xy'uv' + xy'u'v + x'yuv + x'yu'v + x'y'u'v'$.

➥ ***Rešenje:***

(a) $\mathsf{SDNF}(f(x,y)) = x'y' + x'y + xy'$,
proste implikante su: x', y',
jedinstvena minimalna DNF: $\mathsf{MDNF}(f) = x' + y'$
(primetimo da obe proste implikante ulaze u MDNF).

	x	x'
y		⋆
y'	⋆	⋆

(b) $\mathsf{SDNF}(f(x,y)) = xy' + x'y$,
proste implikante: xy', $x'y$,
jedinstvena minimalna DNF: $\mathsf{MDNF}(f) = xy' + x'y$
(primetimo da je f već bila data u obliku MDNF, tj. da je $\mathsf{MDNF}(f(x,y)) = \mathsf{SDNF}(f(x,y))$).

	x	x'
y		⋆
y'	⋆	

(c) Primenom aksioma i teorema Bulovih algebri nalazimo SDNF funkcije f:

$$f(x,y,z) = (x'+z)' + (x + (z'(y+z)))' = x''z' + x'(z'(y+z))' =$$
$$= xz' + x'(z'' + (y+z)') = xz' + x'(z + y'z') = xz' + x'z + x'y'z' +$$
$$= x(y+y')z' + x'(y+y')z + x'y'z' = xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'.$$

$\mathsf{SDNF}(f(x,y,z)) = xyz' + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'$,
proste implikante: $x'z$, xz', $y'z'$, $x'y'$,
minimalne DNF: $\mathsf{MDNF}_1(f) = x'z + xz' + y'z'$,
$\mathsf{MDNF}_2(f) = x'z + xz' + x'y'$.

	x	x	x'	x'
z			⋆	⋆
z'	⋆	⋆	⋆	
	y	y'	y'	y

(d) $\mathsf{SDNF}(f(x,y,z,u)) = xyzu + xyzu' + xyz'u + xy'zu + xy'z'u + xy'z'u' +$
$+ x'yzu + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu + x'y'z'u$,

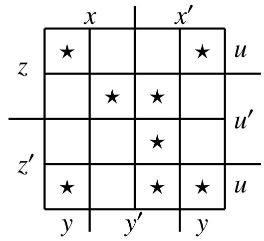
proste implikante: u, $x'y$, yz, $xy'z'$,
jedinstvena minimalna DNF:
$\mathsf{MDNF}(f) = u + x'y + yz + xy'z'$
(uočimo da je ovde MDNF zbir svih prostih implikanti).

	x	x	x'	x'	
z	⋆	⋆	⋆	⋆	u
z	⋆			⋆	u'
z'		⋆		⋆	u'
z'	⋆	⋆	⋆	⋆	u
	y	y'	y'	y	

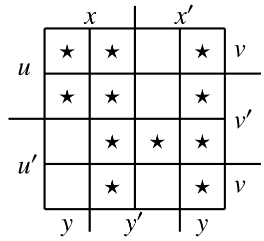
(e) SDNF funkcije f se sastoji od svih $2^3 = 8$ mogućih elementarnih konjunkcija (po x, y i z), pa u odgovarajućoj Karnoovoj karti stoje zvezdice u svim poljima, te celu tabelu zaokružujemo jednim maksimalnim četvorouglom formata 2×4 kojem odgovara prosta implikanta 1. Dakle, imamo samo jednu prostu implikantu 1, pa je tada očigledno i $\mathsf{MDNF}(f) = 1$ (jedinstvena MDNF), što smo i inače odmah mogli zaključiti.

(f) SDNF$(f(x,y,z,u)) =$
$= xyzu + xyz'u + xy'zu' + x'yzu + x'yz'u + x'y'z'u + x'y'zu' + x'y'z'u'$,

proste implikante: yu, $y'z'u'$, $x'y'u'$, $x'y'z$, $x'zu$,
jedinstvena minimalna DNF:
MDNF$(f) = yu + y'z'u' + x'y'z$
(uočimo da neke proste implikante ne učestvuju u MDNF).



(g) Proste implikante: xy', $x'y$, xu, yu, $y'u'v'$, $x'u'v'$,
četiri minimalne DNF:
MDNF$_1(f) = xy' + x'y + xu + y'u'v'$,
MDNF$_2(f) = xy' + x'y + xu + x'u'v'$,
MDNF$_3(f) = xy' + x'y + yu + y'u'v'$,
MDNF$_4(f) = xy' + x'y + yu + x'u'v'$.



☑

Glava 6

Grupe

Definicija 6.1 *Grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ je* ***grupa*** *ako je operacija $*$ asocijativna, postoji levi neutralni element $e \in G$ ($\forall x \in G,\ e * x = x$), i za svaki element $x \in G$ postoji njemu levi inverzni element $x^{-1} \in G$ ($x^{-1} * x = e$). Ako je operacija $*$ još i komutativna, tada $\mathcal{G}$ nazivamo komutativnom (Abelovom) grupom.*

☞ U grupi je levi neutralni element istovremeno i desni, tj. to je onda neutralni element, i on je jedinstven. Takođe su u grupi levi inverzni elementi ujedno i desni, tj. to su inverzni elementi.

Definicija 6.2 *Grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ u kome je operacija $*$ asocijativna se naziva* ***polugrupa*** *ili* ***semigrupa***. *Polugrupa sa neutralnim elementom se naziva* ***monoid***. *Ako je grupa $\mathcal{B}$ podgrupoid grupe $\mathcal{A}$, kažemo da je $\mathcal{B}$ podgrupa grupe $\mathcal{A}$.*

Homomorfizmi i izomorfizmi između grupa su homomorfizmi i izomorfizmi između tih grupoida. Ako je grupa $\mathcal{H}$ podgrupoid grupe $\mathcal{G}$, kažemo da je $\mathcal{H}$ ***podgrupa*** grupe $\mathcal{G}$.

Primer 6.1 *Uređeni par $(\{1, \mathbb{i}, -1, -\mathbb{i}\}, \cdot)$, gde je $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva, je grupa. Njena Kejlijeva tablica je*

$\cdot$	1	$\mathbb{i}$	-1	$-\mathbb{i}$
1	1	$\mathbb{i}$	-1	$-\mathbb{i}$
$\mathbb{i}$	$\mathbb{i}$	-1	$-\mathbb{i}$	1
-1	-1	$-\mathbb{i}$	1	$\mathbb{i}$
$-\mathbb{i}$	$-\mathbb{i}$	1	$\mathbb{i}$	-1

Zatvorenost operacije se vidi iz tablice, asocijativnost se prenosi iz skupa svih kompleksnih brojeva, neutalni element je 1 jer je on neutralni u skupu svih kompleksnih brojeva, inverzni elementi su redom $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $\mathbb{i}^{-1} = -\mathbb{i}$, $(-\mathbb{i})^{-1} = \mathbb{i}$. Dakle, ovo je jedna netrivijalna konačna podgrupa grupe $(\mathbb{C}, \cdot)$. ✔

☞ Ako je e neutralni element grupe $\mathcal{G}$, tada svaka podgrupa $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$ sadrži element e koji je tada neutralni element i u podgrupi $\mathcal{H}$.

☞ Svaka grupa ima bar dve podgrupe: podgrupu koja se sastoji samo od neutralnog elementa, i celu grupu koja je uvek sama sebi podgrupa (ovo su takozvane trivijalne podgrupe).

☞ Da bi $\mathcal{H} = (H, *)$ bila podgrupa grupe $\mathcal{G} = (G, *)$ (gde je $\emptyset \neq H \subseteq G$), dovoljno je da operacija $*$ bude zatvorena u H ($\forall x, y \in H,\ x * y \in H$), da neutralni element grupe $\mathcal{G}$ pripada skupu H, i da za svako $x \in H$ njegov inverzni element u $\mathcal{G}$ pripada skupu H.

Neki važni primeri grupa i podgrupa:

- $(\mathbb{R}, +)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C}, +)$;
- $(\mathbb{Q}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{C}, +)$;
- $(\mathbb{Z}, +)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(C, +)$;
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $(0, \infty)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je podgrupa grupa $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Definicija 6.3 *Za grupu $(G, *)$ sa neutralnim elementom e kažemo da je **ciklična** ukoliko u grupi postoji **generator** $g \in G$, a to je element sa osobinom da se svaki element $x \in G$ može predstaviti u obliku g^m za neko $m \in \mathbb{Z}$, gde je $g^0 \stackrel{\text{def}}{=} e$, i za sve $n \in \mathbb{N}$ je*

$$g^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{g * g * \ldots * g}_{n \text{ puta}}, \qquad g^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (g^n)^{-1}.$$

☞ Ciklična grupa može da ima i više generatornih elemenata. Svaka ciklična grupa je konačna ili prebrojiva. Svake dve ciklične grupe sa n elemenata su izomorfne, kao i svake dve beskonačne ciklične grupe (vidi zadatak **6.23**).

Primer 6.2 $(\mathbb{Z}, +)$ *je komutativna ciklična grupa. Element* 1 *je njen generator, kao i* -1*. To su ujedno i jedini njeni generatori.* ✔

Definicija 6.4 *Neka je $\mathcal{G} = (G, *)$ grupoid, i neka je $\sim$ binarna relacija skupa G. Relacija $\sim$ je **kongruencija** grupoida $\mathcal{G}$ ako je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa G i ako za sve $x, y, z, t \in G$ važi $(x \sim y \ \wedge\ z \sim t) \ \Rightarrow\ (x * z) \sim (y * t)$.*

Kao relacija ekvivalencije, kongruencija grupoida $\mathcal{G} = (G, *)$ definiše faktor skup $G/\sim$ skupa G, i na tom faktor skupu se definiše (vidi [RD05]) nova operacija $\circledast$ skupa $G/\sim$ na sledeći način:

$$\forall C_x, C_y \in G/\sim, \quad C_x \circledast C_y \stackrel{\text{def}}{=} C_{x*y}.$$

gde je C_x klasa elementa $x \in G$ u odnosu na relaciju $\sim$. Dakle, kongruencija grupoida $\mathcal{G}$ definiše novi grupoid $(G/\sim, \circledast)$.

☞ Grupoid $(G/\sim, \circledast)$ nasleđuje većinu osobina grupoida $\mathcal{G}$ (vidi zadatak **6.18**).

Primer 6.3 *U zadatku* **1.6** *smo dokazali da je $\equiv_n$ relacija ekvivalencije skupa $\mathbb{Z}$ za svako $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Relacija* $\equiv_n$ *je kongruencija grupoida* $(\mathbb{Z},+)$ *jer za sve* $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ *važi*

$$\begin{aligned}
&(a \equiv_n b \ \land\ c \equiv_n d) \quad \Rightarrow \quad \exists k_1,k_2 \in \mathbb{Z},\ a-b = k_1 n \ \land\ c-d = k_2 n \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \exists k_1,k_2 \in \mathbb{Z},\ (a-b)+(c-d) = (k_1+k_2)n \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \exists k_1,k_2 \in \mathbb{Z},\ (a+c)-(b+d) = (k_1+k_2)n \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \exists k = k_1+k_2 \in \mathbb{Z},\ (a+c)-(b+d) = kn \quad \Rightarrow \quad a+c \equiv_n b+d.
\end{aligned}$$

Stoga je na faktor skupu $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$ *definisana operacija „*sabiranje po modulu n*" sa* $[k]+_n[m] = [k+m]$*. Npr. za* $n=4$*, Kejlijeva tablica ove operacije je*

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.

(b) *Relacija* $\equiv_n$ *je takođe i kongruencija grupoida* $(\mathbb{Z},\cdot)$ *jer za sve* $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ *važi*

$$\begin{aligned}
&(a \equiv_n b \ \land\ c \equiv_n d) \quad \Rightarrow \quad \exists k_1,k_2 \in \mathbb{Z},\ a-b = k_1 n \ \land\ c-d = k_2 n \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \exists k_1,k_2 \in \mathbb{Z},\ ac-bd = ac-ad+ad-bd = a(c-d)+d(a-b) =\\
&\qquad\qquad = ak_1n + dk_2n = (ak_1+dk_2)n \quad \Rightarrow\\
&\Rightarrow \quad \exists k = ak_1+dk_2 \in \mathbb{Z},\ ac-bd = kn \quad \Rightarrow \quad a+c \equiv_n b+d.
\end{aligned}$$

Na faktor skupu $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0],[1],[2],\ldots,[n-1]\}$ *je time definisana operacija „*množenje po modulu n*" sa* $[k]\cdot_n[m] = [k\cdot m]$*. Npr. za* $n=4$*, Kejlijeva tablica ove operacije je*

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

.

Za svako $n \in \mathbb{N}$ *je* $(\mathbb{Z}_n,+_n)$ *ciklična grupa gde je* $[1]$ *generator, a osim* $[1]$ *može da bude i drugih generatora.*

Nadalje ćemo, ukoliko to ne dovodi do zabune, klasu $[k]$ *skraćeno označavati sa k, a operacije* $+_4$ *i* $\cdot_4$ *redom sa* $+$ *i* $\cdot$. ✔

Zadatak 6.1 *Ispitati koje su strukture grupoidi sa neutralnim elementom:*

(a) $(\mathbb{N},+)$,

(b) $(A,+)$*, gde je* $A = \mathbb{N}\cup\{0\}$,

(c) $(A,+)$*, gde je* $A = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(d) $(A,\cdot)$ *gde je* $A = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(e) $(A,+)$ *gde je* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\}$,

(f) $(A,\cdot)$ *gde je* $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\}$,

(g) $(A,\circ)$ *gde je* $A = \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$,

(h) $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ *gde je* $\mathbb{R}[x]$ *skup svih polinoma sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Zbir dva prirodna broja je prirodan broj te $(\mathbb{N},+)$ jeste grupoid, ali u $(\mathbb{N},+)$ ne postoji neutralni element jer

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e+n=n+e=n \quad \Leftrightarrow \quad e=0,$$

ali $0 \notin \mathbb{N}$.

(b) Za $m,n \in A$ je očigledno $m+n \in A$ te je $(A,+)$ grupoid, pri čemu u njemu postoji i neutralni element $0 \in A$.

(c) Za $m,n \in A$ važi $m=7k_1$ i $n=7k_2$ za neke $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$, te je $m+n=7(k_1+k_2)$ gde je $k_1+k_2 \in \mathbb{Z}$, te je $m+n \in A$, odnosno $(A,+)$ je grupoid. U ovom grupoidu postoji neutralni element $0=7\cdot 0$ gde je $0 \in \mathbb{Z}$ jer je $0+n=n+0=n$ za sve $n \in A$.

(d) Za $m,n \in A$ važi $m=7k_1$ i $n=7k_2$ za neke $k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$, te je $mn=7(7k_1k_2)$ gde je $7k_1k_2 \in \mathbb{Z}$, te je $mn \in A$, odnosno $(A,\cdot)$ je grupoid. U ovom grupoidu ne postoji neutralni element jer bi to mogao da bude samo broj 1, ali $1 \notin A$ jer ne postoji $k \in \mathbb{Z}$ takvo da je $1=7k$.

(e) Kako je $A=\{a+\mathbb{i}a \mid a \in \mathbb{R}\}$, za $z_1=a+\mathbb{i}a \in A$ i $z_2=b+\mathbb{i}b \in A$ imamo da je $z_1+z_2=(a+b)+\mathbb{i}(a+b)$, gde je $a+b \in \mathbb{R}$, te je $z_1+z_2 \in A$, odnosno $(A,+)$ je grupoid. U ovom grupoidu postoji i neutralni element $0=0+0\cdot\mathbb{i} \in A$.

(f) Struktura $(A,\cdot)$ nije grupoid jer npr. za $z_1=1+\mathbb{i} \in A$ i $z_2=2+2\mathbb{i} \in A$ imamo da je $z_1z_2=(1+\mathbb{i})(2+2\mathbb{i})=4\mathbb{i} \notin A$, jer je $\mathcal{I}m(4\mathbb{i})=4 \neq \mathcal{R}e(4\mathbb{i})=0$.

(g) U zadatku **4.4** smo videli da $(A,\circ)$ jeste grupoid sa neutralnim elementom.

(h) Množenjem dva polinoma sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva se ponovo dobija polinom sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva, te je $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ grupoid. U njemu postoji neutralni element, a to je polinom $p(x)=1$. ☑

Zadatak 6.2 *Ispitati koje su strukture asocijativni grupoidi sa neutralnim elementom:*

(a) $(\mathbb{Z},\cdot)$,

(b) $(\mathbb{Z},-)$,

(c) $(A,\cdot)$, *gde je* $A=\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

(d) $(A,+)$, *gde je* $A=\{a+a\mathbb{i} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

(e) $(A,\circ)$ *gde je* $A=\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$,

(f) $(A,\cap)$ *gde je* $A=\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

➥ ***Rešenje:***

(a) Proizvod dva cela broja je ceo broj te $(\mathbb{Z},\cdot)$ jeste grupoid, operacija množenja celih brojeva je asocijativna operacija, i u $(\mathbb{Z},\cdot)$ postoji neutralni element $1 \in \mathbb{Z}$.

(b) Razlika dva cela broja je ceo broj te $(\mathbb{Z},-)$ jeste grupoid. Operacija oduzimanja celih brojeva nije asocijativna operacija jer je npr. $(8-5)-2=1 \neq 5=8-(5-2)$. U grupoidu $(\mathbb{Z},-)$ ne postoji ni neutralni element jer ni za koje $e \in \mathbb{Z}$ ne važi $\forall x \in \mathbb{Z},\ x-e=e-x=x$. Naime, $\forall x \in \mathbb{Z},\ x-e=x$ važi za $0 \in \mathbb{Z}$ (0 jeste desni neutralni element), ali pri tome $0-x=x$ važi samo za $x=0$ a ne i za sve elemente $x \in \mathbb{Z}$ (0 nije ujedno i desni neutralni element).

(c) Analogno kao u zadatku **6.1** za strukturu $(\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$, dobijamo da $(A, \cdot)$ jeste grupoid u kojem ne postoji neutralni element (pri tome jeste asocijativan grupoid jer je množenja bilo kojih brojeva asocijativna operacija).

(d) U zadatku **6.1** smo videli da $(A, +)$ jeste grupoid sa neutralnim elementom, a jeste i asocijativan jer je sabiranje bilo kojih brojeva, pa i brojeva iz skupa A asocijativna operacija.

(e) U zadatku **4.4** smo videli da $(A, \circ)$ jeste grupoid sa neutralnim elementom, i to asocijativan jer je kompozicija funkcija uvek asocijativna operacija.

(f) Struktura $(A, \cap)$ jeste grupoid jer za $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tj. $X \subseteq \mathbb{N}$ i $Y \subseteq \mathbb{N}$ važi $X \cap Y \subseteq \mathbb{N}$ odnosno $X \cap Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Da je skupovni presek asocijativna operacija je poznata osobina. U grupoidu $(A, \cap)$ postoji neutralni element $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ jer za svako $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tj. $X \subseteq \mathbb{N}$ važi $X \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap X = X$. ☑

Zadatak 6.3 *Ispitati koje su strukture komutativne grupe:*

(a) $(\mathbb{N}, +)$,

(b) $(\mathbb{Z}, \cdot)$,

(c) $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ *gde je* $\mathbb{R}[x]$ *skup svih polinoma sa koeficijentima iz skupa realnih brojeva,*

(d) $(A, +)$, *gde je* $A = \{a + a\mathrm{i} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

(e) $(A, \circ)$ *gde je* $A = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$,

(f) $(A, \circ)$ *gde je* $A = \left\{ f \mid f : \mathbb{R} \underset{\text{"na"}}{\overset{\text{"1-1"}}{\longrightarrow}} \mathbb{R} \right\}$,

(g) $(A, \cap)$ *gde je* $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

➥ ***Rešenje:***

(a) U zadatku **6.1** smo videli da je $(\mathbb{N}, +)$ grupoid (pri tome je sabiranje brojeva asocijativna i komutativna operacija), ali u njemu nema neutralnog elementa te nije grupa.

(b) U zadatku **6.2** smo videli da je $(\mathbb{Z}, \cdot)$ asocijativan grupoid sa neutralnim elementom 1, množenje celih brojeva je takođe i komutativna operacija, ali $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ipak nije grupa jer nema svaki element $x \in \mathbb{Z}$ sebi inverzni element $x^{-1} \in \mathbb{Z}$. Naime, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ako i samo ako je $x^{-1} = \frac{1}{x}$, a broj $x^{-1} = \frac{1}{x}$ postoji i $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ samo za $x = 1$ i $x = -1$ ($1^{-1} = 1$ i $(-1)^{-1} = -1$), a ostali elementi nemaju sebi inverzni element (npr. $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

(c) U zadatku **6.1** smo videli da je da je $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ grupoid sa neutralnim elementom $e(x) = 1 \in \mathbb{R}[x]$, množenje polinoma sa celobrojnim koeficijentima je asocijativna i komutativna operacija (vidi poglavlje 8 o polinomima), ali $(\mathbb{R}[x], \cdot)$ nije grupa jer nema svaki element (polinom) $p \in \mathbb{R}[x]$ sebi inverzni element $p^{-1} \in \mathbb{R}[x]$. Na primer, za $p(x) = x^2 + 1$ je

$$p \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot p = e \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ p(x) \cdot p^{-1}(x) = p^{-1}(x) \cdot p(x) = e(x) \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 \cdot p^{-1}(x) = p^{-1}(x) \cdot x^2+1 = 1 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad p^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1},$

ali funkcija $p^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1}$ nije polinom, tj. $p^{-1} \notin \mathbb{R}[x]$.

(d) U zadatku **6.2** smo videli da struktura $(A,+)$ jeste asocijativan grupoid sa neutralnim elementom $0 \in A$, a jeste i komutativan jer je sabiranje bilo kojih brojeva, pa i brojeva iz skupa A komutativna operacija. Pri tome svaki element $x = a + a\mathrm{i} \in A$, gde je $a \in \mathbb{R}$ postoji element $-x = -a - a\mathrm{i} \in A$ (jer je i $-a \in \mathbb{R}$) za koji je $x + (-x) = (-x) + x = 0$, te struktura $(A,+)$ jeste komutativna grupa.

(e) U zadatku **4.4** smo videli da $(A,\circ)$ jeste asocijativan grupoid sa neutralnim elementom $i_A(x)$, $x \in \mathbb{R}$, i pri tome nema svaki element $f \in A$ sebi inverzni element (inverznu funkciju), te $(A,\circ)$ nije grupa. Ovaj grupoid nije ni komutativan (vidi zadatak **2.4**).

(f) U zadatku **4.4** smo videli da $(A,\circ)$ jeste grupa. Nije komutativna jer npr. za $f,g \in A$ definisane sa $f(x) = 2x+3$, $x \in \mathbb{R}$ i $g(x) = 4x+5$, $x \in \mathbb{R}$ važi $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(4x+5)+3 = 8x+13$ i $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4(2x+3)+5 = 8x+17$, odnosno $f \circ g \neq g \circ f$.

(g) U zadatku **6.2** smo videli da struktura $(A,\cap)$ jeste asocijativan grupoid sa neutralnim elementom $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a jeste i komutativan jer je komutativnost skupovnog preseka poznata osobina. Struktura $(A,\cap)$ ipak nije grupa jer, osim samog neutralnog elementa $\mathbb{N}$, ni jedan drugi element $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$ nema sebi inverzni element $X' \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Na primer, za $X = \{1,2,3\}$ ne postoji skup $X' \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $X \cap X' = \mathbb{N}$. ☑

Zadatak 6.4 *Ispitati koje od struktura su podgrupe grupe* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$*:*

(a) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$,

(b) $((0,\infty), \cdot)$,

(c) $((-\infty,0), \cdot)$,

(d) $(\mathbb{N}, \cdot)$,

(e) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$,

(f) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$,

(g) $((0,1], \cdot)$,

(h) $(\{-1,1\}, \cdot)$.

➥ ***Rešenje:*** Dovoljno je ispitati da li je skup nosač potskup skupa $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da je operacija restrikcija operacije množenja na skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, da neutralni element 1 iz grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ pripada posmatranom skupu, kao i da inverzni element $x^{-1} = \frac{1}{x}$ elementa x iz posmatranog skupa opet pripada posmatranom skupu - vidi napomenu na strani 84.

(a) Struktura $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ nije podgrupa grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ jer u njoj figuriše operacija sabiranja realnih brojeva, a u grupi $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ množenje.

(b) Važi $(0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$, proizvod dva pozitivna realna broja je pozitivan realan broj, $1 \in (0,\infty)$, i za $x \in (0,\infty)$ je $\frac{1}{x} \in (0,\infty)$. Dakle, $((0,\infty),\cdot)$ jeste podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

(c) Struktura $((-\infty,0),\cdot)$ nije podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ jer proizvod dva negativna realna broja nije negativan realan broj.

(d) Važi $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, proizvod dva prirodna broja je prirodan broj, $1 \in \mathbb{N}$, ali inverzni elementi elemenata $x \in \mathbb{N}$ ne pripadaju skupu $\mathbb{N}$ (npr. $2^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$). Dakle, $(\mathbb{N},\cdot)$ nije podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

(e) Iz istih razloga kao za $(\mathbb{N},\cdot)$, struktura $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ nije podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

(f) Važi $\mathbb{Q}\setminus\{0\} \subseteq \mathbb{R}$, proizvod dva racionalna broja (razlomka) različita od nule je racionalan broj (razlomak) različit od nule, $1 \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, i za $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ je $\frac{1}{x} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Dakle, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ jeste podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

(g) Važi $(0,1] \subseteq \mathbb{R}$, za proizvod brojeva $x,y \in (0,1]$ (dakle $0 < x \leq 1$ i $0 < y \leq 1$) važi $0 < xy \leq 1$ tj. $xy \in (0,1]$, $1 \in (0,1]$, ali ni jedan element skupa $(0,1]$, osim neutralnog 1, nema sebi inverzni element u $(0,1]$ (npr. za $\frac{1}{2} \in (0,1]$ imamo da $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \notin (0,1]$), tako da $((0,1],\cdot)$ nije podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.

(h) Važi $\{-1,1\} \subseteq \mathbb{R}$, operacija množenja brojeva je zatvorena na skupu $\{-1,1\}$, jeste $1 \in \{-1,1\}$, i $1^{-1} = 1 \in \{-1,1\}$, $(-1)^{-1} = -1 \in \{-1,1\}$. Dakle, $(\{-1,1\},\cdot)$ jeste podgrupa grupe $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$. ☑

Zadatak 6.5 *Dat je grupoid $(G,\cdot)$ gde je $G = \{e,a,b,c\}$ i operacija $\cdot$ je definisana Kejlijevom tablicom.*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Ispitati asocijativnost i komutativnost operacije $\cdot$, egzistenciju neutralnog elementa u G, i egzistenciju inverznih elemenata ako neutralni element postoji.

➥ ***Rešenje:*** Zatvorenost operacije je očigledna. Kao i u zadatku **4.2**, iz tablice vidimo da je e neutralni element, inverzni elementi su redom $e^{-1} = e$, $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$ i $c^{-1} = c$, i operacija $*$ je komutativna. Pri ispitivanju asocijativnog zakona $x(yz) = (xy)z$, kao u zadatku **4.2** je dovoljno jednakost proveriti za $x,y,z \in \{a,b,c\}$, što čini $3^3 = 27$ provera. Dokaz ostavljamo za vežbu, i utvrdićete da $\cdot$ jeste asocijativna operacija. Prema tome, $(G,\cdot)$ je komutativna grupa. ☑

☞ Ovo je takozvana ***Klajnova grupa***. Nju karakteriše to da je svaki element sam sebi inverzan. Svaka grupa sa 4 elementa koja ima tu osobinu je izomorfna sa $(G,\cdot)$.

Zadatak 6.6 *Neka je $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. Ispitati da li je $\mathcal{G} = (G, *)$ komutativna grupa, gde je operacija $*$ definisana sa:*

$$\forall a, b \in G, \quad a * b = a + b + ab.$$

➥ ***Rešenje:***

(a) U ovom primeru zatvorenost operacije $*$ u skupu G nije očigledna. Neka je $a, b \in G$. Pošto je zbir i proizvod racionalnih brojeva racionalan broj, mora biti $a * b \in \mathbb{Q}$, pa treba još da dokažemo da je $a * b \neq -1$. Ako pretpostavimo da je $a * b = -1$, dobijamo $-1 = a + b + ab = a(1 + b) + b$, pa je $a = \frac{-1-b}{1+b} = -1 \notin G$ čime dobijamo kontradikciju, odnosno mora da važi $a * b \neq -1$, tj. $a * b \in G$.

(b) Asocijativni zakon ćemo dokazati koristeći poznate osobine sabiranja i množenja preko kojih je operacija $*$ definisana. Neka je $a, b, c \in G$. Izrazićemo posebno $a * (b * c)$ i $(a * b) * c$ preko $+$ i $\cdot$, a zatim uporediti ove izraze:

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b + ab) * c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc. \end{aligned}$$

Desne strane navedenih jednakosti su jednake, pa moraju biti jednake i leve.

(c) Operacija $*$ je komutativna jer je $a * b = a + b + ab = b + a + ba = b * a$ za sve $a, b \in G$.

(d) Neutralni element - prvi način: na osnovu definicije operacije $*$ možemo pogoditi da je neutralni element broj $0 \in G$, i to je tačno jer je $0 * x = 0 + x + 0x = x$ i $x * 0 = x + 0 + x0 = x$ za svako $x \in G$.

Neutralni element - drugi način: da bi neki element $e \in G$ bio neutralni element, mora za svako $x \in G$ da važi $e * x = e + x + ex = x$ i $x * e = x$; utvrdili smo da je $+$ komutativna operacija pa je dovoljno da bude $e * x = x$, odnosno mora da važi $e(1 + x) = 0$ za sve $x \in G$, što je tačno (samo) za $e = 0 \in G$ (praktično, rešavali smo po nepoznatoj $e \in G$ sistem jednačina $\forall x \in G$, $e * x = x$ - jedna nepoznata e i onoliko jednačina koliko ima elemenata $x \in G$ tj. koliko je elemenata skupa G).

(e) Ispitujemo egzistenciju inverznog elementa za proizvoljno $a \in G$. Da bi postojao inverzni element $a^{-1} \in G$ elementa a, za njega mora da važi $a^{-1} * a = e$ (a levi inverzni, ako postoji, mora biti ujedno i desni inverzni element). Dakle, mora da važi $a^{-1} * a = a^{-1} + a + a^{-1}a = 0$, odnosno $a^{-1}(1 + a) = -a$, odnosno mora da važi $a^{-1} = -\frac{a}{a+1} \in G$. Pošto je $a \in \mathbb{Q}$ i $a \neq -1$, i zbir i količnik racionalnih brojeva su racionalni brojevi, i pošto je $-\frac{a}{a+1} \neq -1$ (ako pretpostavimo suprotno $-\frac{a}{a+1} = -1$, dobijamo $-a = -a - 1$ odnosno $0 = -1$ što je nemoguće), sledi da za svako $a \in G$ postoji njemu inverzni element $a^{-1} = -\frac{a}{a+1} \in G$.

Prema tome, $\mathcal{G}$ je komutativna (Abelova) grupa. ☑

Zadatak 6.7 *Neka je $A = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq 0\}$, i neka je operacija $*$ definisana sa:*

$$\forall (a, b), (c, d) \in A, \quad (a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$$

Ispitati da li je $(A, *)$ grupa, i da li je komutativna.

➥ ***Rešenje:***

(a) Zatvorenost operacije $*$ na skupu A sledi jer za $(a,b),(c,d) \in A$ važi $ac \in \mathbb{Q}$ i $ad+b \in \mathbb{Q}$ (zbir i proizvod racionalnih brojeva je racionalan broj) i $ac \neq 0$ (jer je $a \neq 0$ i $c \neq 0$), pa je $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+b) \in A$.

(b) Proveravamo asocijativni zakon za proizvoljne $(a,b),(c,d),(e,f) \in A$:

$$(a,b)*((c,d)*(e,f)) = (a,b)*(ce, cf+d) = (ace, a(cf+d)+b) = \\ = (ace, acf+ad+b),$$

$$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (ac, ad+b)*(e,f) = (ace, acf+ad+b).$$

Desne strane navedenih jednakosti su jednake, pa moraju biti jednake i leve.

(c) Operacija $*$ nije komutativna jer je npr.

$(2,3)*(3,4) = (6,11) \neq (6,13) = (3,4)*(2,3)$.

(d) <u>Neutralni element - prvi način:</u> na osnovu definicije operacije $*$ možemo pogoditi da je neutralni element $(1,0) \in G$, što je tačno jer je

$(1,0)*(x,y) = (1\cdot x, 1\cdot y+0) = (x,y)$ i

$(x,y)*(1,0) = (x\cdot 1, x\cdot 0+y1) = (x,y)$

za svako $(x,y) \in A$.

<u>Levi neutralni element - drugi način:</u> da bi $(e_1,e_2) \in A$ bio levi neutralni element, mora za svako $(x,y) \in A$ da važi

$(e_1,e_2)*(x,y) = (e_1x, e_1y+e_2) = (x,y)$,

odnosno mora da važi $e_1x = x$ i $e_1y + e_1 = y$ za sve $(x,y) \in A$, što je tačno (samo) za $e_1 = 1 \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ i $e_2 = 0 \in \mathbb{Q}$. Dakle, $(1,0) \in A$ je (jedinstveni) levi neutralni element polugrupe $(A,*)$.

(e) Ispitajmo egzistenciju levog inverznog elementa za $(a,b) \in A$. Levi inverzni element $(c,d) = (a,b)^{-1} \in A$ elementa (a,b) postoji ukoliko za njega važi

$(c,d)*(a,b) = (e_1,e_2) = (1,0)$.

Dakle, mora da važi $ca = 1 \ \wedge\ cb+d = 0 \ \wedge\ c \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \ \wedge\ d \in \mathbb{Q}$, što je tačno za $c = \frac{1}{a}$ i $d = -\frac{b}{a}$. Dakle, $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \in A$ je levi inverzni element elementa (a,b).

Prema tome, $(G,*)$ je (nekomutativna) grupa. ☑

Zadatak 6.8 *Neka je $\mathcal{G} = (G,\cdot)$ monoid (polugrupa sa neutralnim elementom) i neka je $S \subseteq G$ skup svih njegovih invertibilnih elemenata (invertibilan element monoida je onaj element koji ima inverzni). Dokazati da je $\mathcal{S} = (S,\cdot)$ grupa (gde je operacija $\cdot$ skupa S restrikcija operacije $\cdot$ iz monoida G), i to maksimalna grupa koja je podgrupoid monoida $\mathcal{G}$.*

➥ ***Rešenje:*** Obeležimo sa e neutralni element monoida $\mathcal{G}$ ($\forall x \in G,\ xe = ex = x$).

(a) Kako je $ee = e$ (e je sam sebi inverzni element), sledi da je e invertibilan element, tj. $e \in S$. Dakle, $S \neq \emptyset$ jer je $e \in S$.

(b) Dokažimo zatvorenost operacije $\cdot$ u skupu S. Neka je $a, b \in S$. To znači da postoje njima inverzni elementi a^{-1} i b^{-1} *u skupu* G, pa *u skupu (monoidu)* G važi $\left(b^{-1}a^{-1}\right)(ab) = b^{-1}\left(\left(a^{-1}a\right)b\right) = b^{-1}(eb) = b^{-1}b = e$, odakle sledi da je $b^{-1}a^{-1}$ levi inverzni element elementa ab u monoidu G; na isti način dokazujemo da je to i desni inverzni, pa je ab invertibilan element u G, odnosno $ab \in S$. Dakle, $(S, \cdot)$ je grupoid.

(c) Zakon asocijativnosti važi u skupu (monoidu) G, pa mora da važi i u svakom podskupu skupa G (vidi komentar na strani 49). Zbog $S \subseteq G$ je $(S, \cdot)$ polugrupa.

(d) Utvrdili smo pod (a) da je $e \in S$, pa sledi da e mora biti neutralni element i u $(S, \cdot)$.[1]

(e) Dokažimo da za svako $a \in S$ postoji njemu inverzni element $a^{-1} \in S$. Ako je $a \in S$, to znači da je a invertibilan element u G tj. postoji $a^{-1} \in G$ takvo da je $aa^{-1} = e$ u G. Dokažimo da je a^{-1} inverzni element elementa a u S, tj. dokažimo da je $a^{-1} \in S$. Treba da dokažemo da je a^{-1} invertibilan element u G, a to jeste tačno jer postoji njemu inverzni element a u G ($a^{-1}a = e$). Dakle, $a^{-1} \in G$ i a^{-1} je inverzni element elementa $a \in G$.

Dakle, $\mathcal{S}$ jeste grupa. Jeste i maksimalna grupa koja je podgrupoid od $\mathcal{G}$ jer ako skup G proširimo još nekim neinvertibilnim elementom $x \in G$, tada $\mathcal{S}$ ne bi bila grupa jer element x ne bi imao sebi inverzni element. ☑

☞ Dakle, za svaki dati monoid, izdvajanjem njegovih invertibilnih elemenata dobijamo njegov maksimalni (u skupovnom smislu) podgrupoid koji je grupa.

Primer 6.4 *Uređeni par* $(\mathbb{R}, \cdot)$ *je monoid (proizvod dva realna broja je realan broj, množenje brojeva je asocijativno, neutralni element je* 1*), ali nije grupa jer* 0 *nema inverzni element u odnosu na množenje. Svi realni brojevi x osim nule imaju inverzni element* $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$*, tako da je* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *maksimalna grupa koja je podgrupoid monoida* $(\mathbb{R}, \cdot)$. ✔

Primer 6.5 *Uređeni par* $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *je monoid (proizvod dva cela broja je ceo broj, množenje brojeva je asocijativno, neutralni element je* 1*), ali nije grupa jer npr.* 0 *nema inverzni element u odnosu na množenje. Celi brojevi x koji imaju inverzni element* $\frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ *su samo* 1 *i* -1*, tako da je* $(\{-1, 1\}, \cdot)$ *maksimalna grupa koja je podgrupoid monoida* $(\mathbb{Z}, \cdot)$. ✔

Primer 6.6 *Neka je* $A \neq \emptyset$*,* $\mathbb{F} = \{f \mid f : A \to A\}$ *i* $\mathbb{B} = \left\{f \mid f : A \underset{\text{"na"}}{\overset{\text{"1-1"}}{\longrightarrow}} A\right\}$*. U zadatku* **4.4** *smo utvrdili da je* $\mathcal{F} = (\mathbb{F}, \circ)$ *monoid, i iz rešenja zadatka sledi da je* $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, \circ)$ *maksimalna grupa koja je podgrupoid monoida* $\mathcal{F}$*. Ako je A skup koji sadrži samo jedan element, npr.* $A = \{1\}$*, tada je* $\mathbb{F} = \{i_A\}$ *i* $(\mathbb{F}, \circ)$ *je tada grupa. Kada skup A sadrži bar dva različita elementa, tada nema svaka funkcija sebi inverzni element.* ✔

[1] U opštem slučaju grupoid može imati podgrupoid u kome postoji neutralni element koji je različit od neutralnog elementa samog grupoida. Kod grupe to nije moguće, tj. neutralni element podgrupoida mora biti jednak neutralnom elementu grupe.

Zadatak 6.9 *Neka je $A = [0,1]$, i neka je $x*y = x+y-xy$. Dokazati da je $(A,*)$ monoid, i odrediti jednu maksimalnu grupu koja je podgrupoid od $(A,*)$.*

➥ ***Rešenje:*** U zadatku **4.1** smo dokazali da je $(A,*)$ monoid sa neutralnim elementom 0, i da je 0 jedini element koji ima sebi inverzni element $0' = 0$. Stoga, na osnovu zadatka **6.8** sledi da je $(\{0\},*)$ maksimalna grupa koja je podgrupoid grupoida $(A,*)$. ☑

☞ Za dati monoid mogu da postoje i druge maksimalne grupe koje su podgrupoidi tog monoida. Na primer, u prethodnom zadatku je i $(\{1\},*)$ očigledno grupa (sa Kejlijevom tablicom $\begin{array}{c|c} * & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$) koja je podgrupoid od $(A,*)$. Dokažimo da je i ova grupa maksimalna, tj. da ne postoji skup $X \supsetneq \{1\}$ takav da je $(X,*)$ grupa, i da je $(X,*)$ podgrupoid od $(A,*)$. Pretpostavimo suprotno, da takav skup X postoji. Važi $1 \in X$ i postoji $x \in [0,1)$ takav da je $x \in X$. Kako je $(X,*)$ grupa, a $(\{1\},*)$ njena podgrupa, sledi da je 1 neutralni element grupe $(X,*)$ jer podgrupa $(\{1\},*)$ mora imati isti neutralni element kao grupa $(X,*)$. Međutim, za $x \neq 1$ tada važi $1*x = 1+x-1\cdot x = 1 \neq x$, čime smo dobili kontradikciju. Dakle, $(\{1\},*)$ je zaista maksimalna grupa koja je podgrupoid od $(A,*)$.

Zadatak 6.10 *Neka je na skupu $\mathbb{Q}^2$ definisana operacija $*$ na sledeći način:*

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Q}^2, \quad (a,b)*(c,d) = (ac, bc+c+d).$$

Ispitati da li je uređeni par $\left(\mathbb{Q}^2,*\right)$ grupa. Ako nije, naći maksimalni podskup A skupa $\mathbb{Q}^2$ takav da je $(A,*)$ grupa.

➥ ***Rešenje:***

(a) Operacija $*$ je zatvorena na skupu $\mathbb{Q}^2$ jer je zbir i proizvod racionalnih brojeva uvek racionalan broj.

(b) Ispitajmo asocijativni zakon. Za proizvoljne $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Q}^2$ važi

$$(a,b)*((c,d)*(e,f)) = (a,b)*(ce, de+e+f) = (ace, bce+ce+(de+e+f)),$$

$$((a,b)*(c,d))*(e,f) = (ac, bc+c+d)*(e,f) = (ace,(bce+ce+de)+e+f),$$

te iz jednakosti desnih strana gornjih izraza sledi

$$(a,b)*((c,d)*(e,f)) = ((a,b)*(c,d))*(e,f).$$

Dakle, $\left(\mathbb{Q}^2,*\right)$ je polugrupa.

(c) Da bi $(e_1,e_2) \in \mathbb{Q}^2$ bio levi neutralni element operacije $*$, mora za sve $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ da važi $(x,y) = (e_1,e_2)*(x,y) = (e_1x, e_2x+x+y)$, tj. moraju da važe jednakosti $x = e_1x \ \wedge \ y = e_2x+x+y$ za sve $x,y \in \mathbb{Q}$. Jedinstveno rešenje ovog sistema jednačina (za svako x i y imamo po dve jednačine) je $e_1 = 1 \ \wedge \ e_2 = -1$, pa je $(1,-1) \in \mathbb{Q}^2$ jedinstveni levi neutralni element polugrupe $\left(\mathbb{Q}^2\right)$. Neposrednom proverom dobijamo da je to i desni neutralni element:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \quad (x,y)*(1,-1) = (x, y+1-1) = (x,y),$$

pa je $\left(\mathbb{Q}^2,*\right)$ monoid (polugrupa sa neutralnim elementom).

(d) Da bi $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ bio levi inverzni element elementa $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, mora da važi

$$(x,y) * (a,b) = (xa, ya + a + b) = (1,-1) \quad \Leftrightarrow \quad (xa = 1 \ \land \ ya + a + b = -1).$$

(d1) Za $a \neq 0$ jedinstveno rešenje ovog sistema je $x = \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \ \land \ y = -\frac{1+a+b}{a} \in \mathbb{Q}$, pa je u ovom slučaju $\left(\frac{1}{a}, -\frac{1+a+b}{a}\right) \in \mathbb{Q}^2$ jedinstveni levi inverzni element elementa $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$; to je i desni inverzni element jer je

$$(a,b) * \left(\tfrac{1}{a}, -\tfrac{1+a+b}{a}\right) = \left(a\tfrac{1}{a}, b\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{a} - \tfrac{1+a+b}{a}\right) = (1,-1).$$

(d2) Za $a = 0$ sistem nema rešenja jer je prva jednačina $0 = 1$ nerešiva, pa u tom slučaju element (a,b) nema sebi inverzni element u $\mathbb{Q}^2$.

Dakle, $\left(\mathbb{Q}^2, *\right)$ jeste monoid, ali nije grupa. Skup svih invertibilnih elemenata skupa $\mathbb{Q}^2$ je $A = \left\{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \;\middle|\; a \neq 0\right\}$, pa na osnovu prethodnog zadatka imamo da je $(A,*)$ maksimalna grupa koja je podgrupoid monoida $\left(\mathbb{Q}^2, *\right)$. ☑

Zadatak 6.11 *Neka je $\varphi : G_1 \to G_2$ izomorfizam iz grupoida $\mathcal{G}_1 = (G_1, *_1)$ u grupoid $\mathcal{G}_2 = (G_2, *_2)$. Dokazati (vidi komentar na strani 54 i dodatak B):*

(a) *ako je $\mathcal{G}_1$ polugrupa, tada je i $\mathcal{G}_2$ polugrupa (tj. izomorfizam „prenosi" asocijativnost operacije $*_1$ na operaciju $*_2$);*

(b) *ako je $*_1$ komutativna operacija, tada je i $*_2$ komutativna operacija;*

(c) *ako postoji neutralni element $e_1 \in G_1$ u $\mathcal{G}_1$, tada je $e_2 = \varphi(e_1) \in G_2$ neutralni element u $\mathcal{G}_2$; ako su pri tome $x,y \in G_1$ uzajamno inverzni elementi u $\mathcal{G}_1$, tada su $\varphi(x) \in G_2$ i $\varphi(y) \in G_2$ uzajamno inverzni elementi u $\mathcal{G}_2$;*

(d) *ako je $\mathcal{G}_1$ grupa, tada je i $\mathcal{G}_2$ grupa;*

(e) *ako u $\mathcal{G}_1$ važi zakon kancelacije, tada i u $\mathcal{G}_2$ važi zakon kancelacije;*

(f) *ako je $x \in G_1$ idempotentan element u $\mathcal{G}_1$, tada je $\varphi(x) \in G_2$ idempotentan element u $\mathcal{G}_2$.*

➥ ***Rešenje:*** Iz rešenja zadatka **??** sledi da je i funkcija $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ izomorfizam iz grupoida $\mathcal{G}_2$ u grupoid $\mathcal{G}_1$.

(a) Za sve $x,y,z \in G_2$ važi

$$\begin{aligned} x *_2 (y *_2 z) &= \varphi\left(\varphi^{-1}(x *_2 (y *_2 z))\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(x) *_1 \varphi^{-1}(y *_2 z)\right) = \\ &= \varphi\left(\varphi^{-1}(x) *_1 \left(\varphi^{-1}(y) *_1 \varphi^{-1}(z)\right)\right) = \varphi\left(\left(\varphi^{-1}(x) *_1 \varphi^{-1}(y)\right) *_1 \varphi^{-1}(z)\right) = \\ &= \varphi\left(\varphi^{-1}(x *_2 y) *_1 \varphi^{-1}(z)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}((x *_2 y) *_2 z)\right) = (x *_2 y) *_2 z. \end{aligned}$$

(b) Slično kao pod (a).

(c) Za $e_2 = \varphi(e_1)$ je $\varphi^{-1}(e_2) = e_1$, te za proizvoljno $x \in G_2$ važi

$$\begin{aligned} e_2 *_2 x &= \varphi\left(\varphi^{-1}(e_2 *_2 x)\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(e_2) *_1 \varphi^{-1}(x)\right) = \varphi\left(e_1 *_1 \varphi^{-1}(x)\right) = \\ &= \varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right) = x, \end{aligned}$$

i na isti način se dokazuje da je $x *_2 e_2 = x$.

Za uzajamno inverzne elemente $x,y \in G_1$ važi $x *_1 y = y *_1 x = e_1$, te primenom funkcije φ dobijamo $\varphi(x *_1 y) = \varphi(y *_1 x) = \varphi(e_1)$, a kako je φ izomorfizam, dalje je $\varphi(x) *_2 \varphi(y) = \varphi(y) *_2 \varphi(x) = e_2$, odakle sledi da su $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$ uzajamno inverzni elementi u $\mathcal{G}_2$.

(d) Dokazano pod (a), (b) i (c).

(e) Neka je $x, y, z \in G_2$ i neka je $x *_2 y = x *_2 z$. Primenom izomorfizma φ^{-1} dobijamo $\varphi^{-1}(x *_2 y) = \varphi^{-1}(x *_2 z)$, odnosno $\varphi^{-1}(x) *_1 \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(x) *_1 \varphi^{-1}(z)$. Iz kancelativnosti operacije $*_1$ sledi $\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(z)$, i konačno primenom funkcije φ dobijamo $y = z$.

(f) Slično kao pod (a). ☑

Zadatak 6.12 *Neka je* $S = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_0, i_{\mathbb{R}^2}\}$*, gde je*

$\sigma_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *- osna simetrija u odnosu na x - osu (pravu* $y = 0$*),*

$\sigma_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *- osna simetrija u odnosu na y - osu (pravu* $x = 0$*),*

$\sigma_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *- centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak (tačku* $(0,0)$*),*

$i_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *- identička funkcija realne ravni* $\mathbb{R}^2$*.*

Dokazati da je $\mathcal{S} = (S, \circ)$ *grupa izomorfna sa grupom iz zadatka* **6.5** *(tj. Klajnova grupa).*

➥ ***Rešenje:*** Za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ je

$$\sigma_x(x,y) = (x,-y), \quad \sigma_y(x,y) = (-x,y), \quad \sigma_0(x,y) = (-x,-y), \quad i_{\mathbb{R}^2}(x,y) = (x,y),$$

te je tada

$(\sigma_x \circ \sigma_x)(x,y) = \sigma_x(\sigma_x(x,y)) = \sigma_x(x,-y) = (x,-(-y)) = (x,y) = i_{\mathbb{R}^2}(x,y)$,
odnosno $\sigma_x \circ \sigma_x = i_{\mathbb{R}^2}$,

$\left(\sigma_x \circ \sigma_y\right)(x,y) = \sigma_x\left(\sigma_y(x,y)\right) = \sigma_x(-x,y) = (-x,-y) = \sigma_0(x,y)$,
odnosno $\sigma_x \circ \sigma_y = \sigma_0$,

$(\sigma_x \circ \sigma_0)(x,y) = \sigma_x(\sigma_0(x,y)) = \sigma_x(-x,-y) = (-x,-(-y)) = (-x,y) = \sigma_y(x,y)$,
odnosno $\sigma_x \circ \sigma_0 = \sigma_y$,

$\vdots$

Analogno izračunavamo i sve ostale $f \circ g$, $f, g \in S$ i tako dobijamo Kejlijevu tablicu grupoida $(F, \circ)$ (pri tome i bez izračunavanja znamo da za sve funkcije $f \in S$ važi $f \circ i_{\mathbb{R}^2} = i_{\mathbb{R}^2} \circ f = f$).

$\circ$	σ_x	σ_y	σ_0	$i_{\mathbb{R}^2}$
σ_x	$i_{\mathbb{R}^2}$	σ_0	σ_y	σ_x
σ_y	σ_0	$i_{\mathbb{R}^2}$	σ_x	σ_y
σ_0	σ_y	σ_x	$i_{\mathbb{R}^2}$	σ_0
$i_{\mathbb{R}^2}$	σ_x	σ_y	σ_0	$i_{\mathbb{R}^2}$

Dalje možemo postupati na dva načina.

Prvi način

Možemo ispitivanjem (na poznati način) tablice grupoida $(S, \circ)$ da dokažemo da je $(S, \circ)$ grupa, a zatim da tražimo izomorfizam $\varphi : G \to S$.

Drugi način

Odmah ćemo dokazati da je grupoid tj. Klajnova grupa $(G, \cdot)$ iz zadatka **6.5** izomorfan sa grupoidom $(S, \circ)$, odakle na osnovu **6.11** sledi da je i $(S, \circ)$ grupa.

Ako u tablici Klajnove grupe $(G, \cdot)$ izvršimo zamene $e \leftrightarrow \sigma_x$, $a \leftrightarrow \sigma_y$, $b \leftrightarrow \sigma_0$, $c \leftrightarrow i_{\mathbb{R}^2}$, nećemo dobiti tablicu grupoida $(S, \circ)$ (tj. tablice se ne „poklapaju"), ali to znači samo da funkcija $\psi : \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_0 & i_{\mathbb{R}^2} \end{pmatrix}$ nije izomorfizam, a ne znači da izomorfizam iz $(G,\cdot)$ u $(S,\circ)$ ne postoji. Zaista, funkcija $\varphi : \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ i_{\mathbb{R}^2} & \sigma_x & \sigma_y & \sigma_0 \end{pmatrix}$ jeste izomorfizam iz $(G,\cdot)$ u $(S,\circ)$ jer je bijaktivna, i nakon zamena $s \leftrightarrow \varphi(s)$, $s \in G$ (tj. $e \leftrightarrow i_{\mathbb{R}^2}$, $a \leftrightarrow \sigma_x$, $b \leftrightarrow \sigma_y$, $c \leftrightarrow \sigma_0$) u tablici Klajnove grupe $(G,\cdot)$, i nakon podešavanja redosleda elemenata u graničnoj vrsti i koloni dobijamo tablicu grupoida $(S,\circ)$. Dakle, grupoid $(G,\cdot)$ je izomorfan sa grupoidom $(S,\circ)$, a pošto je grupoid $(G,\cdot)$ grupa, na osnovu zadatka **6.11** sledi da je i $(S,\circ)$ grupa. ☑

☞ Osim funkcije φ, i funkcije

$$\begin{pmatrix} e & a & b & c \\ i_{\mathbb{R}^2} & \sigma_x & \sigma_0 & \sigma_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ i_{\mathbb{R}^2} & \sigma_y & \sigma_x & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ i_{\mathbb{R}^2} & \sigma_y & \sigma_0 & \sigma_x \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} e & a & b & c \\ i_{\mathbb{R}^2} & \sigma_0 & \sigma_x & \sigma_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ i_{\mathbb{R}^2} & \sigma_0 & \sigma_y & \sigma_x \end{pmatrix}$$

su takođe izomorfizmi iz $(G,\cdot)$ u $(S,\circ)$.

Zadatak 6.13 *Dopuniti, ako je moguće, date nepotpune Kejlijeve tablice do tablica grupovnih operacija.*

(a)

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a			
b		e	e

(b)

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a				e
b		e		
c			e	

.

➥ ***Rešenje:***

(a) Nepotpuna tablica se ne može dopuniti do tablice grupovne operacije jer će vrsta elementa b uvek sadržati dva elementa e. Naime, u tablici grupovne operacije se u svakoj vrsti i svakoj koloni svaki element mora pojavljivati tačno jednom.

(b) U tablici grupovne operacije neutralni element mora biti simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. Iz date nepotpune tablice se vidi da je e levi neutralni element, pa mora biti i desni, odnosno mora biti neutralni element (da bismo tablicu mogli dopuniti do tablice grupovne operacije). Prema tome, e mora biti simetrično raspoređen u odnosu na glavnu dijagonalu. Odatle, zbog $b \star a = e$ sledi da mora biti i $a \star b = e$, ali se tada e u vrsti elementa a pojavljuje na dva mesta, tako da se ni ova tablica ne može dopuniti do tablice grupovne operacije. ☑

Zadatak 6.14 *Dokazati da ako je e neutralni element grupe $(G,\cdot)$, tada svaka podgrupa $(H,\cdot)$ grupe $(G,\cdot)$ sadrži element e koji je tada neutralni element i u podgrupi $(H,\cdot)$.*

➥ ***Rešenje:*** Ako pretpostavimo da podgrupa $(H,\cdot)$ ima neki drugi neutralni element $\tilde{e}$, tada je na osnovu zadatka **??** $\tilde{e}$ idempotentan element u $(H,\cdot)$, pa mora biti idempotentan i u $(G,\cdot)$, čime u grupi $(G,\cdot)$ dobijamo dva idempotentna elementa e i $\tilde{e}$, što je na osnovu zadatka **??** nemoguće. ☑

Zadatak 6.15 *Naći podgrupe Klajnove grupe iz zadatka* **6.5**.

➥ ***Rešenje:*** Dakle, ispitajmo da li osim $(\{e\},\cdot)$ i $(G,\cdot)$ ima i netrivijalnih podgrupa Klajnove grupe. Na osnovu Lagranžove teoreme (vidi [RD05]) broj elemenata podgrupe mora da deli broj elemenata grupe (podgrupa Klajnove grupe može da ima 1, 2 ili 4 elementa), a neutralni element grupe mora biti neutralni element i u podgrupi, pa su kandidati za netrivijalne podgrupe $(\{e,a\},\cdot)$, $(\{e,b\},\cdot)$ i $(\{e,c\},\cdot)$. Restrikcije operacije $\cdot$ na skupovima $\{e,a\}$, $\{e,b\}$ i $\{e,c\}$ su redom

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & e & b \\ \hline e & e & b \\ b & b & e \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & e & c \\ \hline e & e & c \\ c & c & e \end{array}$$

te vidimo da ovo jesu tablice grupovnih operacija (vidi komentar na strani 84). Dakle, Klajnova grupa ima osim trivijalnih podgrupa i tri netrivijalne. ☑

Zadatak 6.16 *Neka je* $(B,+,\cdot,',0,1)$ *Bulova algebra, i neka je operacija* $*: B^2 \to B$ *definisana sa*

$$\forall a,b \in B, \quad a*b = ab' + a'b$$

Dokazati da je $(B,*)$ *grupa.*

➥ ***Rešenje:***

- Uređeni par $(B,*)$ je grupoid na osnovu same definicije operacije $*$ (operacije $+$ i $'$ su zatvorene u skupu B).
- Dokažimo da je $(B,*)$ polugrupa, tj. da za sve $x,y,z \in B$ važi $x*(y*z) = (x*y)*z$. Kako je (primenjujemo osobine Bulovih algebri)

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*(yz'+y'z) = x(yz'+y'z)' + x'(yz'+y'z) = \\ &= x\big((yz')'(y'z)'\big) + x'yz' + xy'z = x((y'+z)(y+z')) + x'yz' + xy'z = \\ &= x(y'y + y'z' + yz + zz') + x'yz' + xy'z = xy'z' + xyz + x'yz' + xy'z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= (xy'+x'y)*z = (xy'+x'y)z' + (xy'+x'y)'z = \\ &= xy'z' + x'yz' + \big((xy')'(x'y)'\big)*z = xy'z' + x'yz' + ((x'+y)(x+y'))*z = \\ &= xy'z' + x'yz' + (x'x + x'y' + yx + yy')*z = xy'z' + x'yz' + x'y'z + yxz, \end{aligned}$$

  i kako su desne strane ovih jednakosti jednake (zbog osobina operacija u Bulovoj algebri), dobijamo da asocijativni zakon važi za operaciju $*$ u B.
- Neutralni element e, ako postoji, mora da zadovoljava $e*x = ex' + e'x = x$ za svako $x \in B$, i lako se vidi da je to ispunjeno za $e = 0$ jer za svako $x \in B$ važi $0*x = 0x' + 0'x = 0'x = 1x = x$.
- Inverzni element za $x \in B$ je $x^{-1} = x \in B$ jer je $x*x = xx' + x'x = 0+0 = 0 = e$ (za svako $x \in B$).

Prema tome, uređeni par $(B,*)$ jeste grupa, i to komutativna jer za sve $x,y \in B$ važi $x*y = xy' + x'y = yx' + y'x = y*x$ (komutativnost operacije $*$ je posledica komutativnosti operacija $+$ i $\cdot$ Bulove algebre $\mathbb{B}$). ☑

Zadatak 6.17 *Naći sve podgrupe grupe* $(\mathbb{Z},+)$.

➥ ***Rešenje:*** Pored trivijalnih podgrupa $(\{0\},+)$ i $(\mathbb{Z},+)$ imamo i netrivijalne podgrupe oblika $\mathbb{H}_n = (H_n,+)$, $n \in \mathbb{N}$ gde je $H_n = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Lako se proverava da to jesu podgrupe: iz $k_1 n, k_2 n \in H_n$ sledi $k_1 n + k_2 n = (k_1+k_2)n \in H_n$, $0 \in H_n$, i za $kn \in H_n$ važi $-kn = (-k)n \in H_n$. Ostaje da dokažemo da su to i jedine podgrupe. Pretpostavimo suprotno, da je $\mathbb{H} = (H,+)$ netrivijalna podgrupa za koju ne postoji prirodan broj n koji deli sve elemente skupa H. Neka je t najmanji po apsolutnoj vrednosti element skupa $H \setminus \{0\}$ (postoji jer posmatramo netrivijalnu podgrupu $\mathbb{H}$, a ako imamo dva takva t, npr. -4 i 4, tada za t uzimamo bilo kojeg od njih). Pošto ni jedan prirodan broj ne deli sve elemente skupa H, postoji $x \in H \setminus \{0\}$ takvo da t ne deli x. Pretpostavimo da je $x > 0$, a ako nije tada posmatrajmo umesto x element $-x > 0$, $-x \in H$. Kako je po pretpostavci $t < x$, postoji najveći prirodan broj n sa svojstvom $nt < x$, pri čemu je $nt \in H$. Ali tada za $x - nt \in H$ važi $0 < x - nt < t$ što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $t \in H$ najmanji po apsolutnoj vrednosti element skupa $H \setminus \{0\}$. ☑

Zadatak 6.18 *Neka je ρ kongruencija grupoida $(G,\cdot)$, i neka je na faktor-skupu G/ρ operacija $\odot$ definisana sa $C_x \odot C_y = C_{x\cdot y}$, $C_x, C_y \in G/\rho$ (vidi stranu 84). Dokazati:*

(a) *operacija $\odot$ je dobro definisana, tj. $(G/\rho,\odot)$ je grupoid;*

(b) *ako je $\cdot$ asocijativna operacija, tada je i $\odot$ asocijativna operacija;*

(c) *ako je $\cdot$ komutativna operacija, tada je i $\odot$ komutativna operacija;*

(d) *ako je $\cdot$ idempotentna operacija, tada je i $\odot$ idempotentna operacija;*

(e) *ako je $g \in G$ neutralni element u $(G,\cdot)$, tada je $C_g \in G/\rho$ neutralni element u $(G/\rho,\odot)$;*

(f) *ako je $(G,\cdot)$ grupa, tada je i $(G/\rho,\odot)$ grupa; ako su $x,y \in G$ uzajamno inverzni elementi u $(G,\cdot)$, tada su $C_x, C_y \in G/\rho$ uzajamno inverzni elementi u $(G/\rho,\odot)$.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je $C_x, C_y, C_z \in G/\rho$ (za neke $x,y,z \in G$).

(a) Vidi [RD05].

(b) $C_x \odot \big(C_y \odot C_z\big) = C_x \odot C_{y\cdot z} = C_{x\cdot(y\cdot z)} = C_{(x\cdot y)\cdot z} = C_{x\cdot y} \odot C_z = \big(C_x \odot C_y\big) \odot C_z$.

(c) Slično kao pod (b).

(d) Slično kao pod (b).

(e) $C_g \odot C_x = C_{g\cdot x} = C_x$ i $C_x \odot C_g = C_{x\cdot g} = C_x$.

(f) Neka je g neutralni element u $(G,\cdot)$, i neka su $x,y \in G$ uzajamno inverzni elementi u $(G,\cdot)$. Sledi $C_x \odot C_y = C_{x\cdot y} = C_g$ i $C_y \odot C_x = C_{y\cdot x} = C_g$, gde je, na osnovu (e), C_g neutralni element u $(G/\rho,\odot)$. ☑

Zadatak 6.19 *Dokazati da je grupa $(\mathbb{Z}_n,+)$ homomorfna slika grupe $(\mathbb{Z},+)$.*

➥ ***Rešenje:*** Treba da dokažemo da postoji sirjektivni homomorfizam φ iz $(\mathbb{Z},+)$ u $(\mathbb{Z}_n,+)$, tj. treba da ga konstruišemo.

Dokažimo da funkcija $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ definisana sa $\varphi(k)=C_k$, $k\in\mathbb{Z}$ ima ova svojstva, gde je C_k klasa elementa k u odnosu na relaciju $\equiv_n$ za koju smo videli da je kongruencija grupe $(Z,+)$.

(a) $\underline{\varphi \text{ je homomorfizam}}$: za sve $a,b\in\mathbb{Z}$ važi

$\varphi(a+b)=C_{a+b}=C_a+C_b=\varphi(a)+\varphi(b)$.

(b) $\underline{\varphi \text{ je sirjektivna funkcija}}$: za svako C_k očigledno važi $\varphi(k)=C_k$. ☑

Zadatak 6.20 *Da li je Klajnova grupa iz zadatka* **6.5** *izomorfna sa* $(Z_4,+)$*?*

➥ ***Rešenje:*** Nije, jer u $\mathbb{Z}_4$ nije svaki element sam sebi inverzan kao u Klajnovoj grupi, a u slučaju izomorfnosti bi to moralo da bude jer izomorfizam „prenosi osobine” (vidi zadatak **6.11**. ☑

Zadatak 6.21 *Neka je* $n\in\mathbb{N}$ *i* $A_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\}$. *Dokazati da je* $(A,\cdot)$ *komutativna grupa, gde je* $\cdot$ *množenje kompleksnih brojeva.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Zatvorenost operacije:

$$z_1,z_2\in A \quad\Rightarrow\quad \left(z_1^n=1\ \land\ z_2^n=1\right) \quad\Rightarrow\quad (z_1z_2)^n=z_1^nz_2^n=1 \quad\Rightarrow\quad z_1z_2\in A.$$

(b) Množenje brojeva je asocijativna operacija.

(c) Neutralni element je $1\in A$ (važi $1^n=1$).

(d) Za proizvoljno $z\in A$ inverzni element je $z^{-1}=\frac{1}{z}\in A$ jer važi $\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{z^n}=1$).

(e) Množenje brojeva je komutativna operacija. ☑

☞ Primetimo da je $z^n=1\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{1}$, te je A skup n-tih korena jedinice, odnosno $A=\left\{e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\ \middle|\ k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$ (vidi poglavlje o kompleksnim brojevima).

☞ Za vežbu možete pokazati da je $(A,\cdot)$ ciklična grupa generisana elementom $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, i da je grupa $(A,\cdot)$ izomorfna sa $(\mathbb{Z}_n,+)$ (vidi zadatak **6.23**).

Zadatak 6.22 *Neka je* $g:[0,7]\to\mathbb{R}$ *proizvoljna bijektivna funkcija za koju važi da je* $g(3)=0$. *Dokazati da je* $([0,7],*)$ *Abelova grupa, gde je* $*$ *binarna operacija skupa* $[0,7]$ *definisana sa*

$$\forall x,y\in[0,7],\quad x*y=g^{-1}(g(x)+g(y))$$

➥ ***Rešenje:*** Iz same definicije je očigledno da je $*$ zaista binarna operacija skupa $[0,7]$ jer je g bijektivna funkcija pa postoji g^{-1}, i za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveno $g^{-1}(a) \in [0,7]$.

Operacija $*$ je asocijativna jer za sve $x,y,z \in [0,7]$ važi

$$(x*y)*z = g^{-1}(g(x)+g(y))*z = g^{-1}\Big(g\Big(g^{-1}(g(x)+g(y))\Big)+g(z)\Big) =$$
$$= g^{-1}((g(x)+g(y))+g(z)) = g^{-1}(g(x)+(g(y)+g(z))) =$$
$$= g^{-1}\Big(g(x)+g\Big(g^{-1}(g(y)+g(z))\Big)\Big) = g^{-1}\Big(g(x)+g\Big(g^{-1}(g(y)+g(z))\Big)\Big) =$$
$$= x*g\Big(g^{-1}(g(y)+g(z))\Big) = x*(y*z).$$

Za neutralni element $e \in [0,7]$ (ako postoji) mora da važi

$$\forall x \in [0,7], \quad e*x = g^{-1}(g(e)+g(x)) = x = x*e = g^{-1}(g(x)+g(e)),$$

odakle možemo pogoditi da će to biti $e = 3$, što zaista i jeste jer je

$3*x = g^{-1}(g(3)+g(x)) = g^{-1}(0+g(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$, i

$x*3 = g^{-1}(g(x)+g(3)) = g^{-1}(g(x)+0) = g^{-1}(g(x)) = x.$

Rešavajući jednačinu $x*y = 3$ po y dobijamo da je inverzni element za $x \in [0,7]$ broj $x' = g^{-1}(-g(x)) \in [0,7]$ jer je

$$x'*x = x*x' = x*g^{-1}(-g(x)) = g^{-1}\Big(g(x)+g\Big(g^{-1}(-g(x))\Big)\Big) =$$
$$= g^{-1}(g(x)+-g(x)) = g^{-1}(0) = 3.$$

Komutativnost operacije $*$ sledi iz

$$x*y = g^{-1}(g(x)+g(y)) = g^{-1}(g(y)+g(x)) = y*x.$$ ☑

Zadatak 6.23 *Dokazati da su svake dve ciklične grupe od po k elemenata izomorfne, kao i da su izomorfne svake dve beskonačne ciklične grupe.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je $(G,\cdot)$ ciklična grupa sa generatorom g, i neka je $(H,*)$ ciklična grupa sa generatorom h.

(a) Neka je $|G| = |H| = k \in \mathbb{N}$. Tada su svi elementi skupa G oblika $g^n = \underbrace{g\cdot g\cdot\ldots\cdot g}_{n \text{ puta}}$ za neko $n \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$, i svi elementi skupa H su oblika $h^m = \underbrace{h*h*\ldots*h}_{m \text{ puta}}$ za neko $m \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$ (vidi [RD05]). Stoga sledi da je funkcija $\varphi : G \to H$, $\varphi(g^n) = h^n$, $n \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$ dobro definisana.

Funkcija φ je homomorfizam je jer za sve $x = g^{n_1} \in G$ i $y = g^{n_2} \in G$, gde je $n_1, n_2 \in \{0,1,2,\ldots,k-1\}$, važi

$$\varphi(g^{n_1}\cdot g^{n_1}) = \varphi((\underbrace{g\cdot g\cdot\ldots\cdot g}_{n_1 \text{ puta}})\cdot(\underbrace{g\cdot g\cdot\ldots\cdot g}_{n_2 \text{ puta}})) \overset{[1]}{=} \varphi(\underbrace{g\cdot g\cdot\ldots\cdot g}_{n_1+n_2 \text{ puta}}) = \varphi(g^{n_1+n_2}) \overset{[2]}{=}$$
$$= h^{n_1+n_2} = \underbrace{h*h*\ldots*h}_{n_1+n_2 \text{ puta}} \overset{[1]}{=} (\underbrace{h*h*\ldots*h}_{n_1 \text{ puta}})\cdot(\underbrace{h*h*\ldots*h}_{n_2 \text{ puta}}) =$$
$$= h^{n_1}*h^{n_2} \overset{[2]}{=} \varphi(g^{n_1})*\varphi(g^{n_2}).$$

Funkcija φ je sirjektivna jer za svako $h^n \in H$ postoji $g^n \in H$ takvo da je $\varphi(g^n) = h^n$. Funkcija φ je i injektivna jer za različite elemente $g^{n_1}, g^{n_2} \in G$, pri čemu je $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ i $\varphi(g^{n_1}) = h^{n_1}$ i $\varphi(g^{n_2}) = h^{n_2}$, važi $n_1 \neq n_2$, te mora biti i $h^{n_1} \neq h^{n_2}$, jer bi inače skup $H = \left\{h^0, h^1, h^2, \ldots, h^{n-1}\right\}$ imao ne n, nego manje od n elemenata (u skupu H bi se element $h^{n_1} = h^{n_2}$ pojavljivao bar dva puta, pa bi skup H imao najviše $n-1$ elemenata).

[1] - U grupi je operacija asocijativna.

[2] - Po definiciji funkcije φ.

(b) U slučaju $|G| = |H| = \infty$ su skupovi G i H oblika
$G = \left\{\ldots, g^{-3}, g^{-2}, g^{-1}, g^0, g, g^2, g^3, \ldots\right\}, \quad H = \left\{\ldots, h^{-3}, h^{-2}, h^{-1}, h^0, h, h^2, h^3, \ldots\right\}$,
i funkcija $\varphi : G \to H$, $\varphi(g^n) = h^n$, $n \in \mathbb{Z}$ je ponovo izomorfizam iz $(G, \cdot)$ u $(H, *)$. Na isti način kao pod (a) se dokazuje da je homomorfizam i da je sirjektivna. Injektivnost moramo dokazati drugačije jer su skupovi G i H beskonačni. Posmatrajmo različite elemente $g^{n_1}, g^{n_2} \in G$, tj. različite $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Ako pretpostavimo da je $\varphi(g^{n_1}) = h^{n_1} = h^{n_2} = \varphi(g^{n_2})$, tada „množeći" jednakost $h^{n_1} = h^{n_2}$ sa npr. $h^{-n_1} = (h^{n_1})^{-1}$ dobijamo $h^0 = e_H = h^{n_2} * h^{-n_1} = h^{n_2 - n_1}$, gde je e_H neutralni element grupe $(H, *)$. Međutim, to bi značilo da je grupa $(H, *)$ konačna, jer bi bilo
$h^{n_2-n_1+1} = h^1, \quad h^{n_2-n_1+2} = h^2, \ldots, \quad h^{2(n_2-n_1)} = h^0 = e, \quad h^{2(n_2-n_1)+1} = h^1, \ldots$
☑

Zadatak 6.24 *Nabrojati sve neizomorfne grupe sa 4 elementa.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je $G = \{1, 2, 3, 4\}$ skup-nosač tražene grupe, operaciju označimo sa $\cdot$, i neka je npr. 1 neutralni element tražene grupe. Tada mora da važi:

(a) vrsta i kolona elementa 1 jednaka je graničnoj vrsti odnosno koloni, i vrsta i kolona svakog elementa sadrži sve elemente skupa G (svaki se javlja tačno jednom), ali pri tome neutralni element 1 mora biti raspoređen simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu;

(b) operacija $\cdot$ zadovoljava asocijativni zakon.

Popunjavajući Kejlijevu tablicu operacije $\cdot$ tako da bude ispunjen zahtev (a) dobijamo redom sledeće mogućnosti:

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	2	1
4	4	3	1	2

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

$\cdot$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

U sve četiri tablice je operacija $\cdot$ asocijativna, što se neposredno utvrđuje proveravajući asocijativni zakon za sve moguće trojke elemenata skupa G. Prema tome, sve četiri tablice predstavljaju tablice grupovnih operacija, pa na prvi pogled postoje 4 neizomorfne grupe sa 4 elementa. Prva je takozvana Klajnova grupa, druga je ciklična grupa generisana elementom 3 ($3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 2$, $3^3 = 4$), treća je ciklična grupa generisana elementom 2 ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 3$, $2^3 = 4$), i četvrta je ciklična grupa generisana elementom 2 ($2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 3$, $2^3 = 4$). Međutim, videli smo u zadatku **6.23** da su bilo koje dve ciklične grupe sa istim brojem elemenata izomorfne - npr. druga i treća preko izomorfizma $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, druga i četvrta preko izomorfizma $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, a treća i četvrta preko izomorfizma i_G (identička funkcija skupa G). Dakle, postoje samo dve neizomorfne ciklične grupe sa 4 elementa - Klajnova i ciklična, tj. bilo koja grupa sa 4 elementa je izomorna sa jednom od te dve.

☑

Zadatak 6.25 *Neka je $\triangle ABC$ jednakostraničan trougao u ravni α, i neka je P skup svih transformacija podudarnosti ravni α koje trougao $\triangle ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ preslikavaju u samog sebe, tj. trougao $\triangle ABC$ (transformacija podudarnosti ravni α je svaka funkcija $f : \alpha \to \alpha$ takva da za svake dve tačke $X, Y \in \alpha$ važi $[XY] \cong [f(X)f(Y)]$). Dokazati da je $\mathcal{P} = (P, \circ)$ grupa, gde je $\circ$ je kompozicija funkcija.*

➥ ***Rešenje:*** Svaka transformacija podudarnosti ravni α je potpuno određena slikama neke tri nekolinearne tačke, tj. ako su $X, Y, Z \in \alpha$ nekolinearne tačke, tada je položajima tačaka $f(X), f(Y), f(Z) \in \alpha$ određen položaj tačke $f(W)$ za svako $W \in \alpha$. Dakle, svaka transformacija podudarnosti trougla $\triangle ABC$ je potpuno određena slikama tačaka A, B i C, te je dovoljno je za svaku transformaciju podudarnosti da znamo u koja se temena tog trougla preslikavaju redom temena A, B i C. To znači da svaku transformaciju podudarnosti trougla $\triangle ABC$ možemo jednoznačno identifikovati sa nekom permutacijom njegovih temena. Stoga skup P ima onoliko elemenata koliko ima permutacija tročlanog skupa, a ima ih $3! = 6$, i radi jednostavnosti ćemo pisati da su elementi skupa P

$i_\alpha = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ - identička funkcija ravni α,

$\rho_{120} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ - rotacija oko težišta trougla $\triangle ABC$ za ugao od 120 stepeni,

$\rho_{240} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$ - rotacija oko težišta trougla $\triangle ABC$ za ugao od 240 stepeni,

$\sigma_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$ - osna simetrije u odnosu na pravu koja sadrži tačku A i polovi naspramnu stranicu $[BC]$,

$\sigma_B = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ - osna simetrije u odnosu na pravu koja sadrži tačku B i polovi naspramnu stranicu $[AC]$,

$\sigma_C = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$ - osna simetrije u odnosu na pravu koja sadrži tačku C i polovi naspramnu stranicu $[AB]$.

Izračunavajući redom kompozicije elemenata skupa $P = \{i_\alpha, \rho_{120}, \rho_{240}, \sigma_A, \sigma_B, \sigma_C\}$, npr.

$$\rho_{120} \circ \rho_{240} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix} = i_\alpha,$$

$$\rho_{120} \circ \sigma_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} = \sigma_C,$$

$$\sigma_C \circ \sigma_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = \rho_{240},$$

$$\vdots$$

popunjavamo Kejlijevu tablicu i dobijamo

$\circ$	i_α	ρ_{120}	ρ_{240}	σ_A	σ_B	σ_C
i_α	i_α	ρ_{120}	ρ_{240}	σ_A	σ_B	σ_C
ρ_{120}	ρ_{120}	ρ_{240}	i_α	σ_C	σ_A	σ_B
ρ_{240}	ρ_{240}	i_α	ρ_{120}	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	i_α	ρ_{120}	ρ_{240}
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	ρ_{240}	i_α	ρ_{120}
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	ρ_{120}	ρ_{240}	i_α

Sledi:

(a) zatvorenost operacije $\circ$ u skupu P je dokazana računom kojim smo popunili tablicu;

(b) $\circ$ je kompozicija funkcija koja je uvek asocijativna;

(c) Neutralni element je identička funkcija i_α što se vidi i po tome što su njena vrsta i kolona jednake graničnoj vrsti odnosno koloni;

(d) Svaki element skupa P ima sebi inverzni jer se u vrsti i koloni svakog elementa pojavljuje svaki element skupa P (tačno jednom), i neutralni element je raspoređen simetrično u odnosu na glavnu dijagonalu. Eksplicitno: $i_\alpha^{-1} = i_\alpha$, $\rho_{120}^{-1} = \rho_{240}^{-1}$, $\rho_{240}^{-1} = \rho_{120}^{-1}$, $\sigma_A^{-1} = \sigma_A^{-1}$, $\sigma_B^{-1} = \sigma_B^{-1}$, $\sigma_C^{-1} = \sigma_C^{-1}$ (svakom elementu njemu inverzni nalazimo tako što u njegovoj vrsti pronađemo neutralni element i tada u graničnoj vrsti pronalazimo inverzni element koji se mora nalaziti u istoj koloni u kojoj se nalazi uočeni neutralni element).

Dakle, $\mathcal{P}$ jeste grupa koja nije komutativna jer Kejlijeva tablica nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu. ☑

Zadatak 6.26 *Neka je* $\mathcal{A} = (A, *)$ *grupoid, neka je* $F = \{f \mid f : A \to A\}$*, i neka je* $\circledast$ *binarna operacija skupa* F *definisana sa*

$$\forall f, g \in F, \quad (f \circledast g)(x) = f(x) * g(x), \ x \in A.$$

Dokazati da za $\mathcal{F} = (F, \circledast)$ *važi*

(a) $\mathcal{F}$ *je grupoid;*

(b) *ako je* $\mathcal{A}$ *polugrupa, tada je i* $\mathcal{F}$ *polugrupa;*

(c) *ako je* $\mathcal{A}$ *monoid (polugrupa sa neutralnim elementom), tada je i* $\mathcal{F}$ *monoid;*

(d) *ako je $\mathcal{A}$ grupa, tada je i $\mathcal{F}$ grupa;*

(e) *ako je $\mathcal{A}$ komutativna grupa, tada je i $\mathcal{F}$ komutativna grupa.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Za sve f,g je očigledno $h = f \circledast g \in F$, jer iz same definicije operacije $\circledast$ i zatvorenosti sledi da je $h : A \to A$; naime, za svako $x \in A$ je $f(x), g(x) \in A$, te je stoga i $h(x) = f(x) * g(x) \in A$.

(b) Neka je $\mathcal{A}$ polugrupa. Videli smo da je tada $\mathcal{F}$ grupoid, pa ostaje da dokažemo asocijativnost operacije $\circledast$. Za sve $f,g,h \in F$ važi

$$\begin{aligned}&f \circledast (g \circledast h) = (f \circledast g) \circledast h \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ (f \circledast (g \circledast h))(x) = ((f \circledast g) \circledast h)(x) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ f(x) * (g \circledast h)(x) = (f \circledast g)(x) * h(x) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ f(x) * (g(x) * h(x)) = (f(x) * g(x)) * h(x),\end{aligned}$$

a poslednji iskaz je tačan jer je $f(x), g(x), h(x) \in A$, a $*$ je asocijativna operacija skupa A.

(c) Neka je $\mathcal{A}$ monoid, i označimo sa e njegov neutralni element. Videli smo pod (b) da je tada i $\mathcal{F}$ polugrupa, pa treba još da dokažemo egzistenciju neutralnog elementa u $\mathcal{F}$. Funkcija $\varepsilon \in F$ definisana sa $\varepsilon(x) = e$, $x \in A$ je levi neutralni element u polugrupi $\mathcal{F}$ jer za svako $f \in F$ važi

$$\begin{aligned}&\varepsilon \circledast f = f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ (\varepsilon \circledast f)(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ \varepsilon(x) * f(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ e * f(x) = f(x),\end{aligned}$$

a poslednji iskaz je tačan jer je $f(x) \in A$ i e je neutralni element u $\mathcal{A}$.

(d) Neka je $\mathcal{A}$ grupa sa neutralnim elementom e, i obeležimo sa x' inverzni element elementa $x \in A$ u grupi $\mathcal{A}$. Videli smo pod (c) da je tada $\mathcal{F}$ monoid, i neka je $\varepsilon \in F$ njegov neutralni element. Ostaje da dokažemo da za svako $f \in F$ postoji levi inverzni element $\overline{f} \in F$ u monoidu $\mathcal{F}$. Dokažimo da je za $f \in F$ levi inverzni element u $\mathcal{F}$ funkcija $\overline{f}$ definisana sa $\overline{f}(x) = \overline{x}$, $x \in A$. Ovo je tačno jer je

$$\begin{aligned}&\overline{f} \circledast f = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ \left(\overline{f} \circledast f\right)(x) = \varepsilon(x) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ \overline{f}(x) * f(x) = e \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ (f(x))' * f(x) = e\end{aligned}$$

a poslednji iskaz je tačan jer je $(f(x))' \in A$ inverzni element elementa $f(x) \in A$ u grupi $\mathcal{A}$.

(e) Neka je $\mathcal{A}$ komutativna grupa. Tada je i $\mathcal{F}$ komutativna grupa jer za sve $f,g \in F$ važi

$$\begin{aligned}&f \circledast g = g \circledast f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ (f \circledast g)(x) = (g \circledast f)(x) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in A,\ f(x) * g(x) = g(x) * f(x),\end{aligned}$$

a poslednji iskaz je tačan jer su $f(x)$ i $g(x)$ elementi komutativne grupe $\mathcal{A}$. ☑

Zadatak 6.27 *Neka je $F = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, i neka su $\oplus$ i $\odot$ binarne operacije skupa F definisane sa*

$$\begin{aligned}&\forall f,g \in F, \quad (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R},\\ &\forall f,g \in F, \quad (f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(a) *Dokazati da je* $\mathcal{F} = (F,\oplus)$ *komutativna grupa.*

(b) *Ispitati da li je* $\mathcal{F} = (F,\odot)$ *komutativna grupa.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Kako je $(\mathbb{R},+)$ komutativna grupa, na osnovu zadatka **6.26** je i $(F,\oplus)$ komutativna grupa. Neutralni element je funkcija $\mathbb{O} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $\mathbb{O}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ (funkcija čiji je grafik x-osa). Inverzni element funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcija $\ominus f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $(\ominus f)(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (funkcija čiji je grafik simetričan u odnosu na x-osu sa grafikom funkcije f).

(b) Kako $(\mathbb{R},\cdot)$ nije grupa (ne postoji inverzni element za 0), na osnovu zadatka **6.26** ne možemo zaključiti da li je $(F,\odot)$ grupa ili nije. Ipak, pošto je $(\mathbb{R},\cdot)$ komutativna polugrupa sa neutralnim elementom 1, na osnovu zadatka **6.26** sledi da je i $(F,\odot)$ komutativna polugrupa sa neutralnim elementom $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gde je $\mathbb{1}$ funkcija definisana sa $\mathbb{1}(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ (funkcija čiji je grafik prava $y = 1$). Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji inverzni element $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako i samo ako

$$f \cdot f' = \mathbb{1} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f \cdot f'(x) = \mathbb{1}(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \cdot f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{f(x)},$$

a funkcija $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji ako i samo ako je $f(x) \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tako npr. za funkciju $f(x) = x^2 + 1$ postoji inverzni element $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, dok npr. za funkciju $f(x) = \sin x$ ne postoji inverzni element jer postoje $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x = 0$. Dakle, $(F,\odot)$ nije grupa. ☑

Zadatak 6.28 *Neka je* S_3 *skup svih permutacija skupa* $A = \{1,2,3\}$. *Dokazati da je* $\mathcal{S}_3 = (S_3,\circ)$ *grupa.*

➥ ***Rešenje:*** Permutacije skupa $A = \{1,2,3\}$ su zapravo bijektivne funkcije tog skupa, i u ovom slučaju su to

$$i_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

U zadatku **4.4** je, za svako $A \neq \emptyset$, pa i za $A = \{1,2,3\}$, dokazano da je $\mathcal{S}_3 = \mathcal{B}$ grupa, a njena Kejlijeva tablica je

$\circ$	i_A	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i_A	i_A	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	s_1	i_A	s_4	s_5	s_2	s_3
s_2	s_2	s_3	i_A	s_1	s_5	s_4
s_3	s_3	s_2	s_5	s_4	i_A	s_1
s_4	s_4	s_5	s_1	i_A	s_3	s_2
s_5	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1	i_A

☑

Teorema 6.1 *Neka je $(G,\cdot)$ grupoid. Neka je za svako $g \in G$ preslikavanje $\sigma_g : G \to G$ definisano sa $\sigma_g(x) = g \cdot x$, $x \in G$, i neka je $S_G = \{\sigma_g \mid g \in G\}$. Grupoid $(G,\cdot)$ je grupa ako i samo ako je $(S_G,\circ)$ grupa, i u tom slučaju su ove grupe izomorfne - funkcija $\psi : G \to S_G$, $\psi(g) = \sigma_g$ je izomorfizam iz grupe $(G,\cdot)$ u grupu $(S_G,\circ)$.*

Dakle, svaka grupa $(G,\cdot)$ je izomorfna sa nekom podgrupom grupe svih permutacija skupa G u odnosu na kompoziciju funkcija.

☞ Ako je neki grupoid $(G,\cdot)$ definisan Kejlijevom tablicom, sve osobine grupe osim asocijativnosti se relativno lako proveravaju vizuelno (vidi komentar na strani 52). Ako su ostale osobine grupe ispunjene, pri proveri asocijativnosti, umesto direktne provere jednakosti $x(yz) = (xy)z$ za sve $x,y,z \in G$, možemo konstruisati skup S_G iz teoreme **6.1**, te ako je kompozicija funkcija $\circ$ zatvorena na skupu S_G, tada je $(S_G,\circ)$ grupa, te sledi da je i $(G,\cdot)$ grupa (operacija $\cdot$ je asocijativna).

Zadatak 6.29 *Preko permutacija proveriti da li su sledeći uređeni parovi grupe:*

(a) $(A,\cdot)$, *gde je* $A = \{a,b,c,d\}$ *i*

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(b) $(B,*)$, *gde je* $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ *i*

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	1
3	3	4	1	6	2	5
4	4	5	6	1	3	2
5	5	6	2	3	1	4
6	6	1	5	2	4	3

➥ ***Rešenje:*** Iz Kejlijevih tablica datih operacija vidimo:

(a) Operacija $\cdot$ je zatvorena na skupu A, neutralni element je a, inverzni elementi su redom $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$ i $d^{-1} = d$, tako da još preostaje samo pitanje asocijativnosti operacije $\cdot$ na skupu A. Posmatrajmo permutacije skupa G iz teoreme **6.1**, i na skupu $S_A = \{\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c,\sigma_d\}$ tih permutacija posmatrajmo operaciju $\circ$:

$$\sigma_a = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},\quad \sigma_b = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix},$$
$$\sigma_c = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix},\quad \sigma_d = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix},$$

$\circ$	σ_a	σ_b	σ_c	σ_d
σ_a	σ_a	σ_b	σ_c	σ_d
σ_b	σ_b	σ_a	σ_d	σ_c.
σ_c	σ_c	σ_d	σ_a	σ_b
σ_d	σ_d	σ_c	σ_b	σ_a

Pošto je operacija $\circ$ zatvorena u skupu S_A (i kompozicija funkcija je uvek asocijativna, neutralni element je σ_a, inverzni elementi su redom $\sigma_a^{-1} = \sigma_a$, $\sigma_b^{-1} = \sigma_b$, $\sigma_c^{-1} = \sigma_c$ i $\sigma_d^{-1} = \sigma_d$), i za sve $x,y \in A$ važi $\sigma_x \circ \sigma_y = \sigma_{x\cdot y}$, sledi da je $(S_A,\circ)$ grupa, te je, na osnovu teoreme **6.1** i $(A,\cdot)$ grupa.

(b) Operacija $*$ je zatvorena na skupu B, neutralni element je 1, inverzni elementi su redom $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 6$, $3^{-1} = 3$, $4^{-1} = 4$, $5^{-1} = 5$ i $6^{-1} = 2$, tako da još preostaje samo pitanje asocijativnosti operacije $*$ na B. Odgovarajući skup permutacija iz teoreme **6.1** je $S_B = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6\}$, gde je

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Uređeni par $(B,*)$ nije grupa jer je npr.

$$\sigma_3 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq \sigma_{3*2} = \sigma_4,$$

odnosno operacija $\circ$ nije čak ni zatvorena u skupu S_B jer $\sigma_3 \circ \sigma_2 \notin S_B$. ☑

Zadatak 6.30 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Ispitati strukture $(\mathbb{R}^n, +)$ i $(\mathbb{R}^n, \odot)$, gde su $+$ i $\odot$ operacije sabiranja i množenja uređenih n-torki po komponentama, tj.*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \odot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n),$$

za sve $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

➥ ***Rešenje:*** Na osnovu zadatka **4.5** je $(\mathbb{R}^n, +)$ komutativna grupa (jer je $(\mathbb{R}, +)$ komutativna grupa), pri čemu je $(0, 0, \ldots, 0)$ neutralni element, a inverzni element za $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ u odonosu na $+$ je $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Takođe, na osnovu zadatka **4.5**, $(\mathbb{R}^n, \odot)$ je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom, tj. komutativan monoid (jer je $(\mathbb{R}, \cdot)$ komutativni monoid). Neutralni element je $(1, 1, \ldots, 1)$, a inverzni element za $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ postoji ako i samo ako je $a_i \neq 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, a_n\}$, i u tom slučaju, inverzni element za $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ u odnosu na $\odot$ je $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) \in \mathbb{R}^n$. Dakle, $(\mathbb{R}^n, \odot)$ nije grupa, a skup svih invertibilnih elemenata monoida $(\mathbb{R}^n, \odot)$ je $\mathcal{A} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i,\ a_i \neq 0\}$, tako da je $(\mathcal{A}, \odot)$ najveća grupa koja je podgrupoid monoida $(\mathbb{R}^n, \odot)$ (vidi zadatak **6.8**). ☑

Zadatak 6.31 *Neka su za $a, b \in \mathbb{R}$ funkcije $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane sa $f_{a,b}(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je $\mathcal{L} = \left\{ f_{a,b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ i $\mathcal{L}_* = \left\{ f_{a,b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \land a \neq 0 \right\}$. Neka su za $f, g \in \mathcal{L}$ funkcije $f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f \odot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisane (kao u zadatku* **6.27***) sa*

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in \mathbb{R}, \qquad (f \odot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) *Dokazati da je $(\mathcal{L}, \oplus)$ komutativna grupa. Da li je $(\mathcal{L}_*, \oplus)$ komutativna grupa?*

(b) *Ispitati strukturu $(\mathcal{L}, \odot)$.*

(c) *Ispitati strukturu $(\mathcal{L}, \circ)$, gde je $\circ$ kompozicija funkcija.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Prvi način

Za sve $f_{a,b}, f_{c,d} \in \mathcal{L}$ i sve $x \in \mathbb{R}$ je

$(f_{a,b} \oplus f_{c,d})(x) = f_{a,b}(x) + f_{c,d}(x) =$
$= (ax+b) + (cx+d) = (a+c)x + (b+d) = f_{a+c,b+d}(x),$

što znači da je $f_{a,b} \oplus f_{c,d} \overset{[*]}{=} f_{a+c,b+d}$, te iz $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sledi $a+c, b+d \in \mathbb{R}$, te je $f_{a+c,b+d} \in \mathcal{L}$. Dakle, uređeni par $(\mathcal{L}, \oplus)$ je grupoid, te sledi da je on podgrupoid grupe $\mathcal{F} = (F, \oplus)$ iz zadatka **6.27**. Asocijativnost i komutativnost operacije $\oplus$ je dokazana u zadatku **6.27** (odnosno u zadatku **6.26**), neutralni element je nula-funkcija $f_{0,0} \in \mathcal{L}$, i za svaki element $f_{a,b} \in \mathcal{L}$ postoji njemu inverzni element $f_{-a,-b} \in \mathcal{L}$ (važi $f_{-a,-b} \oplus f_{a,b} \overset{[*]}{=} f_{-a+a,-b+b} = f_{0,0}$ i $f_{a,b} \oplus f_{-a,-b} \overset{[*]}{=} f_{0,0}$). Dakle, $(\mathcal{L}, \oplus)$ je komutativna grupa.

Drugi način

Posmatrajmo komutativnu grupu $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ iz zadatka **6.30**, i posmatrajmo funkciju $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{L}$ definisanu sa $\varphi((a,b)) = f_{a,b}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Funkcija φ je očigledno sirjektivna, injektivna je jer su za različite uređene parove $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ funkcije $f_{a,b}(x) = ax+b$ i $f_{c,d}(x) = cx+d$ različite (ako pretpostavimo suprotno, tada bi iz npr. $f_{a,b}(0) = f_{a,b}(0)$ i $f_{a,b}(1) = f_{a,b}(1)$ sledilo da je $(a,b) = (c,d)$), tj. funkcija φ je bijektivna. Funkcija φ je i homomorfizam iz $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ u $(\mathcal{L}, \oplus)$ jer za sve $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$\varphi((a,b)+(c,d)) = \varphi((a+c, b+d)) = f_{a+c,b+d} \overset{[*]}{=} f_{a,b} \oplus f_{c,d} = \varphi((a,b)) + \varphi((c,d)).$$

Dakle, funkcija φ je i izomorfizam iz $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ u $(\mathcal{L}, \oplus)$, te kako je $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ komutativna grupa, sledi da je i $(\mathcal{L}, \oplus)$ komutativna grupa.

(b) $(\mathcal{L}, \odot)$ nije čak ni grupoid jer je npr.

$(f_{1,1} \odot f_{2,3})(x) = f_{1,1}(x) \cdot f_{2,3}(x) = (x+1)(2x+3) = 2x^2 + 5x + 3,$

odnosno $f_{1,1} \odot f_{2,3} \notin \mathcal{L}$ (jer $f_{1,1} \odot f_{2,3}$ nije oblika $f_{a,b}$).

(c) Za sve $f_{a,b}, f_{c,d} \in \mathcal{L}$ i sve $x \in \mathbb{R}$ je

$(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = a(cx+d) + b = acx + ad + b = f_{ac,ad+b}(x),$

što znači da je $f_{a,b} \circ f_{c,d} \overset{[**]}{=} f_{ac,ad+b}$, te iz $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ sledi $ac, ad+b \in \mathbb{R}$, te je $f_{ac,ad+b} \in \mathcal{L}$. Dakle, uređeni par $(\mathcal{L}, \circ)$ je grupoid, te sledi da je on podgrupoid grupoida $\mathcal{F} = (\mathbb{F}, \circ)$ iz zadatka **4.4**. Kompozicija funkcija je asocijativna, a komutativna nije ni u skupu $\mathcal{L}$ jer je npr. $f_{2,3} \circ f_{4,5} \overset{[**]}{=} f_{8,13} \neq f_{8,17} \overset{[**]}{=} f_{4,5} \circ f_{2,3}$. Neutralni element je identička funkcija $i_{\mathbb{R}} = f_{1,0} \in \mathcal{L}$, i za svaki element $f_{a,b} \in \mathcal{L}$, inverzni element, ako postoji, je inverzna funkcija funkcije $f_{a,b}$ (vidi komentar iza zadatka **4.4**). Inverzna funkcija funkcije $f_{a,b}$ postoji ako i samo ako je funkcija $f_{a,b}$ bijektivna, a to je ako i samo ako je $a \neq 0$ (grafik funkcije $f_{a,b}(x) = ax+b$ ima jedinstven presek sa svakom pravom oblika $y = c$ samo za $a \neq 0$ - vidi komentar na strani 25). Dakle, $(\mathcal{L}, \circ)$ je monoid, a nije grupa. Na osnovu zadatka **6.8**, maksimalna grupa koja je podgrupoid grupoida $(\mathcal{L}, \circ)$ je $\left(\widetilde{\mathcal{L}}, \circ\right)$, gde je $\widetilde{\mathcal{L}} = \left\{ f_{a,b} \in \mathcal{L} \;\middle|\; a \neq 0 \right\}$.

☑

Zadatak 6.32 *Neka je za parametar $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisana sa*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_a(x,y) = (ax, ax).$$

Ispitati aksiome komutativne grupe na uređenim parovima $\mathbf{F} = (\mathcal{F}, \circ)$ *i* $\mathbf{W} = (\mathcal{W}, \circ)$, *gde je* $\mathcal{F} = \left\{ f \mid f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \right\}$ *i* $\mathcal{W} = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$.

➥ ***Rešenje:*** Uočimo da je $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$.

(a) Primenom rezultata zadatka **4.4** za $A = \mathbb{R}^2$, imamo da je **F** asocijativan grupoid sa neutralnim elementom $i_{\mathbb{R}^2}$, pri čemu operacija $\circ$ nije komutativna u $\mathcal{F}$ - npr. za $f(x,y) = (2x+2y, 0)$ i $g(x,y) = (3x, 3x)$ je

$(f \circ g)(x,y) = (12x, 0) \neq (6x+6y, 6x+6y) = (g \circ f)(x,y),$

a inverzni elementi postoje samo za bijektivne $f \in \mathcal{F}$.

(b) Prvi način:

Uočimo da za sve $f_a, f_b \in \mathcal{W}$ (tj. sve $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) važi

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ (f_a \circ f_b)(x,y) = f_a(f_b(x,y)) = f_a(bx, bx) = (abx, abx),$

odnosno

$$f_a \circ f_b \overset{[*]}{=} f_{ab},$$

te kako za $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ važi $ab \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sledi da je **W** grupoid. Kompozicija funkcija je svakako asocijativna u $\mathcal{W}$, a jeste i komutativna jer za sve $f_a, f_b \in \mathcal{W}$ (tj. sve $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) važi $f_a \circ f_b \overset{[*]}{=} f_{ab} = f_{ba} \overset{[*]}{=} f_b \circ f_a$. Identička funkcija $i_{\mathbb{R}^2}$, međutim, ne pripada skupu $\mathcal{W}$, jer je $i_{\mathbb{R}^2}(x,y) = (x,y) \neq (ax, ax) = f_a(x,x)$ za svako $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. To ipak ne znači da u grupoidu **W** ne postoji neutralni element. Naime, neutralni element je $f_1 \in \mathcal{W}$, jer za sve $f_a \in \mathcal{W}$ važi $f_1 \circ f_a \overset{[*]}{=} f_a$ (a zbog komutativnosti i $f_a \circ f_1 = f_a$). Kako neutralni element nije identička funkcija, ni inverzni elementi, ako postoje, neće biti inverzne funkcije. Kako za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ važi $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, inverzni element za $f_a \in \mathcal{W}$ je funkcija $f_{\frac{1}{a}} \in \mathcal{W}$ jer je $f_a \circ f_{\frac{1}{a}} \overset{[*]}{=} f_1$ (a zbog komutativnosti i $f_{\frac{1}{a}} \circ f_a = f_1$). Dakle, **W** je komutativna grupa.

Drugi način:

Funkcija $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathcal{W}$ definisana sa $\varphi(a) = f_a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je izomorfizam iz $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ u **W** jer je očigledno bijektivna, i za sve $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ važi

$$\varphi(ab) = f_{ab} \overset{[*]}{=} f_a \circ f_b = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

Stoga iz činjenice da je $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ komutativna grupa, sledi da je i **W** komutativna grupa (vidi komentar na strani 54 i dodatak B). ☑

Zadatak 6.33 *Neka su a, b i c realni brojevi (parametri), i neka je*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \circledast y = ax + by + c.$$

Ispitati za koje je vrednosti parametara $a, b, c \in \mathbb{R}$ uređeni par $(\mathbb{R}, \circledast)$ grupa.

➥ ***Rešenje:*** Operacija $\circledast$ je očigledno zatvorena u skupu $\mathbb{R}$, tj. $(\mathbb{R}, \circledast)$ je grupoid za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$. Kako operacija $\circledast$ mora biti asocijativna, izrazi

$$(x \circledast y) \circledast z = (ax + by + c) \circledast z = a^2 x + aby + ac + bz + c,$$
$$x \circledast (y \circledast z) = x \circledast (ay + bz + c) = ax + aby + b^2 z + bc + c,$$

moraju biti jednaki za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$, a to je ispunjeno ako i samo ako je $a^2 = a$, $b^2 = b$ i $ac = bc$. Iz $a^2 = a$ i $b^2 = b$ sledi $a, b \in \{0, 1\}$. Za $a = 0$ bi na osnovu definicije operacije $\circledast$ važilo da je $x_1 \circledast y = x_2 \circledast y$ i za $x_1 \neq x_2$, što je nemoguće jer u grupi mora da važi (desni) zakon kancelacije (4.8). Isto važi i za parametar b, odakle sledi da mora biti $a = b = 1$. Za $a = b = 1$ i svako $c \in \mathbb{R}$ je operacija $\circledast$ asocijativna, i

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \circledast y = x + y + c.$$

Za ove vrednosti parametara, neutralni element je $-c$, jer je $(-c) \circledast x = (-c) + x + c = x$ i $x \circledast (-c) = x + (-c) + c = x$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Pri tome, za svaki realan broj x postoji njemu inverzni element $x' = -x - 2c$, jer važi $x \circledast (-x - 2c) = x + (-x - 2c) + c = -c$ i $(-x - 2c) \circledast x = (-x - 2c) + x + c = -c$.

Dakle, $(\mathbb{R}, \circledast)$ je grupa za $a = b = 1$ i svako $c \in \mathbb{R}$. ☑

Glava 7

Prsteni i polja

Definicija 7.1 *Neka je R neprazan skup, a $+$ i $\cdot$ binarne operacije skupa R. Uređena trojka $(R, +, \cdot)$ je **prsten** ako je*

- *$(R, +)$ komutativna grupa;*
- *$(R, \cdot)$ je polugrupa (asocijativan grupoid);*
- *operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na operaciju $+$, tj. za sve $x, y, z \in R$ važi*

  leva distributivnost: $x(y + z) = xy + xz$,

  desna distributivnost: $(y + z)x = yx + zx$.

☞ Ako je operacija $\cdot$ komutativna, pri proveri aksioma prstena je dovoljno proveriti samo npr. levu (ili desnu) distributivnost, jer iz nje i komutativnosti operacije $\cdot$ sledi i drugi distributivni zakon.

Definicija 7.2 *Prsten $(R, +, \cdot)$ je **komutativan** ako je operacija $\cdot$ komutativna. Neutralni element operacije $+$ se naziva **nula prstena**. **Jedinica** prstena $(R, +, \cdot)$, ako postoji, je neutralni element operacije $\cdot$, i u tom slučaju se $(R, +, \cdot)$ naziva **prsten s jedinicom**.*

Definicija 7.3 ***Domen integriteta** (ili **integralni domen**) je komutativan prsten $(R, +, \cdot)$ sa jedinicom u kome ne postoje delitelji nule, tj. u kome važi $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$, gde je sa 0 označena nula prstena, tj. neutralni element operacije $+$.*

☞ Svako polje je domen integriteta. Svaki konačan domen integriteta je i polje, ali za beskonačne to ne mora da važi.

✎ Uobičajeno je da se simbolom 0 označava nula prstena, a simbolom 1 jedinica prstena, ako postoji.

Definicija 7.4 *Prsten (odnosno polje) $\mathbf{R}_1 = (R_1, +, \cdot)$ je **potprsten** (odnosno **potpolje**) prstena (odnosno polja) $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ ako je R_1 neprazan podskup od R, a operacije $+$ i $\cdot$ iz $\mathbf{R}_1$ su restrikcije operacija $+$ i $\cdot$ iz $\mathbf{R}$.*

Definicija 7.5 *Neka su* $\mathbf{R}_1 = (R_1, +_1, \cdot_1)$ *i* $\mathbf{R}_2 = (R_2, +_2, \cdot_2)$ *prsteni (ili polja). Funkcija* $\varphi : R_1 \to R_2$ *je* **homomorfizam** *iz* $\mathbf{R}_1$ *u* $\mathbf{R}_2$ *ako za sve* $x, y \in R_1$ *važi*

$$\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y), \qquad \varphi(x \cdot_1 y) = \varphi(x) \cdot_2 \varphi(y).$$

Ako je funkcija φ *još i bijektivna, tada se ona naziva* **izomorfizam***.*

☞ Slično kao kod grupoida i Bulovih algebri, pri homomorfizmu se npr. nula prstena preslikava u nulu prstena, jedinica u jedinicu (ako postoje), a izomorfizam „prenosi" sve osobine iz jednog prstena (polja) u drugi.

Primer 7.1 *Primeri polja i prstena:*

- *Uređene trojke* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *su polja,* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *je potpolje od* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, *i* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *je potpolje od* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *je domen integriteta, i on je podprsten od* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Uređena trojka* $(Z_n, +_n, \cdot_n)$ *je komutativan prsten sa jedinicom, pri čemu je* $(Z_n, +_n, \cdot_n)$ *polje ako i samo ako je* n *prost broj.* ✔

Primer 7.2 *Uređena trojka* $(Z_4, +, \cdot)$ *(umesto oznaka* $+_4$ *i* $\cdot_4$ *je uobičajeno koristiti* $+$ *i* $\cdot$*), čije su Kejlijeve tablice*

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

jeste komutativan prsten sa jedinicom, ali nije polje, i nije ni domen integriteta. Naime, iz tablice operacije $\cdot$ *vidimo da je* $2 \cdot 2 = 0$. ✔

Zadatak 7.1 *Neka je* $R = \{a, b, c, d\}$, *i neka su na* R *operacije* $+$ *i* $\cdot$ *definisane Kejlijevim tablicama:*

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	a	a	a
d	a	b	c	d

Dokazati da je $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ *prsten.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Uređeni par $(R, +)$ je Klajnova komutativna grupa iz zadatka **6.5**, tj. izomorfna je sa grupom $(G, \cdot)$ iz zadatka **6.5** npr. preko izomorfizma $\begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$.

(b) Uređeni par $(R, \cdot)$ je polugrupa. Zatvorenost operacije $\cdot$ je očigledna, a asocijativni zakon $\forall x, y, z \in R,\ x(yz) = (xy)z$ možemo verifikovati diskusijom po promenljivoj x:

- ako je $x = a \vee x = c$, tada je $xt = a$ za sve $t \in R$, pa je $x(yz) = xt = a$ i $(xy)z = az = a$ za sve $y,z \in R$;
- ako je $x = b \vee x = d$, tada je $xt = t$ za sve $t \in R$, pa je $x(yz) = yz$ i $(xy)z = yz$ za sve $y,z \in R$.

(c) Levu distributivnost $\cdot$ prema $+$, tj. jednakost $\forall x,y,z \in R,\ x(y+z) = xy + xz$ možemo verifikovati opet diskusijom po promenljivoj x:

- ako je $x = a \vee x = c$, tada je $xt = a$ za sve $t \in R$, pa je $x(y+z) = xt = a$ i $xy + xz = a + a = a$ za sve $y,z \in R$;
- ako je $x = b \vee x = d$, tada je $xt = t$ za sve $t \in R$, pa je $x(y+z) = y+z$ i $xy + xz = y + z$ za sve $y,z \in R$.

Desnu distributivnost $\cdot$ prema $+$, tj. jednakost $\forall x,y,z \in R,\ (y+z)x = yx + zx$ verifikujemo proveravajući navedenu jednakost za sve moguće trojke $(x,y,z) \in R^3$ (npr. za $(x,y,z) = (b,c,c)$ je $(c+c)b = ab = a$ i $cb + cb = a + a = a$), ili npr. diskusijom po promenljivoj x (uraditi za vežbu), i tako zaključujemo da operacija $\cdot$ jeste distributivna prema operaciji $+$.

☞ Ovde smo levu i desnu distributivnost morali posebno dokazivati jer operacija $\cdot$ nije komutativna operacija. Ako bi $\cdot$ bila komutativna operacija, tada bi iz leve distributivnosti sledila i desna.

☞ Primetimo da $\mathbf{R}$ nije polje već samim tim što $(R \setminus \{a\}, \cdot)$ nije ni grupoid (gde je a nula prstena, tj. neutralni element za $+$). ☑

Zadatak 7.2 *Neka je $R = \{a,b,c\}$. Dopuniti, ako je moguće, date nepotpune Kejlijeve tablice operacija $+$ i $\cdot$ tako da $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$ bude polje.*

$+$	a	b	c
a			
b		c	
c	c		

$\cdot$	a	b	c
a			
b			c
c			

➥ ***Rešenje:***

(a) Elementi b i c ne mogu biti neutralni elementi operacije $+$ jer njihove vrste ne mogu biti jednake graničnoj vrsti. Prema tome, neutralni element može biti samo a, te zbog toga njegova vrsta i kolona moraju biti jednaki graničnoj vrsti odnosno koloni, pa delimično dopunjena tablica za $+$ mora izgledati ovako:

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	
c	c		

Pošto vrsta i kolona svakog elementa mora sadržati tačno jednom svaki element skupa R, sledi da mora biti $b + c = a$, a zatim $c + b = a$ i $c + c = b$. Tako dobijamo tablicu

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

za koju sada na poznati način proveravamo do kraja da zaista jeste tablica grupovne operacije (uraditi za vežbu).

(b) Pošto je $\mathbb{O} = a$ neutralni element sa operaciju $+$, tj. nula prstena, a za nulu prstena važi $\forall x \in R,\ x\mathbb{O} = \mathbb{O}x = \mathbb{O}$, sledi da delimično dopunjena tablica za $\cdot$ mora izgledati ovako:

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a		c
c	a		

.

Sada ostatak tablice popunjavamo vodeći računa da $(R \setminus \{a\}, \cdot) = (\{b, c\}, \cdot)$ mora biti komutativna grupa. Vidimo da c ne može biti neutralni element jer njegova kolona ne može biti jednaka graničnoj koloni, pa neutralni element mora biti b, čime dobijamo delimično dopunjenu tablicu:

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	

.

Konačno, pošto vrsta i kolona svakog elementa osim a mora sadržati tačno jednom svaki element skupa R, dobijamo tablicu

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

za koju sada na poznati način proveravamo do kraja da $(\{b, c\}, \cdot)$ jeste komutativna grupa.

(c) Proveravajući levi distributivni zakon $x(y+z) = xy + xz$ za sve uređene trojke $(x, y, z) \in R$ dokazujemo (uraditi za vežbu) distributivnost operacije $+$ prema operaciji $\cdot$, a zbog komutativnosti operacije $\cdot$ iz leve distributivnosti direktno sledi i desna distributivnost.

Prema tome, iz načina popunjavanja tablica vidimo da je ovo jedini način dopune do tablica operacija prstena. ☑

☞ Nakon dopunjavanja tablica na gore obrazloženi način, mogli smo dokazati da smo dobili polje i tako što primetimo da u tablicama nakon zamene a sa 0, b sa 1 i c sa 2 dobijamo tablice operacija polja $\mathbb{Z}_3 = (\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

,

što znači da je **R** izomorfno sa $\mathbb{Z}_3$. Formalno, za funkciju $\varphi : R \to \mathbb{Z}_3$ definisanu sa $\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se lako dokaže da je izomorfizam; naime, očigledno je φ bijektivna funkcija, i za sve $x, y \in R$ se neposredno proverava (uraditi za vežbu) da važi $\varphi(x+y) = \varphi(x) +_3 \varphi(y)$ i $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot_3 \varphi(y)$.

Zadatak 7.3

(a) *U polju* $\mathbb{Z}_7$ *izračunati* $3\left(2^3+5\right)^{-1}+6$.

(b) *U polju* $\mathbb{Z}_{11}$ *rešiti po* $x \in \mathbb{Z}_{11}$ *jednačinu*

$$J: \quad (2x+9)(3x+1)^{-1} = 7.$$

(c) *U polju* $\mathbb{Z}_5$ *rešiti po* $x \in \mathbb{Z}_5$ *jednačinu*

$$J: \quad x^2+4\left(x^{-1}+2x+1\right) = 3.$$

➥ ***Rešenje:***

(a) $3\left(2^3+5\right)^{-1}+6 = 3(1+5)^{-1}+6 = 3\cdot 6^{-1}+6 = 3\cdot 6+6 = 4+6 = 3.$

(b) Domen rešavanja jednačine je skup onih $x \in \mathbb{Z}_{11}$ za koje je $3x+1 \neq 0$, jer jedino za 0 ne postoji inverzni element u odnosu na množenje. Kako je

$3x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+1+10=10 \quad\Leftrightarrow\quad 3x=10 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot 3\cdot x = 4\cdot 10 \quad\Leftrightarrow\quad x=7,$

domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D}_J = \mathbb{Z}_{11} \setminus \{7\}$. Za sve $x \in \mathcal{D}_J$ je

$$\begin{aligned}&(2x+9)(3x+1)^{-1} = 7 \;/\cdot(3x+1)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+9 = 7(3x+1) \quad\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\quad 2x+9 = 10x+7 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+x+9+2 = 10x+x+7+2 \quad\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\quad 3x=9 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot 3x = 4\cdot 9 \quad\Leftrightarrow\quad x=3.\end{aligned}$$

Prema tome, $\mathcal{R}_J = \{3\}$.

(c) Domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D}_J = \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\} = \{1,2,3,4\}$ jer jedino za element 0 ne postoji inverzni element. Ako je funkcija $f : \mathcal{D}_J \to \mathbb{Z}_5$ definisana izrazom $f(x) = x^2+4\left(x^{-1}+2x+1\right)$, jednačina J je ekvivalentna sa $f(x)=3$. Izračunavajući redom vrednost funkcije f za elemente skupa $\mathcal{D}_J$ dobijamo

$$\begin{aligned}f(1) &= 1^2+4\left(1^{-1}+2\cdot 1+1\right) = 1+4(1+2+1) = 1+4\cdot 4 = 1+1 = 2 \neq 3,\\ f(2) &= 2^2+4\left(2^{-1}+2\cdot 2+1\right) = 4+4(3+4+1) = 4+4\cdot 3 = 4+2 = 1 \neq 3,\\ f(3) &= 3^2+4\left(3^{-1}+2\cdot 3+1\right) = 4+4(2+4+1) = 4+4\cdot 2 = 4+3 = 2 \neq 3,\\ f(4) &= 4^2+4\left(4^{-1}+2\cdot 4+1\right) = 1+4(4+4+1) = 1+4\cdot 4 = 1+1 = 0 \neq 3,\end{aligned}$$

te je $\mathcal{R}_J = \emptyset$, odnosno jednačina J nema rešenja. ☑

Zadatak 7.4 *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i neka su na* $\mathbb{R}^n$ *definisane operacije* $\oplus$ *i* $\odot$ *na sledeći način: za sve* $\forall(a_1,a_2,\dots,a_n),(b_1,b_2,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ *je*

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\dots,a_n)\oplus(b_1,b_2,\dots,b_n) &= (a_1+b_1, a_2+b_2,\dots,a_n+b_n),\\ (a_1,a_2,\dots,a_n)\odot(b_1,b_2,\dots,b_n) &= (a_1\cdot b_1, a_2\cdot b_2,\dots,a_n\cdot b_n).\end{aligned}$$

Ispitati strukturu $(\mathbb{R}^n,\oplus,\odot)$.

➥ ***Rešenje:*** Na osnovu zadatka **4.5** je $(\mathbb{R}^n,\oplus)$ komutativna grupa, a $(\mathbb{R}^n,\odot)$ je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom $(1,1,\dots,1)$. Distributivnost operacije $\odot$ prema operaciji $\oplus$ sledi iz definicija ovih operacija i distributivnosti množenja prema sabiranju realnih brojeva. Dakle, uređena trojka $(\mathbb{R}^n,\oplus,\odot)$ je komutativan prsten sa jedinicom. Pri tome je $(0,0,\dots,0)$ nula prstena. Međutim, $(\mathbb{R}^n,\oplus,\cdot)$ nije polje jer operacija $\cdot$ nije čak ni zatvorena na skupu $\mathbb{R}^n\setminus\{(0,0,\dots,0)\}$, odnosno $(\mathbb{R}^n,\oplus,\cdot)$ nije ni domen integriteta jer je npr. $(1,0,0,\dots,0)\cdot(0,1,0,\dots,0)=(0,0,0,\dots,0)$. ☑

☞ Ista se situacija dobije ako umesto $\mathbb{R}^n$ posmatramo skup svih npr. realnih nizova, i na odgovarajući način (po komponentama) definišemo operacije $\oplus$ i $\odot$. Naime, ako niz realnih brojeva označimo sa $\{a_n\}_{n\in N}$, sa $\mathcal{R}$ označimo skup svih nizova realnih brojeva, i za sve $\{a_n\}_{n\in N},\{b_n\}_{n\in N}\in\mathcal{R}$ definišemo

$$\{a_n\}_{n\in N}\oplus\{b_n\}_{n\in N}=\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbb{N}},\qquad \{a_n\}_{n\in N}\odot\{b_n\}_{n\in N}=\{a_n\cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

struktura $(\mathcal{R},\oplus,\odot)$ ima iste osobine kao $(\mathbb{R}^n,\oplus,\odot)$, neutralni element za $\oplus$ je nula-niz, itd.

☞ Ako umesto polja realnih brojeva pođemo od proizvoljnog polja $\mathbf{F}=(F,+,\cdot)$, i na skupu F^n (za neko $n\in\mathbb{N}$) ili na skupu $\mathcal{F}$ svih nizova elemenata polje $\mathbf{F}$ definišemo operacije $\oplus$ i $\odot$ na isti način kao u prethodnom zadatku, na isti način dobijamo da strukture $(F^n,\oplus,\odot)$ i $(\mathcal{F},\oplus,\odot)$ imaju iste osobine kao $(\mathbb{R}^n,\oplus,\odot)$ i $(\mathcal{R},\oplus,\odot)$.

Zadatak 7.5 *Neka je* $\mathbf{R}=(R,+,\cdot)$ *proizvoljan prsten, neka je* $F=\{f\mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$, *i neka su* $\oplus$ *i* $\odot$ *binarne operacije skupa* F *definisane na sledeći način:*

$$\forall f,g\in F,\quad \begin{array}{l}\forall x\in A,\ (f\oplus g)(x)=f(x)+g(x),\\ \forall x\in A,\ (f\odot g)(x)=f(x)\cdot g(x).\end{array}$$

Dokazati:

(a) $\mathcal{F}=(F,\oplus,\odot)$ *je prsten;*

(b) *ako prsten* $\mathbf{R}$ *ima jedinicu, tada i prsten* $\mathcal{F}$ *ima jedinicu;*

(c) *ako je prsten* $\mathbf{R}$ *komutativan, tada je i prsten* $\mathcal{F}$ *komutativan.*

Ako je $\mathbf{R}$ *polje, da li tada i* $\mathcal{F}$ *mora biti polje?*

➥ ***Rešenje:***

(a) Označimo sa 0 neutralni element, a sa $-t$ inverzni element elementa $t\in R$ u grupi $(R,+)$.

(a.1) Uređeni par $(F,\oplus)$ je Abelova grupa što što dokazujemo na skoro isti način kao u zadatku **??**.

∗ Zatvorenost operacije (tj. operacija $\oplus$ je „dobro definisana”): neka je $f,g\in F$; očigledno je $f\oplus g:R\to R$ tj. $f\oplus g\in F$ jer za sve $x\in R$ važi $(f\oplus g)(x)=\underbrace{f(x)}_{\in R}+\underbrace{g(x)}_{\in R}\in R$.

* Asocijativnost operacije $\oplus$ sledi iz asocijativnosti operacije $+$; naime, za proizvoljne $f,g,h\in F$ važi
$f\oplus(g\oplus h)=(f\oplus g)\oplus h \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (f\oplus(g\oplus h))(x)=((f\oplus g)\oplus h)(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)+(g\oplus h)(x)=(f\oplus g)(x)+h(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x)$,
a poslednji iskaz je očigledno tačan ($f(x),g(x),h(x)\in R$).
* Neutralni element je funkcija $\mathbb{O}(x)=0$, $x\in R$ (očigledno $\mathbb{O}\in F$), jer za svako $f\in F$ važi
$f\oplus\mathbb{O}=\mathbb{O}\oplus f=f \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (f\oplus\mathbb{O})(x)=(\mathbb{O}\oplus f)(x)=f(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)+\mathbb{O}(x)=\mathbb{O}(x)+f(x)=f(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)+0=0+f(x)=f(x)$,
a poslednji iskaz je očigledno tačan za svako $t=f(x)\in R$.
* Za proizvoljno $f\in F$, inverzni element je funkcija u oznaci $\ominus f$, definisana sa $\ominus f(x)=-f(x)$, $x\in R$; očigledno $\ominus f\in F$ i važi
$(\ominus f)\oplus f=f\oplus(\ominus f)=\mathbb{O} \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ ((\ominus f)\oplus f)(x)=(f\oplus(\ominus f))(x)=\mathbb{O}(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (\ominus f)(x)+f(x)=f(x)+(\ominus f)(x)=0 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (-f(x))+f(x)=f(x)+(-f(x))=f(x)$,
a poslednji iskaz je očigledno tačan za svako $t=f(x)\in R$.
* Komutativnost operacije $\oplus$ sledi iz komutativnosti operacije $+$; naime, za proizvoljne $f,g\in F$ važi
$f\oplus g=g\oplus f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (f\oplus g)(x)=(g\oplus f)(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$,
a poslednji iskaz je očigledno tačan za sve $t=f(x)\in R$ i $w=g(x)\in R$.

(a.2) Uređeni par $(R,\odot)$ je polugrupa:

* zatvorenost operacije (tj. operacija $\odot$ je „dobro definisana") jer za proizvoljne $f,g\in F$ očigledno važi $f\odot g:R\to R$ (tj. $f\odot g\in F$), jer za sve $x\in R$ imamo da je $(f\odot g)(x)=\underbrace{f(x)}_{\in R}\cdot\underbrace{g(x)}_{\in R}\in R$.
* Asocijativnost operacije $\odot$ sledi iz asocijativnosti operacije $\cdot$, jer za proizvoljne $f,g,h\in\mathcal{F}$ važi
$f\odot(g\odot h)=(f\odot g)\odot h \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (f\odot(g\odot h))(x)=((f\odot g)\odot h)(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)\cdot(g\odot h)(x)=(f\odot g)(x)\cdot h(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))=(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x)$,
a poslednji iskaz je očigledno tačan za sve $f(x),g(x),h(x)\in R$.

(a.3) Operacija $\odot$ je distributivna prema operaciji $\oplus$.

* leva distributivnost sledi iz leve distributivnosti operacije $+$ prema operaciji $\cdot$, jer za sve $f,g,h\in\mathcal{F}$ važi
$f\odot(g\oplus h)=(f\odot g)\oplus(f\odot h) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ (f\odot(g\oplus h))(x)=((f\odot g)\oplus(f\odot h))(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)\cdot(g\oplus h)(x)=(f\odot g)(x)+(f\odot h)(x) \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall x\in R,\ f(x)\cdot(g(x)+h(x))=f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x)$,

a poslednji iskaz je očigledno tačan za sve $f(x), g(x), h(x) \in R$.

* desna distributivnost se dokazuje na isti način kao leva (ispisati dokaz za vežbu).

(b) Obeležimo sa 1 neutralni element za operaciju $\cdot$ u **R**, i dokažimo da postoji neutralni element $\mathbb{1} \in F$ polugrupe $(F, \odot)$. Važi

$$\forall f \in F,\ f \odot \mathbb{1} = \mathbb{1} \odot f = f \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \forall x \in R,\ (f \odot \mathbb{1})(x) = (\mathbb{1} \odot f)(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \forall x \in R,\ f(x) \cdot \mathbb{1}(x) = \mathbb{1}(x) \cdot f(x) = f(x),$$

a poslednji iskaz je očigledno tačan za funkciju $\mathbb{1}(x) = 1$, $x \in R$ (očigledno $\mathbb{1} \in F$).

(c) Komutativnost operacije $\odot$ sledi iz komutativnosti operacije $\cdot$: za proizvoljne $f, g \in F$ važi

$$f \odot g = g \odot f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in R,\ (f \odot g)(x) = (g \odot f)(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in R,\ f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x),$$

a poslednji iskaz je očigledno tačan za sve $t = f(x) \in R$ i $w = g(x) \in R$.

Odgovor na poslednje pitanje je negativan, što ilustruje sledeći primer. Neka je **R** polje realnih brojeva (sa običnim sabiranjem i množenjem brojeva); na osnovu prethodnih dokaza je uređena trojka $\mathcal{F} = (F, \oplus, \odot)$ komutativan prsten sa jedinicom, ali nije polje, jer na primer za funkcije $f, g \in F$ definisane sa $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{za } x = 6 \\ 0 & , \quad \text{za } x \neq 6 \end{cases}$ i $g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \text{za } x = 28 \\ 0 & , \quad \text{za } x \neq 28 \end{cases}$ važi $f \odot g = \mathbb{0}$, pri čemu je $f \neq \mathbb{0}$ i $g \neq \mathbb{0}$ (gde je $\mathbb{0}$ „nula funkcija”). Dakle, $\mathcal{F}$ nije domen integriteta (navedene funkcije f i g su delitelji nule), pa nije ni polje. ☑

Zadatak 7.6 *Neka je je* $\mathbf{P} = (P, +, \cdot)$ *prsten, i neka je u skupu* P^3 *definisana je operacija* $\heartsuit$ *na sledeći način:*

$$(a_1, a_2, a_3) \heartsuit (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Da li je $\left(P^3, \heartsuit\right)$ *grupa?*

➥ ***Rešenje:*** $\left(P^3, \heartsuit\right)$ je grupoid jer je operacija $\heartsuit$ definisana preko operacija + i $\cdot$ prstena **P**. Zakon asocijativnosti važi jer je

$$(a_1, a_2, a_3) \heartsuit ((b_1, b_2, b_3) \heartsuit (c_1, c_2, c_3)) =$$
$$= (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - a_1 c_2 - a_2 c_1) =$$
$$= ((a_1, a_2, a_3) \heartsuit (b_1, b_2, b_3)) \heartsuit (c_1, c_2, c_3).$$

Neutralni element je $(0,0,0)$, gde je $0 \in P$ neutralni element za operaciju + prstena **P**; važi naime

$$(a_1, a_2, a_3) \heartsuit (0,0,0) = (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0 - a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0) = (a_1, a_2, a_3),$$
$$(0,0,0) \heartsuit (a_1, a_2, a_3) = (0 + a_1, 0 + a_2, 0 + a_3 - 0 \cdot a_2 - 0 \cdot a_1) = (a_1, a_2, a_3).$$

Inverzni element za (a_1, a_2, a_3) je $(-a_1, -a_2, -a_3 - a_1 a_2 - a_2 a_1)$ jer je

$(a_1,a_2,a_3)\heartsuit(-a_1,-a_2,-a_3-a_1a_2-a_2a_1) =$
$= (a_1-a_1,a_2-a_2,a_3-a_3-a_1a_2-a_2a_1+a_1a_2+a_2a_1) = (0,0,0),$
$(-a_1,-a_2,-a_3-a_1a_2-a_2a_1)\heartsuit(a_1,a_2,a_3) =$
$= (-a_1+a_1,-a_2+a_2,-a_3-a_1a_2-a_2a_1+a_3+a_1a_2+a_2a_1) = (0,0,0).$
Dakle, $\left(P^3,\heartsuit\right)$ je grupa za proizvoljni prsten **P**. ☑

Zadatak 7.7 *U skupu $\mathbb{Q}^2$ definisane su operacije $+$ i $*$ na sledeći način:*

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d), \qquad (a,b)*(c,d) = (ac+7bd,ad+bc).$$

Ispitati strukturu $Q = \left(\mathbb{Q}^2,+,*\right)$.

➥ ***Rešenje:***

- Na osnovu zadatka **4.5** je $\left(\mathbb{Q}^2,+\right)$ je Abelova grupa jer je $(\mathbb{Q},+)$ Abelova grupa. Neutralni element ove Abelove grupe je $(0,0)$.
- U $\left(\mathbb{Q}^2,*\right)$ je operacija $*$ zatvorena jer su zbir i proizvod racionalnih brojeva $a,b,c,d,7$ racionalnih brojeva. Operacija $*$ je i komutativna i asocijativna jer za sve $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Q}^2$ važi

  $(a,b)*(c,d) = (ac+7bd,ad+bc) = (ca+7db,cb+da) = (c,d)*(a,b),$

  $(a,b)*((c,d)*(e,f)) = (a,b)*(ce+7df,cf+de) =$
  $= (ace+7adf+7bcf+7bde,acf+ade+bce+7bdf) =$
  $= (ace+7bde+7adf+7bcf,acf+7bdf+ade+bce) =$
  $= (ac+7bd,ad+bc)*(e,f) = ((a,b)*(c,d))*(e,f).$

  Neutralni element je $(1,0)$ je za sve $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ važi

  $(1,0)*(a,b) = (1\cdot a+7\cdot 0\cdot b,1\cdot b+0\cdot a) = (a,b),$

  i analogno $(a,b)*(1,0) = (a,b)$. Prema tome, $\left(\mathbb{Q}^2,*\right)$ je komutativna polugrupa sa neutralnim elementom. Pri tome svaki, element $(a,b)\neq(0,0)$ ima inverzni element $(a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2-7b^2},\dfrac{-b}{a^2-7b^2}\right)\in\mathbb{Q}^2\setminus\{(0,0)\}$, jer se lako izračunava da je $(a,b)*\left(\dfrac{a}{a^2-7b^2},\dfrac{-b}{a^2-7b^2}\right) = \left(\dfrac{a}{a^2-7b^2},\dfrac{-b}{a^2-7b^2}\right)*(a,b) = (1,0)$, i pri tome za $(a,b)\neq(0,0)$ važi $a^2-7b^2\neq 0$ (jer su a i b racionalni, a $\sqrt{7}$ je iracionalan broj, te bi, ako pretpostavimo suprotno, zbog $a^2-7b^2=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{7}b$ dobili da je $a=\pm\sqrt{7}b$ iracionalan broj - dokazati za vežbu da je proizvod racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj). Prema tome, $\left(\mathbb{Q}^2\setminus\{(0,0)\},*\right)$ je takođe Abelova grupa.
- Važi leva distributivnost $*$ prema $+$ jer za sve $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Q}^2$ imamo

  $(a,b)*((c,d)+(e,f)) = (a,b)*(c+e,d+f) =$
  $= (a(c+e)+7b(d+f),a(d+f)+b(c+e)) =$
  $= (ac+7bd,ad+bc)+(ae+7bf,af+be) = ((a,b)*(c,d))+((a,b)*(e,f)),$

  a zbog komutativnosti operacije $*$, iz leve distributivnosti sledi i desna.

Dakle, struktura Q je polje. ☑

Zadatak 7.8 *Neka je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup nepraznog skupa A. Dokazati da je tada $(\mathcal{P}(A),+,\cdot)$ komutativan prsten sa jedinicom, gde su operacije + i $\cdot$ definisane sa:*

$$P+Q=\overline{P}Q\cup P\overline{Q},\qquad PQ=P\cdot Q=P\cap Q$$

za sve P i Q iz $\mathcal{P}(A)$.

➥ ***Rešenje:***

- Zatvorenost operacije + na skupu $\mathcal{P}(A)$ sledi iz zatvorenosti operacija unije, preseka i komplementa. Asocijativnost sledi iz

  $$\begin{aligned}P+(Q+R)&=P+\left(\overline{Q}R\cup Q\overline{R}\right)=\overline{P}\left(\overline{Q}R\cup Q\overline{R}\right)\cup P\overline{\left(\overline{Q}R\cup Q\overline{R}\right)}=\\&=\overline{P}\,\overline{Q}R\cup\overline{P}Q\overline{R}\cup P\Big(\left(Q\cup\overline{R}\right)\left(\overline{Q}\cup R\right)\Big)=\overline{P}\,\overline{Q}R\cup\overline{P}Q\overline{R}\cup P\left(QR\cup\overline{Q}\,\overline{R}\right)=\\&=\overline{P}\,\overline{Q}R\cup\overline{P}Q\overline{R}\cup PQR\cup P\overline{Q}\,\overline{R},\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}(P+Q)+R&=\left(\overline{P}Q\cup P\overline{Q}\right)+R=\overline{\left(\overline{P}Q\cup P\overline{Q}\right)}R\cup\left(\overline{P}Q\cup P\overline{Q}\right)\overline{R}=\\&=\Big(\left(P\cup\overline{Q}\right)\left(\overline{P}\cup Q\right)\Big)R\cup\overline{P}Q\overline{R}\cup P\overline{Q}\,\overline{R}=\left(PQ\cup\overline{P}\,\overline{Q}\right)R\cup\overline{P}Q\overline{R}\cup P\overline{Q}\,\overline{R}=\\&=PQR\cup\overline{P}\,\overline{Q}R\cup\overline{P}Q\overline{R}\cup P\overline{Q}\,\overline{R}.\end{aligned}$$

  Neutralni elemenat je $\emptyset$ jer je

  $$\emptyset+P=\overline{\emptyset}P\cup\emptyset\overline{P}=AP\cup\emptyset=P,$$

  i analogno $P+\emptyset=P$. Svaki element $P\in\mathcal{P}(A)$ je sam sebi inverzan (proveriti za vežbu), a komutativnost operacije + sledi iz komutativnosti operacija $\cup$ i $\cap$ (proveriti za vežbu).

  Dakle, uređeni par $(\mathcal{P}(A),+)$ je Abelova grupa.

- Uređeni par $(\mathcal{P}(A),\cdot)$ je komutativna polugrupa jer je poznato da je operacija $\cdot$ tj. $\cap$ zatvorena, asocijativna i komutativna u $\mathcal{P}(A)$. Neutralni elemenat je skup A (proveriti za vežbu).

- Važi leva distributivnost $\cdot$ prema + jer za sve $P,Q,R\in\mathcal{P}(A)$ imamo

  $$P(Q+R)=P\left(\overline{Q}R\cup Q\overline{R}\right)=P\overline{Q}R\cup PQ\overline{R},$$

  $$\begin{aligned}PQ+PR&=\overline{PQ}PR\cup PQ\overline{PR}=\left(\overline{P}\cup\overline{Q}\right)PR\cup PQ\left(\overline{P}\cup\overline{R}\right)=\\&=\overline{P}PR\cup P\overline{Q}R\cup PQ\overline{R}\cup PQ\overline{P}=\emptyset\cup P\overline{Q}R\cup PQ\overline{R}\cup\emptyset=P\overline{Q}R\cup PQ\overline{R},\end{aligned}$$

  a zbog komutativnosti operacije $\cdot$ tj. $\cap$, iz leve distributivnosti sledi i desna. ☑

Glava 8

Kompleksni brojevi i polinomi

Kompleksni brojevi su uređeni parovi realnih brojeva, pri čemu je uobičajeno da kompleksni broj $z = (a, b)$ zapisujemo u tzv. ***algebarskom obliku*** $z = a + \mathbb{i}b$, gde je $\mathbb{i}$ ***imaginarna jedinica***. Svakom kompleksnom broju $z = a + \mathbb{i}b$ u ***kompleksnoj ravni*** jednoznačno odgovara vektor $\overrightarrow{Oz}$ čija je početna tačka u koordinatnom početku, a krajnja tačka ima koordinate (a, b). U kompleksnoj ravi je uobičajeno da umesto x-ose i y-ose koristimo redom nazive ***realna osa*** i ***imaginarna osa***.

Definicija 8.1 *Za kompleksni broj $z = a + \mathbb{i}b$ definišemo*

- ***realni deo****:* $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) \overset{\mathrm{def}}{=} a$*,*
- ***imaginarni deo****:* $\mathcal{I}\mathrm{m}(z) \overset{\mathrm{def}}{=} b$*,*
- ***konjugovani kompleksni broj****:* $\overline{z} \overset{\mathrm{def}}{=} a - \mathbb{i}b$*,*
- ***moduo****:* $|z| \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{a^2 + b^2}$*,*
- ***argument****:* $\arg z \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & , \quad a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & , \quad a < 0 \wedge b \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a} & , \quad a < 0 \wedge b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad a = 0 \wedge b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad a = 0 \wedge b < 0 \end{cases}.$

Argument kompleksnog broja 0 se ne definiše, a argument kompleksnog broja različitog od nule je broj iz intervala $(-\pi, \pi]$, tzv. ***intervala glavne vrednosti argumenta kompleksnog broja***.

☞ Svaki od prethodno navedenih pojmova ima svoju geometrijsku interpretaciju u kompleksnoj ravni. Naime, za kompleksni broj $z = a + \mathbb{i}b$ i njemu odgovarajući vektor $\overrightarrow{0z}$ je:

➥ realni deo a je projekcija tačke z na realnu osu;

➥ za imaginarni deo b je tačka $\mathbb{i}b$ projekcija tačke z na imaginarnu osu osu;

- konjugovani kompleksni broj $\overline{z} = a - \mathbb{i}b$ je tačka koja je osnosimetrična tački z u odnosu na realnu osu;
- moduo kompleksnog broja z je intenzitet vektora $\overrightarrow{0z}$;
- argument kompleksnog broja z je mera orijentisanog ugla kojeg zaklapaju pozitivni deo realne ose i vektor $\overrightarrow{0z}$.

☞ Uočimo da za kompleksne brojeve z i $\overline{z}$ važi

$$|z| = |\overline{z}|, \qquad \arg z = -\arg \overline{z}. \tag{8.1}$$

Osim u algebarskom vektorskom obliku, kompleksne brojeve po potrebi možemo predstavljati i u ***Ojlerovom*** ili ***trigonometrijskom obliku***:

$$z = \underbrace{a + \mathbb{i}b}_{\substack{\text{algebarski}\\ \text{oblik}}} = \underbrace{\overrightarrow{0z}}_{\substack{\text{vektorski}\\ \text{oblik}}} = \underbrace{\rho e^{\mathbb{i}\varphi}}_{\substack{\text{Ojlerov}\\ \text{oblik}}} = \underbrace{\rho(\cos\varphi + \mathbb{i}\sin\varphi)}_{\substack{\text{trigonometrijski}\\ \text{oblik}}}$$

gde je

$$\begin{array}{lll} \rho = |z| = \left|\overrightarrow{0z}\right|, & a = \rho\cos\varphi, & \rho \in [0,\infty),\ \ \varphi \in (-\pi,\pi], \\ \varphi = \arg z = \sphericalangle\left(\mathcal{R}\mathrm{e}^{+}, \overrightarrow{0z}\right), & b = \rho\sin\varphi, & a, b \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{8.2}$$

☞ Uočimo da za kompleksne brojeve $z_1 = x_1 + \mathbb{i}y_1 = \rho_1 e^{\mathbb{i}\varphi_1}$ i $z_2 = x_2 + \mathbb{i}y_2 = \rho_2 e^{\mathbb{i}\varphi_2}$ (različite od 0) važi

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 = x_2 \ \wedge\ y_1 = y_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\rho_1 = \rho_2 \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi).$$

Osnovne operacije u skupu kompleksnih brojeva i njihove geometrijske interpretacije: neka je $z = x + \mathbb{i}y = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$ i $w = a + \mathbb{i}b = re^{\mathbb{i}\psi}$, i neka je $n \in \mathbb{N}$.

[±] $z \pm w = (x \pm a) + \mathbb{i}(y \pm b)$,

tj. $\quad \mathcal{R}\mathrm{e}(z \pm w) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) \pm \mathcal{R}\mathrm{e}(w)$,
$\quad\ \ \mathcal{I}\mathrm{m}(z \pm w) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z) \pm \mathcal{I}\mathrm{m}(w)$.

Uočimo da se zbog prethodno navedenih jednakosti kompleksni brojevi sabiraju kao vektori (po pravilu paralelograma), tj. ako je $u = z \pm w$, tada je $\overrightarrow{0u} = \overrightarrow{0z} \pm \overrightarrow{0w}$. Kompleksne brojeve nije zgodno sabirati u Ojlerovom obliku (ako su zadani u Ojlerovom ili trigonometrijskom obliku, tada ih najpre pretvaramo u algebarski oblik a zatim sabiramo).

[$\cdot$] $zw = (xa - yb) + \mathbb{i}(xb + ya) = \rho r e^{\mathbb{i}(\varphi+\psi)}$,

tj. $\quad \mathcal{R}\mathrm{e}(zw) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w) - \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w), \quad |zw| = |z||w|,$

$\mathcal{I}\mathrm{m}(zw) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w) + \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w), \quad \arg zw = \arg z + \arg w.$

Posmatrajmo slučaj kada se broj z množi brojem modula 1: $u = ze^{\mathbb{i}\alpha} = \rho e^{\mathbb{i}(\varphi+\alpha)}$; iz $|u| = |z|$ sledi da z i u pripadaju istoj kružnici $\mathsf{K}(0,\rho)$, a iz $\arg u = \arg z + \alpha$ sledi da je $\sphericalangle\left(\overrightarrow{0z}, \overrightarrow{0u}\right) = \alpha$, odnosno kompleksni broj u je dobijen rotacijom $\rho_{0,\alpha}$ kompleksnog broja z oko koordinatnog početka za ugao α. Dakle

$$\rho_{0,\alpha}(z) = u \quad \Leftrightarrow \quad u = ze^{\mathbb{i}\alpha}. \tag{8.3}$$

Posmatrajmo sada rotaciju $\rho_{t,\alpha}$ u kompleksnoj ravni oko neke tačke t za ugao α. Kako je $\overrightarrow{tz} = \overrightarrow{0z} - \overrightarrow{0t} = \overrightarrow{0(z-t)}$ i $\overrightarrow{tu} = \overrightarrow{0u} - \overrightarrow{0t} = \overrightarrow{0(u-t)}$, sledi

$$\rho_{t,\alpha}(z) = u \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{t,\alpha}\left(\overrightarrow{tz}\right) = \overrightarrow{tu} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{0,\alpha}(z-t) = u - t \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad u - t = (z-t)e^{\mathbb{i}\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad u = t + (z-t)e^{\mathbb{i}\alpha}.$$

Dakle, ako je tačka u dobijena rotacijom tačke z oko tačke t za ugao α, tada je

$$u = t + (z-t)e^{\mathbb{i}\alpha}. \tag{8.4}$$

[$/$] $\dfrac{z}{w} = \dfrac{x + \mathbb{i}y}{a + \mathbb{i}b} \cdot \dfrac{a - \mathbb{i}b}{a - \mathbb{i}b} = \dfrac{xa + yb}{a^2 + b^2} + \mathbb{i}\dfrac{ya - xb}{a^2 + b^2} = \dfrac{\rho}{r} e^{\mathbb{i}(\varphi-\psi)}$,

tj. $\quad \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w) + \mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w)}{|w|^2}, \quad \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|},$

$\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\mathcal{I}\mathrm{m}(z)\mathcal{R}\mathrm{e}(w) - \mathcal{R}\mathrm{e}(z)\mathcal{I}\mathrm{m}(w)}{|w|^2}, \quad \arg\dfrac{z}{w} = \arg z - \arg w.$

[^{n}] Stepenovati kompleksni broj u algebarskom obliku možemo primenom binomnog obrasca

$$z^n = (x + \mathbb{i}y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \mathbb{i}^{n-k},$$

gde je

$$\mathbb{i}^m = \begin{cases} 1 & , \text{ ako je } m = 4j \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \mathbb{i} & , \text{ ako je } m = 4j+1 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -1 & , \text{ ako je } m = 4j+2 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ -\mathbb{i} & , \text{ ako je } m = 4j+3 \text{ za neko } j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}.$$

Međutim, kompleksne brojeve je mnogo lakše stepenovati kada su u Ojlerovom obliku[1]:

$$z^n = \rho^n e^{\mathbb{i}n\varphi}, \quad \text{tj.} \quad |z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n\arg z, \tag{8.5}$$

odnosno

$$z^n = \rho^n(\cos(n\varphi) + \mathbb{i}\sin(n\varphi)).$$

[$\sqrt[n]{\ }$] Svaka od prethodnih operacija u skupu $\mathbb{R}$ je restrikcija dotične operacije u skupu $\mathbb{C}$. Sa korenovanjem to nije slučaj, iako koristimo istu oznaku $\sqrt[n]{\ }$ u oba skupa[2]. U skupu kompleksnih brojeva je korenovanje definisano sa

[1] Po potrebi ćemo ih, radi stepenovanja, pretvarati iz algebarskog u Ojlerov oblik.

[2] U zadacima će ili biti eksplicitno naglašeno, ili će iz konteksta biti jasno da li $\sqrt[n]{\ }$ predstavlja korenovanje u $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

$$\sqrt[n]{z} = u \quad \Leftrightarrow \quad z = u^n, \tag{8.6}$$

tj. $\sqrt[n]{z}$ je promenljiva koja uzima vrednosti iz skupa rešenja jednačine $z = u^n$ po nepoznatoj u, za dati kompleksni broj z. Radi jednostavnosti, često kažemo da je $\sqrt[n]{z}$ skup rešenja jednačine $z = u^n$ po $u \in C$.

Kao i kod množenja, delenja i stepenovanja, vrednosti $\sqrt[n]{z}$ ćemo izračunavati kada je broj z zadan u Ojlerovom obliku. Za $z = 0$ je $\sqrt[n]{0} = 0$, a za $z \neq 0$ je

$$u_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \tag{8.7}$$

tj. $\quad \left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg \sqrt[n]{z} \in \left\{ \dfrac{\arg z}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \;\middle|\; k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\},$

gde je $\sqrt[n]{\rho}$ realni koren nenegativnog realnog broja ρ. Umesto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, za vrednosti „brojača” k možemo uzeti bilo kojih uzastopnih n vrednosti, tj. $\{m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1\}$, i često ćemo početno m birati tako svaki od uglova $\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ upadne u interval glavne vrednosti argumenta.

Kao što vidimo, sve vrednosti $\sqrt[n]{z}$ imaju isti moduo $\sqrt[n]{\rho}$, tj. sve pripadaju kružnici $\mathsf{K}\left(0, \sqrt[n]{\rho}\right)$. Takođe uočimo da za $k = j$ i $k = j+1$ dobijamo uglove (argumente) koji se razlikuju za $\dfrac{2\pi}{n}$, tj. ugao između svake dve „susedne” vrednosti $\sqrt[n]{z}$ je isti ugao $\dfrac{2\pi}{n}$ (n-ti deo punog kruga). Odatle zaključujemo da se svaka od vrednosti u_k promenljive $\sqrt[n]{z}$ može dobiti rotacijom oko koordinatnog početka vrednosti u_{k-1} za ugao $\dfrac{2\pi}{n}$, a u_{k-1} se može dobiti rotacijom oko koordinatnog početka vrednosti u_k za ugao $-\dfrac{2\pi}{n}$, tj.

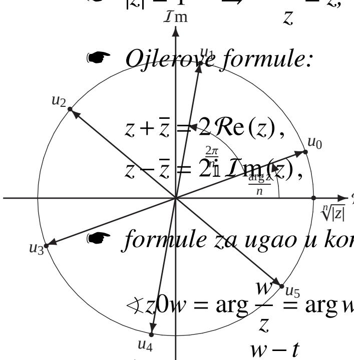
$$\begin{aligned} u_k &= u_{k-1} e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}, \\ u_{k-1} &= u_k e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}, \end{aligned} \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{8.8}$$

To znači da vrednosti $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ čine temena pravilnog n-tougla sa centrom opisane kružnice (težištem) u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt[n]{\rho}$, pri čemu je $\arg u_0 = \dfrac{\arg z}{n}$. Na primer, za $z = 64 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ i $n = 6$ je $\sqrt[6]{|z|} = 2$, $\arg u_0 = \dfrac{\arg z}{6} = \dfrac{\pi}{18}$ i $\dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$, te su vrednosti u_k u kompleksnoj ravni raspoređene kao na slici

☞ Uočimo da je kompleksne brojeve najzgodnije sabirati kada su u algebarskom obliku, a množiti, deliti, stepenovati i korenovati kada su u Ojlerovom obliku.

Teorema 8.1 (Neke osobine u skupu kompleksnih brojeva) *Neka su z, w i t proizvoljni kompleksni brojevi.*

- $|z+w| \le |z| + |w|, \quad |zw| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|},$ (8.9)
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2,$ (8.10)
- $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}},$ (8.11)
- $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{z} = \overline{z},$ (8.12)



- *Ojlerove formule:*

$$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}\mathrm{e}(z), \qquad \cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2},$$
$$z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z), \quad tj. \quad \sin\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}, \tag{8.13}$$

- *formule za ugao u kompleksnoj ravni:*

$$\sphericalangle z0w = \arg\frac{w}{z} = \arg w - \arg z,$$
$$\sphericalangle ztw = \arg\frac{w-t}{z-t} = \arg(w-t) - \arg(z-t), \tag{8.14}$$

- *za* $\varphi \in (-\pi, \pi]$ *je* $\dfrac{\varphi}{2} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$*, te je* (8.15)

  - $1 + e^{\mathrm{i}\varphi} = e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right) = 2\cos\dfrac{\varphi}{2} e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}},$

    gde je $2\cos\dfrac{\varphi}{2} \ge 0$*, tj.* $\left|1 + e^{\mathrm{i}\varphi}\right| = 2\cos\frac{\varphi}{2},$

- $1-e^{\mathrm{i}\varphi}=e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right)=2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)}$,

  gde je $\sin\frac{\varphi}{2}\geq 0$ *za* $\frac{\varphi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *(odnosno* $\varphi\in[0,\pi]$*), te je u tom slučaju* $\left|1-e^{\mathrm{i}\varphi}\right|=2\sin\frac{\varphi}{2}$*, a za* $\frac{\varphi}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ *(odnosno* $\varphi\in(-\pi,0)$*) je* $\sin\frac{\varphi}{2}<0$*, te je u tom slučaju (koristimo* $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$*)*

  $$1-e^{\mathrm{i}\varphi}=2\sin\frac{\varphi}{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)}=-2\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)}=$$
  $$=2\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)}e^{-\mathrm{i}\pi}=2\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)},$$

  pri čemu je $2\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)\geq 0$ *i* $\left|1-e^{\mathrm{i}\varphi}\right|=2\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$.

☛ *ako je u kompleksnoj ravni tačka t sredina duži zw, tada iz* $\overrightarrow{zt}=\overrightarrow{tw}$*, odnosno* $t-z=w-t$ *sledi da je*

$$t=\frac{1}{2}(z+w). \tag{8.16}$$

Primer 8.1 *Označimo kompleksne brojeve* $z=-2+2\mathrm{i}$, $w=3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ *i* $u=\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

❈ *Korišćenjem formula* (8.2) *dobijamo*

$$z=2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}},\quad w=-3\mathrm{i},\quad u=2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

❈ $\mathcal{R}\mathrm{e}(z)=-2,\quad \mathcal{R}\mathrm{e}(w)=0,\quad \mathcal{R}\mathrm{e}(u)=\sqrt{3},$

$\mathcal{I}\mathrm{m}(z)=2,\quad \mathcal{I}\mathrm{m}(w)=-3,\quad \mathcal{I}\mathrm{m}(u)=-1.$

❈ $\overline{z}=-2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}},\quad \overline{w}=3\mathrm{i}=3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}},\quad \overline{u}=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$

❈ $|z|=2\sqrt{2},\quad |w|=9,\quad |u|=2,\quad \arg z=\frac{3\pi}{4},\quad \arg w=-\frac{\pi}{2},\quad \arg u=-\frac{\pi}{6}.$

❈ $z+w=-2-\mathrm{i},\quad z-w=-2+5\mathrm{i},\quad z+u=\sqrt{3}-2+\mathrm{i},\quad z-u=-2-\sqrt{3}+3\mathrm{i}.$

❈ $zw=6+6\mathrm{i},\quad zu=2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2\sqrt{3}-2\right),$

$$\frac{z}{w}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{i},\quad \frac{z}{u}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\mathrm{i}.$$

❈ $z^{2006}=2^{3009}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=2^{3009}e^{\mathrm{i}\frac{3009\pi}{2}}=2^{3009}e^{\mathrm{i}\left(752\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=2^{3009}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=2^{3009}\mathrm{i},$

$w^{2006}=3^{2006}\mathrm{i}^{4\cdot 501+2}=3^{2006}\mathrm{i}^2=-3^{2006}=3^{2006}e^{\mathrm{i}\pi}.$

❈ *Korišćenjem formule* (8.7) *za korenovanje na Ojlerov oblik kompleksnog broja dobijamo*

$$\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}=\left\{\sqrt[4]{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{3}\right)}\;\middle|\;k\in\{-3,-2,-1,0,1,2\}\right\}=$$
$$=\left\{\sqrt[4]{2}e^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}},\sqrt[4]{2}e^{-\mathrm{i}\frac{13\pi}{24}},\sqrt[4]{2}e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{24}},\sqrt[4]{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}},\sqrt[4]{2}e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}},\sqrt[4]{2}e^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{24}}\right\},$$

$$\sqrt[4]{w}=\sqrt[4]{3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}=\left\{\sqrt[4]{3}e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)}\;\middle|\;k\in\{-1,0,1,2\}\right\}=$$
$$=\left\{\sqrt[4]{3}e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}},\sqrt[4]{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}},\sqrt[4]{3}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}},\sqrt[4]{3}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}\right\},$$

$$\sqrt{u} = \sqrt{2e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}} = \left\{ \sqrt{2}e^{\mathbb{i}\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi\right)} \;\middle|\; k \in \{0,1\} \right\} = \left\{ \sqrt{2}e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{6}},\ \sqrt{2}e^{\mathbb{i}\frac{5\pi}{6}} \right\}.$$

❋ *Primenom tehnike* (8.15) *dobijamo npr.*

$$1 + e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}} = 2\cos\frac{\pi}{4}e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbb{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \mathbb{i},$$

$$1 - e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{4}e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbb{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \mathbb{i}.$$

❋ *Korišćenjem formule* (8.14) *dobijamo npr.*

$$\sphericalangle z0u = \arg u - \arg z = -\frac{11\pi}{12}.$$

❋ *Neka je* $z = 1 - 2\mathbb{i}$, $w = -2 - \mathbb{i}$, $u = -5 + 7\mathbb{i}$.

➪ *Ako je tačka* $s_t \in \mathbb{C}$ *dobijena translacijom*[3] *tačke* z *u kopleksnoj ravni za vektor* $\overrightarrow{wu}$*, tada je* $s_t = z + (u - w) = -3 + 8\mathbb{i}$.

➪ *Ako je tačka* $s_r \in \mathbb{C}$ *dobijena kao projekcija*[4] *tačke* z *na realnu osu, a tačka* $s_i \in \mathbb{C}$ *kao projekcija tačke* z *na imaginarnu osu, tada je* $s_r = \mathcal{R}\mathrm{e}(z) = 1$ *i* $s_i = \mathbb{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -2\mathbb{i}$.

➪ *Ako je tačka* $s_{sr} \in \mathbb{C}$ *dobijena osnom simetrijom*[5] *tačke* z *u odnosu na realnu osu, a tačka* $s_{si} \in \mathbb{C}$ *osnom simetrijom tačke* z *u odnosu na imaginarnu osu, tada je* $s_{sr} = \overline{z} = 1 + 2\mathbb{i}$ *i* $s_{si} = -\mathcal{R}\mathrm{e}(z) + \mathbb{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -1 - 2\mathbb{i}$.

➪ *Ako je tačka* $s_0 \in \mathbb{C}$ *dobijena centralnom simetrijom*[6] *tačke* z *u u odnosu na koordinatni početak, a tačka* $s_w \in \mathbb{C}$ *centralnom simetrijom tačke* z *u odnosu* w*, tada je* $s_0 = -z = -1 + 2\mathbb{i}$ *i* $s_w = 2w - z = -5$ *(sledi iz* $\overrightarrow{zw} = \overrightarrow{ws_w}$*).*

➪ *Ako je tačka* $s_{ro} \in \mathbb{C}$ *dobijena rotacijom*[7] *tačke* z *oko koordinatnog početka za ugao* $-\frac{\pi}{3}$*, a tačka* $s_{rw} \in \mathbb{C}$ *rotacijom tačke* z *oko tačke* w *za ugao* $-\frac{\pi}{3}$*, tada primenom* (8.4) *i* (8.4) *dobijamo da je*

$$s_{ro} = ze^{-\mathbb{i}i\frac{\pi}{3}} = z\left(\frac{1}{2} - \mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{3} - \mathbb{i}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$s_{rw} = w + (z - w)e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{3}} = w + (z - w)\left(\frac{1}{2} - \mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 7}{2} + \mathbb{i}\frac{3\sqrt{3} - 1}{2}.$$

✔

Primer 8.2 *Za kompleksne brojeve* $z = 3 + 9\mathbb{i}$, $w = -3 + \mathbb{i}$ *i* $u = -4\sqrt{3} + \mathbb{i}\left(5 + 3\sqrt{3}\right)$, *primenom formule* (8.14) *dobijamo da je*

---

[3] Translacija za vektor $\vec{a}$ je funkcija f tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku T prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$ tj. $\overrightarrow{OT'} = \overrightarrow{OT} + \vec{a}$.

[4] Projekcija na pravu p je funkcija f tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku T prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da $T' \in p$ i $TT' \perp p$.

[5] Osna simetrija u odnosu na pravu p je funkcija f tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku T prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da je $TT' \cap p = \{S\}$, $TT' \perp p$ i $TS \cong ST'$.

[6] Centralna simetrija u odnosu na tačku C je funkcija f tj. geometrijska transformacija prostora (ili ravni) koja svaku tačku T prostora (ravni) preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da je $TC = CT'$.

[7] Rotacija u ravni oko tačke C za orijentisani ugao α je funkcija f tj. geometrijska transformacija ravni koja svaku tačku T ravni preslika u tačku $T' = f(T)$ sa osobinom da je $\sphericalangle TCT' = \alpha$.

$$\sphericalangle zwu = \arg(u-w) - \arg(z-w) = \arg\left(3-4\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(4+3\sqrt{3}\right)\right) - \arg(6+8\mathrm{i}) =$$
$$= \pi + \operatorname{arctg}\frac{4+3\sqrt{3}}{3-4\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3},$$

odnosno

$$\sphericalangle zwu = \arg\frac{u-w}{z-w} = \arg\frac{3-4\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(4+3\sqrt{3}\right)}{6+8\mathrm{i}} = \arg\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$ ✔

Zadatak 8.1 *Prevesti u trigonometrijski, odnosno eksponencijalni (Ojlerov), odnosno algebarski oblik kompleksne brojeve* $1+\mathrm{i}$, $\sqrt{3}-\mathrm{i}$, $e^{\mathrm{i}\pi}$, $3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, 5, $-2\mathrm{i}$, $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$.

➥ ***Rešenje:***

(a) $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(b) $\sqrt{3}-\mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

(c) $e^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi = -1+0\mathrm{i} = -1$.

(d) $3e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0+\mathrm{i}) = 3\mathrm{i}$.

(e) $5 = 5(1+0\mathrm{i}) = 5(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0) = 5e^{0\mathrm{i}}$.

(f) $-2\mathrm{i} = 2(0-\mathrm{i}) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}i}$.

(g) $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$
$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$ ☑

Zadatak 8.2 *Izračunati u algebarskom obliku*

(a) $\sqrt[3]{-8+\mathrm{i}8}$,

(b) *one vrednosti* $\sqrt[6]{-\sqrt{2}}$ *koje se nalaze u trećem kvadrantu, gde je* $\sqrt{2}$ *realni koren od* 2, *a* $\sqrt[6]{-\sqrt{2}}$ *je kompleksni* 6*-ti koren od* $-\sqrt{2}$.

(c) $\sqrt{-7+\mathrm{i}24}$,

➥ ***Rešenje:*** Da bi mogli primeniti formule (8.7) za korenovanje, potkoreni broj najpre zapisujemo u Ojlerovom obliku.

(a) $\sqrt[3]{-8+\mathrm{i}8} = \sqrt[3]{8\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} = \left\{2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \;\middle|\; k\in\{-1,0,1\}\right\} =$
$$= \left\{2\sqrt[6]{2}e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}, 2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{12}}, 2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}\right\}.$$

Vrednosti $z_k \in \sqrt[3]{-8+\mathrm{i}8}$ možemo dobiti i primenom formula (8.8):

$$z_0 = 2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[3]{4}+\mathrm{i}\sqrt[3]{4},$$

$$z_1 = 2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}} = 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

tj.

$$z_1 = z_0e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}+\mathrm{i}\sqrt[3]{4}\right)\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[3]{2}}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[3]{2}},$$

$$z_{-1} = 2\sqrt[6]{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt[6]{2}e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}} \overset{[1]}{=} 2\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

tj.

$$z_{-1} = z_0e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}+\mathrm{i}\sqrt[3]{4}\right)\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[3]{2}}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[3]{2}}.$$

[1] - Važi $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ i $\sin(\alpha) = -\sin\alpha$.

(b) Usvojićemo najpre sledeći dogovor o kvadrantima kompleksne ravni: prvi kvadrant je deo ravni između pozitivnih delova realne i imaginarne ose uključujući pozitivni deo realne ose, drugi kvadrant je deo ravni između pozitivnog dela imaginarne ose i negativnog dela realne ose uključujući pozitivni deo imaginarne ose, treći kvadrant je deo ravni između negativnih delova realne i imaginarne ose uključujući negativni deo realne ose, četvrti kvadrant je deo ravni između negativnog dela imaginarne ose i pozitivnog dela realne ose uključujući negativni deo imaginarne ose. Analitički kvadrante opisujemo na sledeći način:

$$Q_I = \{x+\mathrm{i}y \mid x>0 \wedge y\geq 0\} = \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \mid \varphi\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right)\right\},$$
$$Q_{II} = \{x+\mathrm{i}y \mid x\leq 0 \wedge y> 0\} = \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \mid \varphi\in\left[\tfrac{\pi}{2},\pi\right)\right\},$$
$$Q_{III} = \{x+\mathrm{i}y \mid x<0 \wedge y\leq 0\} = \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \mid \varphi\in\left[\pi,\tfrac{3\pi}{2}\right)\right\},$$
$$Q_{IV} = \{x+\mathrm{i}y \mid x\geq 0 \wedge y< 0\} = \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \mid \varphi\in\left[\tfrac{3\pi}{2},2\pi\right)\right\}.$$

Naći ćemo sve vrednosti korena, a zatim ćemo iz tog skupa izdvojiti one koji leže u Q_{III}.

$$\sqrt[6]{-\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\sqrt{2}(-1)} = \sqrt[6]{\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi}} = \sqrt[12]{2}e^{\frac{\pi+2k\pi}{6}\mathrm{i}},\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}.$$

Sada izdvajamo ona rešenja koja leže u trećem kvadrantu, a to su ona rešenja čiji je argument iz intervala $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$:

$$\pi\leq\tfrac{\pi+2k\pi}{6}<\tfrac{3\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 6\pi\leq(2k+1)\pi<9\pi \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{5}{2}\leq k<4 \quad\Leftrightarrow\quad k=3,$$

pa imamo samo jedno rešenje koje leži u trećem kvadrantu, a to je $z_3 = \sqrt[12]{2}e^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{i}}$.

(c) Ako postupimo kao pod (a) i (b), dobijamo

$$z_k = \sqrt{-7+\mathrm{i}24} = \sqrt{25e^{\mathrm{i}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{24}{7}\right)+\pi\right)}} = \left\{5e^{\mathrm{i}\frac{\operatorname{arctg}\left(-\frac{24}{7}\right)+\pi}{2}} \;\middle|\; k\in\{-1,0\}\right\}.$$

Ugao $\operatorname{arctg}\left(-\frac{24}{7}\right)$ možemo odrediti samo približno.

Specijalno, u slučaju 2-og korena, možemo postupiti i na sledeći način. Kako su u polju kompleksnih brojeva korenovanje i stepenovanje u istoj osnovi uzajamno inverzne transformacije (vidi definiciju korena - jednakost(8.6)), to kvadriranjem jednačine $\sqrt{-7+\mathrm{i}24} = u = x + \mathrm{i}y$ dobijamo ekvivalentnu kompleksnu jednačinu:

$$-7+24\mathrm{i} = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2-y^2+7\right) + \mathrm{i}\,(2xy-24) = 0,$$

a poslednja kompleksna jednačina sa dve realne nepoznate x i y je ekvivalentna (dva kompleksna broja su jednaka ako i samo ako su im jednaki i realni i imaginarni delovi) sa sledećim sistemom od dve realne jednačine sa dve realne nepoznate:

$$x^2 - y^2 + 7 = 0 \ \wedge \ 2xy = 24.$$

Iz druge jednačine sledi da je $x \neq 0$ i $y = \dfrac{12}{x}$, pa uvrštavajući ovako izraženo y u prvu jednačinu dobijamo:

$$x^2 - \frac{144}{x^2} + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2\right)^2 + 7x^2 - 144 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{49+576}}{2} = \{-16, 9\} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 = -16 \ \wedge \ x^2 = 9\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 3 \ \vee \ x = -3).$$

Uvrštavajući ove vrednosti promenljive x u $y = \dfrac{12}{x}$ dobijamo rešenja gornjeg sistema realnih jednačina $R_s = \{(3,4), (-3,-4)\}$, te su rešenja polazne kompleksne jednačine $z_1 = 3 + 4\mathrm{i}$ i $z_2 = -3 - 4\mathrm{i}$. Dakle, izračunavanje 2-og korena smo sveli na rešavanje sistema od dve realne kvadratne jednačine sa dve nepoznate[8] ☑

Zadatak 8.3 *Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih funkcija $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, i ispitati njihovu injektivnost i sirjektivnost:*

$f_1(z) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z)$,	$f_8(z) = 4 - z$,
$f_2(z) = \mathrm{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z)$,	$f_9(z) = 2z$,
$f_3(z) = \dfrac{\bar{z} - z}{2}\mathrm{i}^2$,	$f_{10}(z) = z(-\mathrm{i})$,
$f_4(z) = -z$,	$f_{11}(z) = z \cdot \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$,
$f_5(z) = \bar{z}$,	$f_{12}(z) = \dfrac{z}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \mathrm{i})$,
$f_6(z) = -\bar{z}$,	$f_{13}(z) = 1 + (z-1)e^{\mathrm{i}\pi}$,
$f_7(z) = z - 3 + \mathrm{i}$,	$f_{14}(z) = \bar{z}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

➥ ***Rešenje:*** Koristeći napomene o geometrijskim interpretacijama osnovnih pojmova i računskih operacija u skupu $\mathbb{C}$ (vidi strane 121 i 122), dobijamo interpretacije funkcija f_k kao geometrijskih transformacija kompleksne ravni.

[8] Ovaj postupak je u opštem slučaju neprimenljiv za koren u osnovi $n > 2$ jer se dobijaju realne jednačine n-tog stepena koje su najčešće suviše teške za rešavanje.

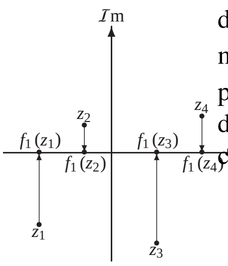
Funkcija f_1 je projekcija na realnu osu, f_2 je projekcija na imaginarnu osu, a iz $f_3(z) = \frac{\overline{z} - z}{2}\mathbb{i}^2 = \frac{z - \overline{z}}{2} \overset{(8.13)}{=} \mathcal{R}\mathrm{e}(z)$ sledi da je $f_3 = f_1$ takođe projekcija na realnu osu (vidi slike 1 i 2). Projekcija na pravu nije ni injektivna ni sirjektivna funkcija kompleksne ravni (npr. funkcijom f_1 se obe tačke $1+\mathbb{i}$ i $1+2\mathbb{i}$ preslikaju u istu tačku 1, i nijedna tačka se ne preslikava u tačku $1+\mathbb{i}$).

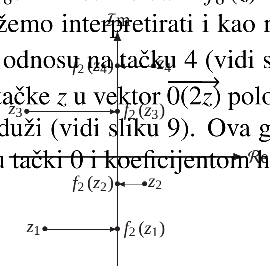
Slika 1 Slika 2

Za $z = x + iy$ dobijamo da je $f_4(x+\mathbb{i}y) = -(x+\mathbb{i}y) = -x - \mathbb{i}y$ (vektor $\overrightarrow{0z}$ se preslika u suprotni vektor $\overrightarrow{0(-z)}$), $f_5(x+\mathbb{i}y) = x - \mathbb{i}y$ (tačka $x - \mathbb{i}y$ je osnosimetrična tački $x+\mathbb{i}y$ u odnosu na $\mathcal{R}$e-osu), $f_6(x+\mathbb{i}y) = -(x-\mathbb{i}y) = -x+\mathbb{i}y$ (tačka $-x+\mathbb{i}y$ je osnosimetrična tački $x+\mathbb{i}y$ u odnosu na $\mathcal{I}$m-osu), tako da je (vidi slike 4, 5 i 6) f_4 centralna simetrija u odnosu na koordinatni početak, f_5 je osna simetrija u odnosu na $\mathcal{R}$e-osu, a f_6 je osna simetrija u odnosu na $\mathcal{I}$m-osu. I centralna i osna simetrija su bijektivne transformacije.

Slika 4 Slika 5 Slika 6

Funkcija $f_7(z) = z + (-3+\mathbb{i})$ je translacija za vektor položaja tačke $-3+\mathbb{i}$, a translacija je bijektivna transformacija (vidi sliku 7). Funkciju $f_8(z) = (-z)+4$ možemo predstaviti kao kompoziciju $f_8 = g_8 \circ h_8$ centralne simetrije $h_8(w) = -w$ i translacije $g_8(w) = w+4$ (vidi sliku 8). Kompozicija bijektivnih funkcija g_8 i h_8 je bijektivna funkcija f_8. Primetimo da iz $f_8(z) = 4 - z = (z-4)(-1) = (z-4)e^{\mathbb{i}\pi}$ i formule (8.4) sledi da f_8 možemo interpretirati i kao rotaciju oko tačke 4 za ugao π, ili kao centralnu simetriju u odnosu na tačku 4 (vidi sliku 8). Funkcija $f_9(z) = 2z$ je preslikava vektor $\overrightarrow{0z}$ položaja tačke z u vektor $\overrightarrow{0(2z)}$ položaja tačke $2z$ koji je istog pravca i smera kao $\overrightarrow{0z}$, ali dva puta duži (vidi sliku 9). Ova geometrijska transformacija se naziva ***homotetija*** sa centrom u tački 0 i koeficijentom homotetije 2, i označava se sa $h_{0,2}$.

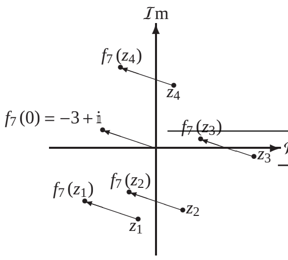


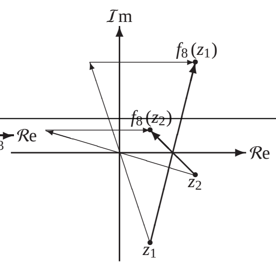


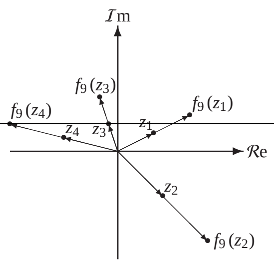
Slika 7 Slika 8 Slika 9

Iz (8.3) i (8.4) sledi da je $f_{10}(z) = z(-\mathbb{i}) = ze^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}$ rotacija oko koordinatnog početka 0 za ugao $-\frac{\pi}{2}$ (vidi sliku 10), $f_{11}(z) = z \cdot \dfrac{-1+\mathbb{i}\sqrt{3}}{2} = z \cdot e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}$ je rotacija oko 0 za ugao $\frac{2\pi}{3}$, $f_{12}(z) = \dfrac{z}{\sqrt{2}} \cdot (1+\mathbb{i}) = z \cdot e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{4}}$ je rotacija oko 0 za ugao $\frac{\pi}{4}$, a $f_{13}(z) = 1+(z-1)e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{4}}$ je rotacija oko 1 za ugao $\frac{\pi}{4}$. Kao kod f_8, zaključujemo da je funkcija $f_{14}(z) = \overline{z}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{2}}$ kompozicija osne simetrije u odnosu na realnu osu, i rotacije oko 0 za ugao $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$; uočimo takođe da iz $f_{14}(x+\mathbb{i}y) = \overline{x+\mathbb{i}y}e^{\mathbb{i}\frac{3\pi}{2}} = (x-\mathbb{i}y)e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}} = (x-\mathbb{i}y)(-\mathbb{i}) = -y-\mathbb{i}x$ sledi da f_{14} možemo interpretirati i kao osnu simetriju u odnosu na pravu $y = -x$ tj. pravu $\mathcal{I}\mathrm{m} = -\mathcal{R}\mathrm{e}$ (vidi sliku 14).

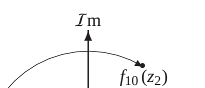
Slika 10 Slika 14

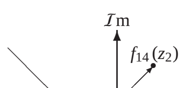






Zadatak 8.4 *Navesti geometrijsku interpretaciju sledećih skupova $A_i \subseteq \mathbb{C}$:*





$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -\mathcal{R}\mathrm{e}(z)\}$,

$A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}\mathrm{e}(z) \geq 5\}$,

$A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}\mathrm{m}\, z = 5\}$,

$A_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z}\}$,

$A_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = -\overline{z}\}$,

$A_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = |z|\}$,

$A_7 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1|^4 = 16\right\}$,

$A_8 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathbb{i} - 2| \leq 2\}$,

$A_9 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^4 = |\mathbb{i}|\right\}$,

$A_{10} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^4 = \mathbb{i}\right\}$,

$A_{11} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z^5 = e^{\mathbb{i}\pi}\right\}$,

$A_{12} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid (z-1)^4 = 1\right\}$,

$A_{13} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid (z - 1 + \mathbb{i})^3 = 2 + 2\mathbb{i}\right\}$,

$A_{14} = \{z \in \mathbb{C} \mid z|z| = 4\}$,

$A_{15} = \{z \in \mathbb{C} \mid z\overline{z} = \mathbb{i}\}$,

$A_{16} = \{z \in \mathbb{C} \mid z|z| = \overline{z}\}$,

$A_{17} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \wedge |z| \leq 1\right\}$,

$A_{18} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \arg \overline{z}\}$,

$A_{19} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \arg(-\overline{z})\}$,

$A_{20} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = -\arg \overline{z}\}$,

$A_{21} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \arg z^2\right\}$,

$A_{22} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| = |z - 2\mathbb{i}|\}$,

$A_{23} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| + |z-2| = 6\}$.

➥ ***Rešenje:*** Pri ispitivanju da li kompleksni broj z pripada ili ne skupu A_i, po potrebi posmatrajmo kompleksni broj z u obliku $z = x + \mathbb{i}y$ ili u obliku $z = re^{\mathbb{i}\varphi}$.

1. $z = x + \mathbb{i}y \in A_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x$,

   A_1 je prava - simetrala 2-og i 4-og kvadranta (vidi sliku 1).

2. $z = x + \mathbb{i}y \in A_2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5$,

   A_2 je „desna” poluravan u odnosu na pravu $x = 5$ koja je paralelna sa x-osom (vidi sliku 2).

3. $z = x + \mathbb{i}y \in A_3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5$,

   A_3 je prava $y = 5$ koja je paralelna sa y-osom (vidi sliku 3).

Slika 1 Slika 2 Slika 3

4. $z = x + \mathbb{i}y \in A_4 \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathbb{i}y = x - \mathbb{i}y \quad \Leftrightarrow \quad y = -y \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$,

   A_4 je $\mathcal{R}$e-osa.

5. $z = x + \mathbb{i}y \in A_4 \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathbb{i}y = -x + \mathbb{i}y \quad \Leftrightarrow \quad x = -x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$,

   A_5 je $\mathcal{I}$m-osa.

6. $z = re^{\mathbb{i}\varphi} \in A_6 \quad\Leftrightarrow\quad re^{\mathbb{i}\varphi} = r = e^{\mathbb{i}\cdot 0} \quad\Leftrightarrow\quad (r = 0 \lor \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = 2k\pi)$,
   A_6 je pozitivni deo $\mathcal{R}$e-ose (uključujući i tačku 0).
7. Kako je $|z-1| \geq 0$, primenom realnog $\sqrt[4]{}$ dobijamo da je
   $$z \in A_7 \quad\Leftrightarrow\quad |z-1|^4 = 16 \quad\Leftrightarrow\quad |z-1| = \sqrt[4]{16} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\overrightarrow{1z}\right| = 2,$$
   tj. $z \in A_7$ ako i samo ako je rastojanje tačke z od tačke 1 jednako 2. Stoga je (vidi sliku 7) skup A_7 kružnica $\mathsf{K}(1,2)$ sa centrom u 1 poluprečnika 2.
8. Iz $|z-\mathbb{i}-2| = |z-(2+\mathbb{i})|$ sledi da je
   $$z \in A_8 \quad\Leftrightarrow\quad |z-(2+\mathbb{i})| \leq 2 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\overrightarrow{(2+\mathbb{i})z}\right| \leq 2,$$
   tj. $z \in A_8$ ako i samo ako je rastojanje tačke z od tačke $2+\mathbb{i}$ manje ili jednako sa 2. Stoga je (vidi sliku 8) skup A_8 krug $\mathcal{K}(2+\mathbb{i},2)$ sa centrom u $2+\mathbb{i}$ poluprečnika 2.
9. Kako je $|\mathbb{i}| = 1$, na isti način kao kod A_7 dobijamo da je
   $$z \in A_9 \quad\Leftrightarrow\quad |z-0| = 1,$$
   te je A_9 kružnica $\mathsf{K}(0,1)$ sa centrom u 0 poluprečnika 1.
10. Kako je $|z|^4$ nenegativan realan broj, sledi da je $A_{10} = \emptyset$.
11. Iz $z^5 = e^{\mathbb{i}\pi} \Leftrightarrow z = \sqrt[5]{e^{\mathbb{i}\pi}}$ i geometrijske interpretacije korenovanja (vidi stranu 124), sledi da je A_{11} skup temena pravilnog (jednakostraničnog) petougla upisanog u kružnicu sa centrom (tj. težištem petougla) u tački 0 i poluprečnika $\sqrt[5]{\left|e^{\mathbb{i}\pi}\right|} = 1$.
12. Kao i kod skupa A_{11}, iz $(z-1)^4 = 1 \Leftrightarrow z-1 = \sqrt[4]{1}$ sledi da tačke $w = z-1$ čine temena kvadrata upisanog u kružnicu $\mathsf{K}(0,1)$, a tačke $z = w+1$ skupa A_{12}, s obzirom na geometrijsku interpretaciju sabiranja (vidi funkciju f_7 u zadatku **8.3**), čine temena kvadrata upisanog u kružnicu $\mathsf{K}(1,1)$ (dobijaju se translacijom tačaka w za vektor koji odgovara tački 1).
13. Na isti način kao i kod skupova A_{11} i A_{12}, iz
   $$(z-1+\mathbb{i})^3 = 2+2i \Leftrightarrow z-(1-\mathbb{i}) = \sqrt[3]{2+2\mathbb{i}}$$
   sledi da tačke skupa A_{13} čine temena jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu $\mathsf{K}(1-\mathbb{i},2)$ (gde je $2 = \sqrt[3]{|2+2\mathbb{i}|}$).
14. Za $z = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$, iz
   $$z|z| = 4 \quad\Leftrightarrow\quad \rho^2 e^{\mathbb{i}\varphi} = 4e^{\mathbb{i}\cdot 0} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\rho^2 = 4 \land \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = 2k\pi\right) \quad\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow\quad (\rho = 2 \land \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = 2k\pi) \quad\Leftrightarrow\quad z = 2e^{\mathbb{i}\cdot 0} = 2$$
   sledi da je $A_{14} = \{2\}$.
15. Iz $z\overline{z} \overset{(8.10)}{=} |z|^2 \in \mathbb{R}$ sledi $A_{15} = \emptyset$.
16. Za $z = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$, iz
   $$z|z| = \overline{z} \quad\overset{(8.1)}{\Leftrightarrow}\quad \rho^2 e^{\mathbb{i}\varphi} = \rho e^{-\mathbb{i}\varphi} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\rho^2 = \rho \land \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = -\varphi + 2k\pi\right) \quad\Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow\quad (\rho \in \{0,1\} \land \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = k\pi)$$
   sledi da je $A_{16} = \{-1,0,1\}$.

17. Neka je $B_{17} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{2} \right\}$ i $C_{17} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$, pri čemu je tada $A_{17} = B_{17} \cap C_{17}$. Kao za skup A_8 zaključujemo da je C_{17} krug $\mathcal{K}(0,1)$. Vektori koji odgovaraju kompleksnim brojevima $z \in B_{17}$ zaklapaju sa pozitivnim delom $\mathcal{R}$e-ose ugao $\varphi = \arg z \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ (vidi geometrijsku interpretaciju argumenta na strani 122), te kompleksni brojevi $z \in B_{17}$ leže „između” poluprave $p_{\frac{\pi}{3}}$ koja ishodi iz koordinatnog početka i zaklapa sa pozitivnim delom $\mathcal{R}$e-ose ugao $\frac{\pi}{3}$, i poluprave $p_{\frac{\pi}{2}}$ koja ishodi iz koordinatnog početka i zaklapa sa pozitivnim delom $\mathcal{R}$e-ose ugao $\frac{\pi}{2}$ - tj. pozitivnog dela $\mathcal{I}$m-ose. Stoga je $A_{17} = B_{17} \cap C_{17}$ isečak iz kruga $\mathcal{K}(0,1)$ - oblast prikazana na slici 17.

Slika 7 Slika 8 Slika 17

18. Za skup A_{18} imamo da $0 \notin A_{18}$ jer se $\arg z$ ne definiše za $z = 0$. Isto važi i za skupove A_{19}, A_{20} i A_{21}. Za $z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, iz

$$
\begin{aligned}
&\arg z = \arg \bar{z} \overset{(8.1)}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = -\varphi + 2k\pi \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = k\pi \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left(z = \rho e^{\mathrm{i}\cdot 0} \ \vee\ z = \rho e^{-\mathrm{i}\pi}\right) \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad ((z = \rho \ \vee\ z = -\rho) \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

sledi da je A_{18} realna osa bez tačke 0.

19. Za $z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, iz

$$
\begin{aligned}
&\arg z = \arg(-\bar{z}) \overset{(8.1)}{\Leftrightarrow} \left(\varphi = \arg\left((-1)\cdot \rho e^{-\mathrm{i}\varphi}\right) \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\varphi = \arg\left(e^{-\mathrm{i}\pi} \cdot \rho e^{-\mathrm{i}\varphi}\right) \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\varphi = \arg\left(\rho e^{-\mathrm{i}(\varphi+\pi)}\right) \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = -\varphi - \pi + 2k\pi \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = -\varphi + (2k-1)\pi \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = k\pi - \tfrac{\pi}{2} \ \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(z = \rho e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \ \vee\ z = \rho e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad ((z = \rho\mathrm{i} \ \vee\ z = -\rho\mathrm{i}) \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{a\mathrm{i} \mid a \in \mathbb{R}\} \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

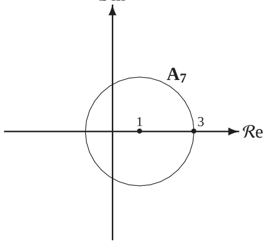
sledi da je A_{19} imaginarna osa bez tačke 0.

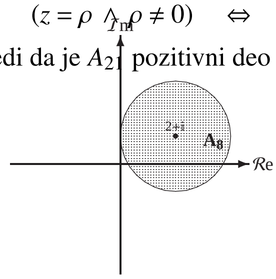
20. Iz (8.1) sledi da je $A_{20} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

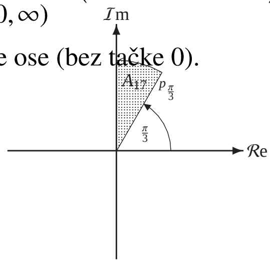
21. Za $z = \rho e^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, iz

$$
\begin{aligned}
&\arg z = \arg^2 \overset{(8.5)}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = 2\varphi + 2k\pi \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = -2k\pi \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(z = \rho e^{\mathrm{i}\cdot 0} \ \wedge\ \rho \ne 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (z = \rho \ \wedge\ \rho \ne 0) \quad \Leftrightarrow \quad z \in (0, \infty)
\end{aligned}
$$

sledi da je A_{21} pozitivni deo realne ose (bez tačke 0).







22. Kako je $|z+1| = |z-(-1)|$ dužina vektora $\overrightarrow{(-1)z}$ tj. rastojanje tačke z od tačke -1, a $|z-2\mathrm{i}|$ je rastojanje tačke z od tačke $2i$, sledi da je A_{22} skup onih tačaka u kompleksnoj ravni koje su jednako udaljene od tačaka -1 i $2\mathrm{i}$, a to je simetrala duži određene krajnjim tačkama -1 i $2\mathrm{i}$ (vidi sliku 22).
23. Kako je $|z+2| = |z-(-2)|$ rastojanje tačke z od tačke -2, a $|z-2|$ je rastojanje tačke z od tačke 2, sledi da je A_{22} skup onih tačaka u kompleksnoj ravni za koje zbir rastojanja od tačaka -2 i 2 iznosi 6, a to je po definiciji elipsa sa žižama -2 i 2 (vidi sliku 23).

Slika 22 Slika 23

☑

Zadatak 8.5 *Dokazati da je sve $x\in\mathbb{R}$ važe jednakosti*

$$[1]\quad \cos x + 3\cos(2x) + 3\cos(3x) + \cos(4x) = 2^3\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2},$$

$$[2]\quad \sin x + 3\sin(2x) + 3\sin(3x) + \sin(4x) = 2^3\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}.$$

➥ ***Rešenje:*** Označimo redom sa A i B izraze na levim stranama [1] i [2]. Od parova oblika $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ možemo formirati kompleksne brojeve $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ napisane u trigonometrijskom obliku, a zatim te brojeve možemo napisati u Ojlerovom obliku, te tako dobijamo

$$\begin{aligned} A+\mathrm{i}B &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x) + 3(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) + 3(\cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x) + (\cos 4x + \mathrm{i}\sin 4x) = \\ &= e^{x\mathrm{i}} + 3e^{2x\mathrm{i}} + 3e^{3x\mathrm{i}} + e^{4x\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

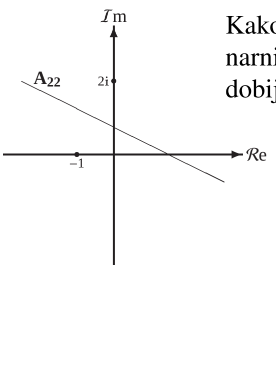
Izvlačeći $e^{x\mathrm{i}}$ ispred zagrade, i primenom binomne formule $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ za $n=3$, $a=1$ i $b=e^{x\mathrm{i}}$, dobijamo

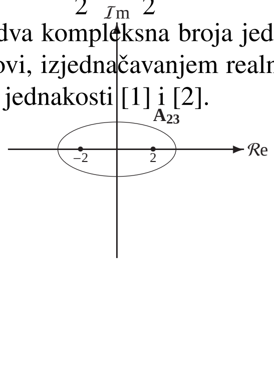
$$A+\mathrm{i}B = e^{x\mathrm{i}}\left(1+3e^{x\mathrm{i}}+3e^{2x\mathrm{i}}+e^{3x\mathrm{i}}\right) = e^{x\mathrm{i}}\left(1+e^{x\mathrm{i}}\right)^3.$$

Dalje, primenom (8.15) dobijamo

$$\begin{aligned} A+\mathrm{i}B &= e^{x\mathrm{i}}\left(e^{\frac{x}{2}\mathrm{i}}\left(e^{-\frac{x}{2}\mathrm{i}}+e^{\frac{x}{2}\mathrm{i}}\right)\right)^3 = e^{x\mathrm{i}}e^{\frac{3x}{2}\mathrm{i}}\left(e^{\frac{x}{2}\mathrm{i}}+e^{-\frac{x}{2}\mathrm{i}}\right)^3 \overset{(8.15)}{=} e^{x\mathrm{i}}e^{\frac{3x}{2}\mathrm{i}}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^3 = \\ &= e^{\frac{5x}{2}\mathrm{i}}2^3\cos^3\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{5x}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{5x}{2}\right)2^3\cos^3\frac{x}{2} = \\ &= 2^3\cos^3\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} + \mathrm{i}2^3\cos^3\frac{x}{2}\sin\frac{5x}{2}. \end{aligned}$$

Kako su dva kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni delovi, izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova početnog i krajnjeg izraza dobijamo jednakosti [1] i [2]. ☑





Zadatak 8.6 *Dokazati da za sve $x,\varphi \in \mathbb{R}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+2k\varphi) = 2^n\cos^n\varphi\sin(x+n\varphi).$$

➥ ***Rešenje:*** Postupićemo slično kao u prethodnom zadatku, ali u tu svrhu moramo „veštački uvesti u igru” i izraz $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}\sin(x+2k\varphi)$. Tako dobijamo

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+2k\varphi)\right)+\mathrm{i}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(x+2k\varphi)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(x+2k\varphi)+\mathrm{i}\sin(x+2k\varphi))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\mathrm{i}(x+2k\varphi)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}2k\varphi}=$$
$$=e^{\mathrm{i}x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\mathrm{i}2k\varphi}=e^{\mathrm{i}x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(e^{\mathrm{i}2\varphi}\right)^k\overset{[1]}{=}e^{\mathrm{i}x}\left(1+e^{\mathrm{i}2\varphi}\right)^n\overset{(8.15)}{=}e^{\mathrm{i}x}\left(e^{\mathrm{i}\varphi}(2\cos\varphi)\right)^n=$$
$$=e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}n\varphi}2^n\cos^n\varphi=e^{\mathrm{i}(x+n\varphi)}2^n\cos^n\varphi=2^n\cos^n\varphi(\cos(x+n\varphi)+\mathrm{i}\sin(x+n\varphi))=$$
$$=2^n\cos^n\varphi\cos(x+n\varphi)+\mathrm{i}2^n\cos^n\varphi\sin(x+n\varphi).$$

[1] - Primenom binomnog obrasca.

Izjednačavanjem imaginarnih delova početnog i krajnjeg izraza sledi tvrđenje. ☑

Zadatak 8.7 *Dokazati da za svako $x \in \mathbb{R}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\cos^2(kx) = -\frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)x)\sin(2nx)}{\cos x}.$$

➥ ***Rešenje:*** Označimo $S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\cos^2(kx)$. Primenićemo sličnu tehniku kao u prethodna dva zadatka. Najpre uočimo da je

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\cos^2(kx)\overset{[1]}{=}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1+\cos(2kx)}{2}=$$
$$\overset{[2]}{=}\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}+\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\cos(2kx)\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\cos(2kx).$$

Posmatrajmo sada izraz $\tilde{S}_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\sin(2kx)$. Postupajući slično kao u prethodna dva zadatka dobijamo

$$S_n+\mathrm{i}\tilde{S}_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot(\cos(2kx)+\mathrm{i}\sin(2kx))=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot e^{2kx\mathrm{i}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\left(e^{2x\mathrm{i}}\right)^k=-\frac{1}{2}e^{2x\mathrm{i}}\sum_{k=1}^{2n}\left(e^{2x\mathrm{i}}\right)^{k-1}=-\frac{1}{2}e^{2x\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{2n-1}\left(e^{2x\mathrm{i}}\right)^k=-\frac{1}{2}e^{2x\mathrm{i}}\frac{1-\left(e^{2x\mathrm{i}}\right)^{2n}}{1-e^{2x\mathrm{i}}}=$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2x\mathbb{i}}\frac{1-e^{4nx\mathbb{i}}}{1-e^{2x\mathbb{i}}} = -\frac{1}{2}e^{2x\mathbb{i}}\frac{e^{2nx\mathbb{i}}\left(e^{-2nx\mathbb{i}}-e^{2nx\mathbb{i}}\right)}{e^{x\mathbb{i}}(e^{-x\mathbb{i}}+e^{x\mathbb{i}})} = \frac{1}{2}e^{(2n+1)x\mathbb{i}}\frac{e^{2nx\mathbb{i}}-e^{-2nx\mathbb{i}}}{e^{x\mathbb{i}}+e^{-x\mathbb{i}}} \overset{(8.15)}{=}$$
$$= \frac{1}{2}e^{(2n+1)x\mathbb{i}}\frac{2\mathbb{i}\sin(2nx)}{2\cos x} = \frac{1}{2}(\cos((2n+1)x)+\mathbb{i}\sin((2n+1)x))\cdot\mathbb{i}\frac{\sin(2nx)}{\cos x} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin((2n+1)x)\sin(2nx)}{\cos x}+\mathbb{i}\frac{\cos((2n+1)x)\sin(2nx)}{\cos x}\right),$$

odakle sledi da je $S_n = -\frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)x)\sin(2nx)}{\cos x}$, što je i trebalo dokazati.

[1] - Primenom adicione formule $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

[2] - Važi $\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1} = 0$ jer se u sumi nalazi n sabiraka 1 i n sabiraka -1.

[3] - Primenom formule za zbir prvih m članova geometrijskog niza $\sum\limits_{k=0}^{m}q^k = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$ sa prvim članom 1 i koeficijentom progresije q, za $m = 2n-1$ i $q = e^{2x\mathbb{i}}$. ☑

Zadatak 8.8 *Izračunati zbir i proizvod svih korena jednačine $z^{2007}-1=0$ u polju kompleksnih brojeva.*

➥ ***Rešenje:*** Rešenja jednačine su
$z_k = \sqrt[2007]{1} = e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{2007}},\ \ k = 0,1,...,2006,$
te je

$$\sum_{k=0}^{2006} z_k = \sum_{k=0}^{2006}\left(e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{2007}}\right)^k \overset{[1]}{=} \frac{\left(e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{2007}}\right)^{2007}-1}{e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{2007}}-1} = \frac{e^{\mathbb{i}2\pi}-1}{e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{2007}}-1} = \frac{1-1}{e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{2007}}-1} = 0,$$
$$\prod_{k=0}^{2006} z_k = \prod_{k=0}^{2006} e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{2007}} = e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2007}\sum\limits_{k=0}^{2006}2k} \overset{[2]}{=} e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2007}\frac{2007}{2}4012} = e^{\mathbb{i}2006\pi} = 1.$$

[1] - Primenom formule za zbir prvih m članova geometrijskog niza $\sum\limits_{k=0}^{m}q^k = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$ sa prvim članom 1 i koeficijentom progresije q, za $m = 2006$ i $q = e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{2007}}$.

[2] - Primenom formule za zbir prvih m članova aritmetičkog niza $\sum\limits_{k=0}^{m}a_k = \frac{m+1}{2}(a_0+a_m)$. ☑

Zadatak 8.9 *Neka je $S_n = \{z\in\mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ za $n\in\mathbb{N}$, i neka je $S = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Dokazati da je $(S,\cdot)$ komutativna grupa.*

➥ ***Rešenje:*** Kako je

$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{1} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\},$

sledi da je

$$S = \left\{ e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Stoga je $(S,\cdot)$ grupoid, jer za sve $e^{\mathbb{i}\frac{2k_1\pi}{n_1}}, e^{\mathbb{i}\frac{2k_2\pi}{n_2}} \in S$ važi

$$e^{\mathbb{i}\frac{2k_1\pi}{n_1}} e^{\mathbb{i}\frac{2k_2\pi}{n_2}} = e^{\mathbb{i}\frac{2k_1n_2\pi+2k_2n_1\pi}{n_1n_2}} = e^{\mathbb{i}\frac{2(k_1n_2+k_2n_1)\pi}{n_1n_2}} \in S \qquad [*]$$

(jer za $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ i $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ važi $n_1n_2 \in \mathbb{N}$ i $k_1n_2 + k_2n_1 \in \mathbb{Z}$). Asocijativnost i komutativnost se „nasleđuju” iz $(\mathbb{C},\cdot)$, neutralni element je očigledno $1 = e^{\mathbb{i}\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{1}} \in S$, a inverzni element za $e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} \in S$ je $e^{-\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} \in S$ (jer za $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{Z}$ važi $-k \in \mathbb{Z}$, tj. $e^{-\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} \in S$, i pri tome je $e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} e^{-\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} = e^{0\cdot\mathbb{i}} = 1 \in S$). Dakle, $(S,\cdot)$ je komutativna grupa, tj. podgrupa grupe $(\mathbb{C},\cdot)$. ☑

☞ Grupa $(S,\cdot)$ je izomorfna sa grupom $(\mathbb{Q},+)$. Naime, lako se pokazuje (vidi jednakost [*]) da je preslikavanje $e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi}{n}} \mapsto \dfrac{k}{n}$ izomorfizam iz $(S,\cdot)$ u $(\mathbb{Q},+)$.

O rešavanju kompleksnih jednačina

Posmatrajmo jednačinu[9]

$$J: \quad f(z) = 0 \qquad (8.17)$$

po nepoznatoj $z \in \mathbb{C}$. Rešiti jednačinu (8.17) znači odrediti skup $\mathcal{R}_J \subseteq \mathbb{C}$ za koji važi da $z \in \mathcal{R}_J$ ako i samo ako je jednakost $f(z) = 0$ tačna. Da bi jednakost (8.17) mogla biti tačna za broj z, jednačina mora biti definisana za z. Stoga je uvek poželjno da pre rešavanja jednačine jasno uočimo tzv. ***domen*** $\mathcal{D}_J$ ***rešavanja jednačine*** **(8.17)**, a to je skup svih $z \in \mathbb{C}$ za koje je jednačina uopšte definisana. Tek nakon toga rešavamo jednačinu, tj. određujemo skup rešenja $\mathcal{D}_J \subseteq \mathcal{R}_J$.

Pri rešavanju jednačine (8.17), možemo primeniti neku od sledećih strategija[10].

1. Uvođenjem smene $z = x + \mathbb{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$ pokušavamo jednačinu (8.17) napisati u obliku
$$f_r(x,y) + \mathbb{i} f_i(x,y) = 0,$$
i time je svesti na sistem od dve realne jednačine
$$f_r(x,y) = 0 \quad \wedge \quad f_i(x,y) = 0, \qquad (8.18)$$
po nepoznatim $x, y \in \mathbb{R}$. Ovu smenu ima svrhe uvoditi onda kada umemo rešiti sistem (8.18). U načelu, to je onda kada u jednačini (8.17) preovladaju operacije sabiranja, konjugovanja, i slično.

2. Uvođenjem smene $z = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$, $\rho \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$ pokušavamo jednačinu (8.17) napisati u obliku
$$R_1(\rho,\varphi) e^{\mathbb{i}A_1(\rho,\varphi)} = R_2(\rho,\varphi) e^{\mathbb{i}A_2(\rho,\varphi)},$$

[9] Svaka jednačina može da se zapiše u ovakvoj formi.

[10] U zavisnosti od oblika jednačine procenjujemo kojim metodom najlakše dolazimo do rešenja

i time je svesti na sistem od dve realne jednačine

$$R_1(\rho,\varphi) = R_2(\rho,\varphi) \quad \wedge \quad A_1(\rho,\varphi) = A_2(\rho,\varphi) + 2k\pi, \tag{8.19}$$

po nepoznatim $\rho \in [0,\infty)$, $\varphi \in (-\pi,\pi]$. Ovu smenu ima svrhe uvoditi onda kada umemo rešiti sistem (8.19). U načelu, to je onda kada u jednačini (8.17) preovladaju operacije množenja, delenja, stepenovanja, i slično.

3. Ako ni jednom ni drugom smenom ne dobijamo željeni rezultat (sistem realnih jednačina koji umemo rešiti), tada se snalazimo u zavisnosti od oblika jednačine.

Zadatak 8.10 *U polju kompleksnih brojeva rešiti jednačinu*

$$J: \quad z\mathcal{R}\mathrm{e}(z-1) - 2\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{\overline{z}-1}{1+\mathbb{i}}\right) = -\mathbb{i}.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + \mathbb{i}y$. Tada je

$$\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad (x+\mathbb{i}y)\mathcal{R}\mathrm{e}(x-1+\mathbb{i}y) - 2\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{x-1-\mathbb{i}y}{1+\mathbb{i}}\cdot\frac{1-\mathbb{i}}{1-\mathbb{i}}\right) = -\mathbb{i} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (x+\mathbb{i}y)(x-1) - 2\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{x-y-1+\mathbb{i}(1-x-y)}{2}\right) = -\mathbb{i} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - x + \mathbb{i}y(x-1) - 2\frac{1-x-y}{2} + \mathbb{i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y - 1 + \mathbb{i}(y(x-1)+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x^2 + y - 1 = 0 \wedge y(x-1) + 1 = 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = 1 - x^2 \wedge \left(1-x^2\right)(x-1) + 1 = 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = 1 - x^2 \wedge x\left(x^2 - x - 1\right) = 0\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(y = 1 - x^2 \wedge \left(x = 0 \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left((x = 0 \wedge y = 1) \vee \left(x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \wedge y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \vee \right. \\
&\qquad \left. \vee \left(x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \wedge y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Dakle, skup rešenja jednačine J je $\mathcal{R}_J = \left\{\mathbb{i}\,,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \mathbb{i}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \mathbb{i}\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

☑

Zadatak 8.11 *U polju kompleksnih brojeva rešiti jednačinu*

$$J: \quad |z - 5\mathbb{i} + 1| + \mathbb{i}\cdot\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{2(z-3\overline{z})}{3\mathbb{i}}\right) = 9 - \frac{24}{3}\mathbb{i}.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + \mathbb{i}y$. Tada je

$$
\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad |(x+1)+\mathbb{i}(y-5)|+\mathbb{i}\cdot\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{-4x+8\mathbb{i}y}{3\mathbb{i}}\cdot\frac{-3\mathbb{i}}{-3\mathbb{i}}\right)=9-\frac{24}{3}\mathbb{i} \quad \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \quad &\sqrt{(x+1)^2+i(y-5)^2}+\mathbb{i}\cdot\mathcal{I}\mathrm{m}\left(\frac{12x\mathbb{i}+24y}{9}\right)=9-\frac{24}{3}\mathbb{i} \quad \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \quad &\left((x+1)^2+(y-5)^2=81 \ \wedge\ \frac{12}{9}x\mathbb{i}=-\frac{24}{3}\mathbb{i}\right) \quad \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \quad &\left(x=-6 \ \wedge\ x^2+2x+1+y^2-10y+25-81=0\right) \quad \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \quad &\left(x=-6 \ \wedge\ y^2-10y-31=0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x=-6 \ \wedge\ y_{1/2}=5\pm 2\sqrt{14}\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, skup rešenja polazne jednačine je $\mathcal{R}_J=\left\{-6+\left(5+2\sqrt{14}\right)\mathbb{i},-6-\left(5-2\sqrt{14}\right)\mathbb{i}\right\}$.

☑

Zadatak 8.12 *U skupu kompleksnih brojeva rešiti po z sistem jednačina*

$$\left|\frac{z-1}{2-\overline{z}}\right|=1 \ \wedge\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{z}{2+\mathbb{i}}\right)=2.$$

➥ ***Rešenje:*** Posmatran sistem jednačina je definisan za $2-\overline{z}\neq 0$, odnosno $\overline{z}\neq 2$, odnosno $z\neq 2$. Na domenu rešavanja $\mathcal{D}=\mathbb{C}\setminus\{2\}$, prva jednačina je ekvivalentna sa $\frac{|z-1|}{|2-\overline{z}|}=1$ odnosno $|z-1|=|2-\overline{z}|$, te je uz smenu $z=x+\mathbb{i}y$, $x,y\in\mathbb{R}$ posmatrani sistem ekvivalentan sa

$$
\begin{aligned}
&\left(|x-1+\mathbb{i}y|=|2-x+\mathbb{i}y| \ \wedge\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{x+\mathbb{i}y}{2+\mathbb{i}}\cdot\frac{2-\mathbb{i}}{2-\mathbb{i}}\right)=2\right) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(2-x)^2+y^2} \ \wedge\ \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{2x+y+\mathbb{i}(2y-x)}{5}\right)=2\right) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \left((x-1)^2+y^2=(2-x)^2+y^2 \ \wedge\ \frac{2x+y}{5}=2\right) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1+y^2=4-4x+x^2+y^2 \ \wedge\ 2x+y=10\right) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow (2x=3 \ \wedge\ 2x+y=10) \Leftrightarrow \left(x=\frac{3}{2} \ \wedge\ y=7\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, polazna jednačina ima tačno jedno rešenje $z=\frac{3}{2}+7\mathbb{i}$. ☑

Zadatak 8.13 *U polju kompleksnih brojeva rešiti jednačinu*

$$J:\quad \left(z^3+1\right)\left(\overline{z}+\mathcal{R}\mathrm{e}(z-\mathbb{i})+\frac{2\mathbb{i}-1}{3\mathbb{i}}\right)=0.$$

Sva rešenja predstaviti u algebarskom obliku.

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z=x+\mathbb{i}y$. Tada je

$$
\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad \left(z^3+1=0 \ \vee\ \overline{z}+\mathcal{R}\mathrm{e}(z-\mathbb{i})+\frac{2\mathbb{i}-1}{3\mathbb{i}}=0\right) \quad \Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow \quad &\left(z^3=-1 \ \vee\ x-\mathbb{i}y+x+\frac{2}{3}+\mathbb{i}\frac{1}{3}=0\right) \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(z = \sqrt[3]{-1} \vee 2x + \frac{2}{3} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{3} - y\right) = 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(z = \sqrt[3]{e^{\pi \mathrm{i}}} \vee \left(2x + \frac{2}{3} = 0 \wedge \frac{1}{3} - y = 0\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{3}},\ k \in \{0,1,2\} \vee \left(x = -\frac{1}{3} \wedge y = \frac{1}{3}\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(z = e^{\frac{1}{3}\pi \mathrm{i}} \vee z = e^{\pi \mathrm{i}} \vee z = e^{\frac{5}{3}\pi \mathrm{i}} \vee z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z \in \mathcal{R}_J = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ -1,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}\right\}.$$ ☑

Zadatak 8.14 *Rešiti po $z, w \in \mathbb{C}$ sistem jednačina*

$$J: \quad z + \overline{w} = 6 + 3\mathrm{i} \quad \wedge \quad \mathrm{i}\overline{z} + \frac{w}{\mathrm{i}} = 11 - 4\mathrm{i}.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja sistema jednačina je ceo skup kompleksnih brojeva, odnosno, sistem jednačina je definisan za sve $(z,w) \in \mathbb{C}^2$.

Prvi način: Neka je $z = x + \mathrm{i}y$ i $w = a + \mathrm{i}b$, gde je $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{array}{l} z + \overline{w} = 6 + 3\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\overline{z} + \frac{w}{\mathrm{i}} = 11 - 4\mathrm{i} \ \ / \cdot \mathrm{i} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} z + \overline{w} = 6 + 3\mathrm{i} \\ -\overline{z} + w = 4 + 11\mathrm{i} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x + a + \mathrm{i}(y - b) = 6 + 3\mathrm{i} \\ -x + a + \mathrm{i}(y + b) = 4 + 11\mathrm{i} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x + a &=& 6 \\ -x + a &=& 4 \\ y - b &=& 3 \\ y + b &=& 11 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x + a &=& 6 \\ 2a &=& 10 \\ y - b &=& 3 \\ 2y &=& 14 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ a &=& 5 \\ b &=& 4 \\ y &=& 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} z = 1 + 7\mathrm{i} \\ a = 5 + 4\mathrm{i} \end{array}.$$

Dakle, sistem jednačina ima jedno rešenje, tj. skup rešenja sistema jednačina je skup $\mathcal{R}_J = \{(1 + 7\mathrm{i}, 5 + 4\mathrm{i})\}$.

Drugi način: Iz prve jednačine je $z = 6 + 3\mathrm{i} - \overline{w}$, te ubacivanjem u drugu jednačinu dobijamo

$$\mathrm{i}\overline{6 + 3\mathrm{i} - \overline{w}} + \frac{w}{\mathrm{i}} = 11 - 4\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{i}\left(\overline{6 + 3\mathrm{i}} - \overline{\overline{w}}\right) + \frac{w}{\mathrm{i}} = 11 - 4\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{i}(6 - 3\mathrm{i} - w) + \frac{w}{\mathrm{i}} = 11 - 4\mathrm{i} \ / \cdot \mathrm{i} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -6 + 3\mathrm{i} + w + w = 4 + 11\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad 2w = 10 + 8\mathrm{i} \ / : 2 \quad \Leftrightarrow \quad w = 5 + 4\mathrm{i}.$$

Uvrštavanjem $w = 5 + 4\mathrm{i}$ u prvu jednačinu dobijamo

$$z + \overline{5 + 4\mathrm{i}} = 6 + 3\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z + 5 - 4\mathrm{i} = 6 + 3\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z = 6 + 3\mathrm{i} - 5 + 4\mathrm{i} = 1 + 7\mathrm{i}.$$

Dakle, sistem jednačina ima jedno rešenje $(1 + 7\mathrm{i}, 5 + 4\mathrm{i})$. ☑

Zadatak 8.15 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu*

$$J: \quad z + |z| + 2 = \frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + \mathrm{i}y$. Tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathbb{i}y + \sqrt{x^2+y^2} + 2 = \frac{1+\mathbb{i}}{1-\mathbb{i}} \cdot \frac{1+\mathbb{i}}{1+\mathbb{i}} = \mathbb{i} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{x^2+y^2} + 2 + \mathbb{i}(y-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x + \sqrt{x^2+y^2} + 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y = 1 \\ \sqrt{x^2+1} = -x-2 \end{array} \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{l} y = 1 \\ -x-2 \geq 0 \ \wedge \ x^2+1 = (-x-2)^2 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y = 1 \\ x \leq -2 \ \wedge \ 4x+3 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} y = 1 \\ x \leq -2 \ \wedge \ x = -\frac{3}{4} \end{array},$$

te kako poslednji sistem nema rešenja po $x, y \in \mathbb{R}$, sledi da je $\mathcal{R}_J = \emptyset$.

[1] - Kako se radi o realnom korenu čija je vrednost nenegativna, kvadriranjem jednakosti $\sqrt{x^2+1} = -x-2$ dobijamo ekvivalentnu samo za $-x-2 \geq 0$, a za $-x-2 < 0$ jednačina $\sqrt{x^2+1} = -x-2$ nema rešenja. ☑

Zadatak 8.16 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu*

$$J: \quad z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z = x + \mathbb{i}y$. Tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 - y^2 + 2\mathbb{i}xy\right) - 2(x - \mathbb{i}y) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 - y^2 - 2x + 1\right) + \mathbb{i}(2xy + 2y) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \ \wedge \ 2y(x+1) = 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left((y = 0 \ \vee \ x = -1) \ \wedge \ x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(y = 0 \ \wedge \ x^2 - 2x + 1 = 0\right) \vee \left(x = -1 \ \wedge \ 4 - y^2 = 0\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(y = 0 \ \wedge \ x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1\right) \vee \left(x = -1 \ \wedge \ y_{1,2} = \pm 2\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z \in \mathcal{R}_J = \{1, -1+2\mathbb{i}, -1-2\mathbb{i}\}.$$

☑

Zadatak 8.17 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu*

$$J: \quad \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + 4\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) = 2.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D}_J = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Neka je $z = x + \mathbb{i}y \neq 0$. Tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + 4\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) = 2 \ / \cdot z\overline{z} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \overline{z}^2 + 4(\overline{z} + z) = 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x + y\mathbb{i})^2 + (x - y\mathbb{i})^2 + 4(x - y\mathbb{i} + x + y\mathbb{i}) = 2(x + y\mathbb{i})(x - y\mathbb{i}) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2xy\mathbb{i} - y^2 + x^2 - 2xy\mathbb{i} - y^2 + 8x - 2x^2 - 2y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 8x - 4y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y^2.$$

Dakle, skup rešenja jednačine je skup $\mathcal{R}_J = \left\{ \frac{1}{2}y^2 + y\mathbb{i} \ \middle| \ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ svih tačaka, osim tačke 0, parabole $\mathcal{R}\mathrm{e}(z) = \frac{1}{2}\mathcal{I}\mathrm{m}^2(z)$ u kompleksnoj ravni. ☑

Zadatak 8.18 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ sistem jednačina*

$$J: \quad \left|z^2 - 2\mathbb{i}\right| = 4 \ \wedge \ \left|\frac{z+1+\mathbb{i}}{z-1-\mathbb{i}}\right| = 1.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja sistema jednačina je $\mathcal{D}_J = \mathbb{C} \setminus \{1+\mathbb{i}\}$. Uvođenjem smene $z = x + \mathbb{i}y \neq 1 + \mathbb{i}$ u drugu jednačinu dobijamo

$$\left|\frac{z+1+\mathbb{i}}{z-1-\mathbb{i}}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|z+1+\mathbb{i}|}{|z-1-\mathbb{i}|} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z+1+\mathbb{i}| = |z-1-\mathbb{i}| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |x+1+\mathbb{i}(y+1)| = |x-1+\mathbb{i}(y-1)| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x.$$

Uvrštavanjem $z = x + \mathbb{i}y = x - \mathbb{i}x$ u prvu jednačinu dobijamo

$$\left|(x-\mathbb{i}x)^2 - 2\mathbb{i}\right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left|-2\mathbb{i}\left(x^2+1\right)\right| = 4 \quad \Leftrightarrow \quad |-2\mathbb{i}|\left|x^2+1\right| = 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\left(x^2+1\right) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x = x_1 = -\mathbb{i} \ \vee \ x = x_2 = \mathbb{i}).$$

Za $x_1 = -\mathbb{i}$ dobijano $z_1 = x_1 - \mathbb{i}x_1 = -1 - \mathbb{i}$, a za $x_2 = \mathbb{i}$ dobijano $z_2 = x_2 - \mathbb{i}x_2 = 1 + \mathbb{i}$, odnosno skup rešenja datog sistema jednačina je $\mathcal{R}_J = \{-1-\mathbb{i}, 1+\mathbb{i}\}$. ☑

Zadatak 8.19 *U zavisnosti od realnog parametra $a \geq 0$ rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu*

$$J_a: \quad z + a|z+1| + \mathbb{i} = 0.$$

➥ ***Rešenje:*** Za svako $a \geq 0$ je domen rešavanja jednačine $\mathcal{D}_{J_a} = \mathbb{C}$. Neka je $z = x + \mathbb{i}y$. Tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad x + y\mathbb{i} + a|x+1+y\mathbb{i}| + \mathbb{i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + a\sqrt{(x+1)^2+y^2} + \mathbb{i}(y+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x + a\sqrt{(x+1)^2+y^2} = 0 \ \wedge \ y+1 = 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(y = -1 \ \wedge \ x = -a\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right) \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(y = -1 \ \wedge \ x^2 = a^2\left(x^2+2x+2\right) \ \wedge \ x \leq 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(y = -1 \ \wedge \ \left(a^2-1\right)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0 \ \wedge \ x \leq 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \Bigg(y = -1 \ \wedge \ x \leq 0 \ \wedge \ \bigg(\left(a^2 = 1 \ \wedge \ x+1 = 0\right) \vee \left(a^2 = 0 \ \wedge \ -x^2 = 0\right) \vee$$
$$\vee \left(a^2 \notin \{0,1\} \ \wedge \ x_{1,2} = \frac{-2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 8a^2(a^2-1)}}{2(a^2-1)} = \frac{a}{1-a^2}\left(a \pm \sqrt{2-a^2}\right)\right)\bigg)\Bigg).$$

[1] - Kvadriranjem jednakosti $x = -a\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, pri čemu je potkorena veličina nenegativna, a zbog $a \geq 0$ mora biti $x \leq 0$.

Time dobijamo sledeću diskusiju za rešenja u zavisnosti od vrednosti parametra $a \in [0, \infty)$.

(1) Za $a = 1$ je $y = -1 \ \wedge \ x = -1$, tj. skup rešenja date jednačine je $\mathcal{R}_J = \{-1-\mathbb{i}\}$.

(2) Za $a = 0$ je $y = -1 \ \wedge \ x = 0$, tj. skup rešenja date jednačine je $\mathcal{R}_J = \{-\mathbb{i}\}$.

(3) Za $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ realna rešenja za promenljivu x imamo samo ako je

$$4a^4 - 8a^2\left(a^2-1\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2\left(a^2 - 2\left(a^2-1\right)\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 4a^2\left(-a^2+2\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a^2+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right],$$

tako da se, $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, javljaju sledeći podslučajevi:

(3a) za $a > \sqrt{2}$ nema realnih rešenja po x, pa ni početna kompleksna jednačina nema rešenja, tj. $\mathcal{R}_J = \emptyset$;

(3b) za $a \in (0,1)$ je $\dfrac{a}{1-a^2} > 0$ i $\sqrt{2-a^2} > 1$, pa sledi da je

$$x_1 = \frac{a}{1-a^2}\left(a + \sqrt{2-a^2}\right) > 0, \qquad x_2 = \frac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right) < 0,$$

pa pošto samo x_2 zadovoljava uslov $x \leq 0$, skup rešenja polazne jednačine je $\mathcal{R}_J = \left\{\dfrac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right) - \mathbb{i}\right\}$;

(3c) za $a \in \left(1,\ \sqrt{2}\right]$ važi $\dfrac{a}{1-a^2} < 0$, $\sqrt{2-a^2} \in [0,1)$, i $a + \sqrt{2-a^2} \in \left[\sqrt{2}, 2\right)$ i $a - \sqrt{2-a^2} \in \left[0,\ \sqrt{2}\right)$, pa sledi da je

$$x_1 = \frac{a}{1-a^2}\left(a + \sqrt{2-a^2}\right) < 0, \qquad x_2 = \frac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right) \leq 0,$$

pa pošto i x_1 i x_2 zadovoljava uslov $x \leq 0$, skup rešenja polazne jednačine je $\mathcal{R}_J = \left\{\dfrac{a}{1-a^2}\left(a + \sqrt{2-a^2}\right) - \mathbb{i},\ \dfrac{a}{1-a^2}\left(a - \sqrt{2-a^2}\right) - \mathbb{i}\right\}$. ☑

Zadatak 8.20 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu*

$$J: \quad \overline{z} = z^3.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva.

<u>Prvi način</u>: Neka je $z = x + \mathbb{i}y$. Tada je

$$J \quad \Leftrightarrow \quad x - y\mathbb{i} = (x+y\mathbb{i})^3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^3 - 3xy^2 - x + \mathbb{i}\left(y + 3x^2y - y^3\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x^3 - 3xy^2 - x = 0 \\ y + 3x^2y - y^3 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x\left(x^2 - 3y^2 - 1\right) = 0 \\ y\left(y^2 - 3x^2 - 1\right) = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(x = 0 \ \vee \ x^2 = 3y^2+1\right) \wedge \left(y = 0 \ \vee \ y^2 = 3x^2+1\right)\right) \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x = y = 0 \ \vee \ \left(x = 0 \ \wedge \ y^2 = 1\right) \vee \left(y = 0 \ \wedge \ x^2 = 1\right) \vee \right.$$
$$\left. \vee \left(x^2 = 3y^2+1 \ \wedge \ y^2 = 3x^2+1\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x = y = 0 \ \vee \ (x = 0 \ \wedge \ y \in \{-1,1\}) \vee (y = 0 \ \wedge \ x \in \{-1,1\}) \ \vee \right.$$
$$\left. \vee \left(x^2 = 3y^2+1 \ \wedge \ y^2 = 9y^2+4\right)\right) \quad \overset{[2]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x = y = 0 \ \vee \ (x = 0 \ \wedge \ y \in \{-1,1\}) \vee (y = 0 \ \wedge \ x \in \{-1,1\})) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z \in \mathcal{R}_J = \{0, 1, -1, \mathbb{i}, -\mathbb{i}\}.$$

[1] - Koristeći tautologiju $((p \vee q) \wedge (r \vee s)) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s))$.

[2] - Jednačina $y^2 = 9y^2 + 4$, odnosno njoj ekvivalentna $y^2 = -\frac{1}{2}$ nema rešenja po $y \in \mathbb{R}$.

Drugi način: Neka je $z = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$ (za $\rho \in [0,\infty)$ i $\varphi \in (-\pi,\pi]$). Tada je

$$J \overset{(8.1),(8.5)}{\Leftrightarrow} \rho e^{-\mathbb{i}\varphi} = \rho^3 e^{\mathbb{i}3\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\rho = \rho^3 \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z},\ -\varphi = 3\varphi + 2k\pi\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad ((\rho = 0 \ \vee\ \rho = 1) \ \wedge\ \exists m \in \mathbb{Z},\ 4\varphi = 2m\pi) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(z = 0 \ \vee\ \left(\rho = 1 \ \wedge\ \exists m \in \mathbb{Z},\ \varphi = \frac{m\pi}{2}\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(z = 0 \ \vee\ \left(\rho = 1 \ \wedge\ \varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z \in \mathcal{R}_J = \left\{0, e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}, e^{0\mathbb{i}}, e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{2}}, e^{\mathbb{i}\pi}\right\} = \{0, -\mathbb{i}, 1, \mathbb{i}, -1\}.$$

Treći način: Iz jednačine J sledi da je $|\overline{z}| = \left|z^3\right|$, te koristeći (8.1) i (8.5) dobijamo $|z| = |z|^3$, odakle sledi da je $|z| = 0$ ili $|z| = 1$.

* U slučaju $|z| = 0$ dobijamo rešenje $z = 0$.

* U slučaju $|z| = 1$, iz osobine (8.12) sledi

$$J \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = z^3 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{1} \overset{(8.7)}{=} \{1, \mathbb{i}, -1, -\mathbb{i}\}.$$ ☑

Zadatak 8.21 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu*

$$J: \quad z^4 - |z| = \overline{z}.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Jedno očigledno rešenje je $z = 0$, a ostala rešenja ćemo dobiti uvođenjem smene $z = \rho e^{\mathbb{i}\varphi}$, gde je $\rho > 0$ i $\varphi \in (-\pi,\pi]$.

$$J \quad \Leftrightarrow \quad \left(\rho e^{\mathbb{i}\varphi}\right)^4 - \left|\rho e^{\mathbb{i}\varphi}\right| = \overline{\rho e^{\mathbb{i}\varphi}} \quad \Leftrightarrow \quad \rho^4 e^{\mathbb{i}4\varphi} - \rho = \rho e^{-\mathbb{i}\varphi} \ / : \rho > 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \rho^3 e^{\mathbb{i}4\varphi} - 1 = e^{-\mathbb{i}\varphi} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \rho^3 e^{\mathbb{i}4\varphi} = e^{-\mathbb{i}\varphi} + 1 = e^{-\mathbb{i}\frac{\varphi}{2}}(e^{-\mathbb{i}\frac{\varphi}{2}} + e^{\mathbb{i}\frac{\varphi}{2}}) \overset{(8.15)}{=} e^{-\mathbb{i}\frac{\varphi}{2}} 2\cos\frac{\varphi}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\rho^3 = 2\cos\frac{\varphi}{2} \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4\varphi = -\frac{\varphi}{2} + 2k\pi\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\rho = \sqrt[3]{2\cos\frac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \frac{4k\pi}{9} \in (-\pi,\pi]\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\rho = \sqrt[3]{2\cos\frac{2k\pi}{9}} \ \wedge\ \varphi = \frac{4k\pi}{9},\ k \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\rho = \sqrt[3]{2\cos\frac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \varphi \in \left\{0, \pm\frac{2\pi}{9}, \pm\frac{4\pi}{9}, \pm\frac{6\pi}{9}, \pm\frac{8\pi}{9}\right\}\right).$$

Dakle, skup rešenja jednačine je

$$\mathcal{R}_J = \{0\} \cup \left\{ \sqrt[3]{2\cos\frac{2k\pi}{9}} e^{\mathbb{i}\frac{4k\pi}{9}} \ \middle|\ k \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4\} \right\} =$$
$$= \left\{0, \sqrt[3]{2\cos\frac{\pi}{9}} e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{9}}, \sqrt[3]{2\cos\frac{\pi}{9}} e^{-\mathbb{i}\frac{2\pi}{9}}, \sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{9}} e^{\mathbb{i}\frac{4\pi}{9}}, \sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{9}} e^{-\mathbb{i}\frac{4\pi}{9}},\right.$$
$$\left.\sqrt[3]{2\cos\frac{3\pi}{9}} e^{\mathbb{i}\frac{6\pi}{9}}, \sqrt[3]{2\cos\frac{3\pi}{9}} e^{-\mathbb{i}\frac{6\pi}{9}}, \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{9}} e^{\mathbb{i}\frac{8\pi}{9}}, \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{9}} e^{-\mathbb{i}\frac{8\pi}{9}}\right\}.$$ ☑

Zadatak 8.22 *Neka je* $A_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = \overline{z}\}$*, za* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Odrediti eksplicitno elemente skupova* A_n.

(b) *Za konačne skupove* A_n *odrediti zbir* s_n *njihovih elemenata.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Skup A_n je skup rešenja kompleksne jednačine

$$J: \quad z^n = \overline{z}$$

čiji je domen definisanosti ceo skup kompleksnih brojeva. Smenom $z = x + \mathrm{i}y$ bismo dobili komplikovane realne jednačine sa realnim nepoznatim x i y, te uvodimo smenu $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ gde je $r \in [0, \infty)$ i[11] $\varphi \in [0, 2\pi)$. Sa ovom smenom dobijamo

$$\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad \left(re^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = \overline{re^{\mathrm{i}\varphi}} \quad \Leftrightarrow \quad r^n e^{\mathrm{i}n\varphi} = re^{-\mathrm{i}\varphi} \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (r^n = r \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z}, n\varphi = -\varphi + 2k\pi) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(r \in \{0,1\} \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = \frac{2k\pi}{n+1}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left((r = 0 \ \vee \ r = 1) \ \wedge \ \varphi = \frac{2k\pi}{n+1}, k \in \{0,1,2,\dots,n\}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = 0 \ \vee \ z \in \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+1}} \ \middle| \ k \in \{0,1,2,\dots,n\}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Dakle, $A_n = \{0\} \cup \left\{ e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+}} \ \middle| \ k \in \{0,1,2,\dots,n\}\right\}$. Vidimo da skup A_n ima tačno $n+2$ različitih elemenata.

(b) $$s_n = \sum_{z \in A_n} z = 0 + \sum_{k=0}^{n} e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}}\right)^k \overset{[1]}{=} 1 \cdot \frac{1 - \left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}}\right)^{n+1}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}}} = \frac{1 - e^{\mathrm{i}2\pi}}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}}} = \\ = \frac{1-1}{1 - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}}} = 0.$$

[1] - Primenom formule za zbir prvih $n+1$ članova geometrijske progresije sa koeficijentom progresije $q = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}} \neq 1$ (vidi dodatak A).

☞ Inače, da je $s_n = 0$, mogli smo zaključiti i geometrijski, jer sabiramo vektore jednakog intenziteta koji su raspoređeni simetrično oko koordinatnog početka (tačke skupa $A_n \setminus \{0\}$ čine temena pravilnog $n+1$-ugla). ☑

Zadatak 8.23 *Rešiti po* $z \in \mathbb{C}$ *jednačinu*

$$J: \quad \overline{(z + |z|)^6} = 64\mathrm{i}z.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup kompleksnih brojeva. Neka je $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$, gde je $r \in [0, \infty)$ i $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Sa ovom smenom dobijamo (u jednačini figurišu tako raspoređene operacije da ih je lakše primeniti na kompleksni broj zapisan u

[11] Po potrebi, tj. ako nam je tako zgodno zbog zapisa rešenja, kao što ćemo ovde i videti, možemo za domen promenljive φ, umesto intervala glavne vrednosti argumenta $(0, 2\pi]$, uzeti i neki drugi interval dužine 2π.

eksponencijalnom obliku, i pri tome se, nakon razdvajanja modula i argumenta dobija sistem jednačina po r i φ koji je relativno jednostavan)

$$
\begin{aligned}
J \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{(z+|z|)^6} = 64\mathrm{i}z \quad \Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \overline{\left(re^{\mathrm{i}\varphi} + \left|re^{\mathrm{i}\varphi}\right|\right)^6} = 64\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\varphi}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \overline{(re^{\mathrm{i}\varphi} + r)^6} = 64e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}re^{\mathrm{i}\varphi}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \overline{(r(e^{\mathrm{i}\varphi} + 1))^6} = 64re^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \overline{r^6\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\right)\right)^6} = 64re^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right) \quad \overset{(8.13)}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \overline{r^6e^{\mathrm{i}6\frac{\varphi}{2}}\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^6} = r64e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ \overline{r^5e^{\mathrm{i}3\varphi}64\cos^6\frac{\varphi}{2}} = 64e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ r^5 64\cos^6\frac{\varphi}{2}e^{-\mathrm{i}3\varphi} = 64e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ r^5 \cos^6\frac{\varphi}{2}e^{-\mathrm{i}3\varphi} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ \left(r^5 \cos^6\frac{\varphi}{2} = 1 \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z},\, -3\varphi = \frac{\pi}{2} + \varphi + 2k\pi\right)\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ \left(r^5 = \frac{1}{\cos^6\frac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z},\, -4\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ \left(r = \frac{1}{\cos^{\frac{6}{5}}\frac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \exists k \in \mathbb{Z},\, \varphi = -\frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2} \in (-\pi,\pi]\right)\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z = re^{\mathrm{i}\varphi} \ \wedge\ \left(r = 0 \ \vee\ \left(r = \frac{1}{\cos^{\frac{6}{5}}\frac{\varphi}{2}} \ \wedge\ \varphi \in \left\{-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}\right)\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad z \in \left\{0, \frac{1}{\cos^{\frac{6}{5}}\frac{5\pi}{16}}e^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}, \frac{1}{\cos^{\frac{6}{5}}\frac{\pi}{16}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}, \frac{1}{\cos^{\frac{6}{5}}\frac{3\pi}{16}}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}, \frac{1}{\cos^{\frac{6}{5}}\frac{7\pi}{16}}e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}\right\}. \qquad ☑
\end{aligned}
$$

Zadatak 8.24 *Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačine*

$$J_1: \quad \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = -\mathrm{i}, \qquad\qquad J_2: \quad \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1.$$

➥ ***Rešenje:***

(J_1) Domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D}_{J_1} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. U skupu kompleksnih brojeva, stepenovanje i korenovanje (za istu osnovu) su „uzajamno inverzne operacije” (vidi definiciju kompleksnog korena), te je

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = -\mathrm{i} \ / \sqrt[3]{\ } \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{z} = \sqrt[3]{-\mathrm{i}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} = \sqrt[3]{-\mathrm{i}} - 1 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{-\mathrm{i}} - 1},
\end{aligned}
$$

gde je

$$\sqrt[3]{-\mathrm{i}} = \sqrt[3]{e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}} = \left\{ e^{\frac{-\pi+4k\pi}{6}\mathrm{i}} \;\middle|\; k \in \{0,1,2\} \right\} =$$
$$= \left\{ e^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}, e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}, e^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}, \mathrm{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \right\},$$

te uvrštavanjem ovih vrednosti u $z = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-\mathrm{i}} - 1}$ redom dobijamo rešenja

$$z_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 - \sqrt{3}} =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(2 - \sqrt{3}\right)}\mathrm{i},$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i},$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(2 + \sqrt{3}\right)}\mathrm{i}.$$

(J_2) Domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D}_{J_2} = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$.

$$\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \;/\; \sqrt[n]{\;} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}},\ k \in \{0,1,\dots,n-1\} \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad z + \mathrm{i} = (z - \mathrm{i}) \cdot e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}},\ k \in \{0,1,\dots,n-1\} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z\left(1 - e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}\right),\ k \in \{0,1,\dots,n-1\}.$$

Broj $1 - e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}$, $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ je jednak nuli samo za $k = 0$, a u tom slučaju je poslednja jednačina ekvivalentna sa $0 = -2\mathrm{i}$, te za $k = 0$ ne dobijamo rešenje, a za $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, deleći poslednju jednačinu sa $1 - e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}} \neq 0$ dobijamo ekvivalentnu

$$z = -\mathrm{i} \cdot \frac{1 + e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}}{1 - e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}} = -\mathrm{i} \cdot \frac{e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}\left(e^{-\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}} + e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}\right)}{e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}\left(e^{-\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}} - e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}\right)} \overset{[2]}{=} -\mathrm{i} \cdot \frac{e^{-\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}} + e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}}{e^{-\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}} - e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}}},\ k \in \{1,2,\dots,n-1\},$$

pa primenom Ojlerovih formula (8.13) dobijamo

$$z_k = -\mathrm{i} \cdot \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{-2\mathrm{i}\cos\frac{k\pi}{n}} = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n},\ k \in \{1,2,\dots,n-1\}.$$

Dakle, brojevi $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ čine skup rešenja date jednačine, pa jednačina ima $n-1$ realnih rešenja. Naime, za $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ su $\frac{k}{n}\pi$ različiti uglovi iz intervala $(0,\pi)$, te su $z_k = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$ različiti realni brojevi.

[1] - Za $z \in \mathcal{D}_{J_2}$, množenjem sa $z - \mathrm{i}$ dobijamo ekvivalentnu jednačinu.

[2] - Za $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ je $e^{\frac{k\pi}{n}\mathrm{i}} \neq 0$.

☑

Zadatak 8.25 *Odrediti skup rešenja jednačine*

$$J: \quad \left|\frac{z}{1-\mathbb{i}z}\right| = 1$$

po $z \in \mathbb{C}$, naći njegovu geometrijsku interpretaciju u kompleksnoj ravni, i odrediti skupove argumenata i modula rešenja jednačine.

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je $\mathcal{D}_J = \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{i}\}$.

$$J \overset{(8.9)}{\Leftrightarrow} \frac{|z|}{|1-\mathbb{i}z|} = 1 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} |z| = |1-\mathbb{i}z| \overset{(8.10)}{\Leftrightarrow} z\overline{z} = (1-\mathbb{i}z)\overline{(1-\mathbb{i}z)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} = (1-\mathbb{i}z)(1+\mathbb{i}\overline{z}) \Leftrightarrow z-\overline{z} = -\mathbb{i} \overset{(8.13)}{\Leftrightarrow} 2\mathbb{i}\,\mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -\mathbb{i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{I}\mathrm{m}(z) = -\frac{1}{2}.$$

Znači, skup rešenja date jednačine u kompleksnoj ravni je prava paralelna realnoj osi koja seče imaginarnu osu u tački $-\frac{1}{2}\mathbb{i}$. Skup argumenata je stoga $(-\pi, 0)$, a skup modula je skup svih realnih brojeva većih ili jednakih od $\frac{1}{2}$ jer rešenje jednačine koje ima najmanji moduo je sama tačka $-\frac{1}{2}\mathbb{i}$ (rešenje koje je „najbliže" koordinatnom početku).

[1] - Na domenu rešavanja jednačine. ☑

Zadatak 8.26 *Za dato $n \in \mathbb{N}$ rešiti jednačinu po $x \in \mathbb{R}$ jednačinu*[12]

$$J: \quad \left(1+\frac{x}{n}\mathbb{i}\right)^n - \left(1-\frac{x}{n}\mathbb{i}\right)^n = 0.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine je ceo skup $\mathbb{R}$. Kako brojevi $1 \pm \frac{x}{n}\mathbb{i}$ imaju realan deo veći od nule, njihov argument je $\arg\left(1 \pm \frac{x}{n}\mathbb{i}\right) = \mathrm{arctg}\left(\pm\frac{x}{n}\right) = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}$, te zapisom brojeva $1 \pm \frac{x}{n}\mathbb{i}$ u Ojlerovom obliku dobijamo

$$J \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} \cdot e^{\mathbb{i}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}}\right)^n - \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} \cdot e^{-\mathbb{i}\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}}\right)^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n \cdot e^{\mathbb{i}\cdot n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}} - \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n \cdot e^{-\mathbb{i}\cdot n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n \cdot \left(e^{\mathbb{i}\cdot n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}} - e^{-\mathbb{i}\cdot n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\mathbb{i}\cdot n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}} - e^{-\mathbb{i}\cdot n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(8.13)}{\Leftrightarrow} 2\cdot\mathbb{i}\cdot\sin\left(n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\cdot\mathrm{arctg}\,\frac{x}{n} = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = n\cdot\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = n\cdot\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n},\ k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}\setminus\left\{\frac{n}{2}\right\}.$$

Dakle, jednačina ima n različitih rešenja ako je n neparno, odnosno $n-1$ različitih rešenja ako je n parno.

[1] - Očigledno je $\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n \neq 0.$

---

[12] Ovde se radi o kompleksnoj jednačini sa realnom nepoznatom.

☑

☞ Zahvaljujući geometrijskim interpretacijama računskih operacija u skupu kompleksnih brojeva, neke geometrijske probleme u ravni možemo rešavati algebarski u skupu $\mathbb{C}$. Kao što ste već videli, važi i obratno, tj. pri rešavanju algebarskih zadataka u $\mathbb{C}$ možemo koristiti geometrijska svojstva kompleksnih brojeva i računskih operacija.

Zadatak 8.27 *Neka je*

$$J: \quad (z-\alpha)^4 = \beta$$

jednačina po nepoznatoj $z \in \mathbb{C}$. *Odrediti vrednosti parametara* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *tako da među rešenjima jednačine budu i brojevi* 0 *i* 1.

➥ ***Rešenje:*** Kako je

$(z-\alpha)^4 = \beta \quad \Leftrightarrow \quad z-\alpha = \sqrt[4]{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad z = \alpha + \sqrt[4]{\beta},$

rešenja jednačine $(z-\alpha)^4 = \beta$ u kompleksnoj ravni predstavljaju (vidi stranu 124) temena kvadrata $z_1z_2z_3z_4$ upisanog u kružnicu sa centrom (presekom dijagonala) u tački α i poluprečnika $\sqrt[4]{|\beta|}$. Brojevi 0 i 1 su dva od četiri temena takvog kvadrata u jednom od sledeća tri slučaja.

(1) $z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 1+\mathbb{i}, \quad z_4 = \mathbb{i}$ (vidi sliku 1).

U ovom slučaju je $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{i}$ (centar opisane kružnice), a $\beta = re^{\mathbb{i}\varphi}$ ćemo dobiti iz uslova

[$1a$] $\sqrt[4]{|\beta|} = \sqrt[4]{r} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (poluprečnik opisane kružnice),

[$1b$] $\sqrt[4]{\beta} = z_i - \alpha = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{i}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{i}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{i}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{i}\right\}$ (temena kvadrata).

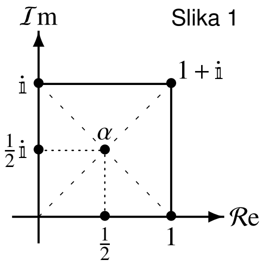
Iz uslova [$1a$] dobijamo $r = \frac{1}{4}$, a iz uslova [$1b$] i formule za korenovanje (8.7) sledi $\left\{ \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \arg(z_i - \alpha) = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right\}$, iz čega dobijamo da je $\varphi = \pi$. Dakle, $\beta = \frac{1}{4}e^{\mathbb{i}\pi} = -\frac{1}{4}$.

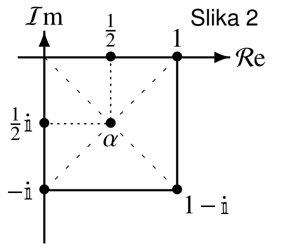
(2) $z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = 1-\mathbb{i}, \quad z_4 = -\mathbb{i}$ (vidi sliku 2).

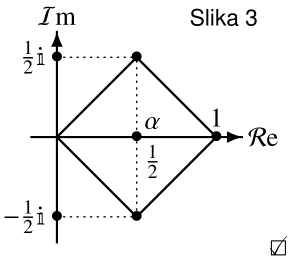
Istim postupkom kao u slučaju (1) dobijamo $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{i}$ i $\beta = -\frac{1}{4}$.

(3) $z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{i}, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{i}$ (vidi sliku 3).

Istim postupkom kao u slučaju (1) dobijamo $\alpha = \frac{1}{2}$ i $\beta = \frac{1}{16}$.







☑

Zadatak 8.28 *Odrediti temena kvadrata $z_1z_2z_3z_4$ ako se teme $z_1 \in \sqrt{2i}$ nalazi se u prvom kvadrantu, a z_3 je rešenje jednačine*

$$J: \quad z(7+\mathrm{i}) - \overline{z}\mathrm{i} + 2(z+\mathrm{i}) - 20\mathrm{i} = 3 + 9\mathrm{i}.$$

➥ ***Rešenje:*** Domen rešavanja jednačine J je $\mathcal{D}_J = \mathbb{C}$, te uvodeći smenu $z = x + \mathrm{i}y$ dobijamo

$$J \quad \Leftrightarrow \quad (x+\mathrm{i}y)(7+\mathrm{i}) - (x-\mathrm{i}y)\mathrm{i} + 2(x+\mathrm{i}(y+1)) - 3 - 29\mathrm{i} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x - 2y - 3 + \mathrm{i}(9y-27) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 9x-2y-3=0 \\ 9y-27=0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x=1 \\ y=3 \end{array}.$$

Dakle, $z_3 = 1 + 3\mathrm{i}$. Kako je

$$\sqrt{2\mathrm{i}} = \sqrt{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} \overset{(8.7)}{=} \left\{ \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \right\} \overset{(8.2)}{=} \{1+\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\},$$

pri čemu z_1 leži u prvom kvadrantu, sledi $z_1 = 1 + \mathrm{i}$. Neka je z_0 presek dijagonala kvadrata:

$$z_0 \overset{(8.16)}{=} \frac{1}{2}(z_1 + z_3) = 1 + 2\mathrm{i}.$$

Temena z_2 i z_4 sada možemo dobiti npr. rotacijom temena z_1 oko tačke z_0 za $\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$:

$$z_{2,4} = \rho_{z_0, \pm\frac{\pi}{2}}(z_1) \quad \overset{(8.4)}{\Rightarrow} \quad z_{2,4} = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 1 + 2\mathrm{i} + (-\mathrm{i})(\pm\mathrm{i}),$$

odnosno $z_2 = 2 + 2\mathrm{i}$ i $z_4 = 2\mathrm{i}$.

☞ Naravno, iz $\mathcal{R}\mathrm{e}(z_1) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z_0) = \mathcal{R}\mathrm{e}(z_3) = 1$ sledi da je dijagonala z_1z_3 kvadrata paralelna sa y-osom, a tada dijagonala z_2z_4 mora biti paralelna sa x-osom, odakle sledi $\mathcal{I}\mathrm{m}(z_2) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z_4) = \mathcal{I}\mathrm{m}(z_0) = 2$. S druge strane, iz $\left|\overrightarrow{z_0z_1}\right| = |z_1 - z_0| = |-\mathrm{i}| = 1$ sledi $\left|\overrightarrow{z_0z_2}\right| = |z_2 - z_0| = 1$ i $\left|\overrightarrow{z_0z_4}\right| = |z_4 - z_0| = 1$, te tako i bez primene rotacije možemo dobiti $z_{2,4} = z_0 \pm 1$. ☑

Zadatak 8.29 *Neka je $z_1 = 1$ teme kvadrata. Ako je centar kružnice opisane oko kvadrata rešenje jednačine*

$$J: \quad z(3+\mathrm{i}) + \overline{z}(1+\mathrm{i}) + (z\mathrm{i}+1)\mathrm{i} = 6 + 6\mathrm{i},$$

izračunati ostala temena kvadrata.

➥ ***Rešenje:*** Označimo centar opisane kružnice (presek dijagonala) sa z_0. Uvođenjem smene $z = x + \mathrm{i}y$ dobijamo

$$J \quad \Leftrightarrow \quad (x+\mathrm{i}y)(3+\mathrm{i})+(x-\mathrm{i}y)(1+\mathrm{i})+(1-y+x\mathrm{i})\mathrm{i} = 6+6\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x-6+\mathrm{i}(2x+y-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 3x-6=0 \\ 2x+y-5=0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x=2 \\ y=1 \end{array}.$$

Dakle, $z_0 = 2+\mathrm{i}$. Sada temena z_2, z_3 i z_4 možemo dobiti rotacijom tačke z_1 oko z_0 redom za uglove $\frac{\pi}{2}$, π i $\frac{3\pi}{2}$, tj. primenom formule (8.4) dobijamo

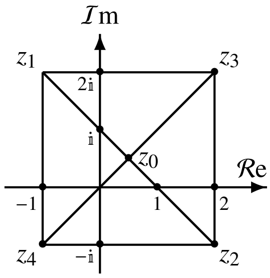
$$z_2 = \rho_{z_0,\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2+\mathrm{i}+(-1-\mathrm{i})\mathrm{i} = 3,$$

$$z_3 = \rho_{z_0,\pi}(z_1) = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\mathrm{i}\pi} = 2+\mathrm{i}+(-1-\mathrm{i})(-1) = 3+2\mathrm{i},$$

$$z_4 = \rho_{z_0,-\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_0 + (z_1 - z_0)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2+\mathrm{i}+(-1-\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1+2\mathrm{i}.$$ ☑

Zadatak 8.30 *Dati su kompleksni brojevi $z_1 = -1+2\mathrm{i}$ i $z_2 = 2-\mathrm{i}$. Izračunati kompleksne brojeve z_3 i z_4 tako da u kompleksnoj ravni brojevi z_1 i z_2 budu naspramna temena kvadrata $z_1z_3z_2z_4$.*

➥ ***Rešenje:*** Sredina dijagonale traženog kvadrata je $z_0 \overset{(8.16)}{=} \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.



Rotacijom oko tačke z_0 za ugao od $-\frac{\pi}{2}$ se tačka z_1 se preslika u tačku z_3, te primenom (8.4) dobijamo

$$z_3 = z_0 + (z_1 - z_0)e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)(-\mathrm{i}) = 2+2\mathrm{i}.$$

Tačku z_4 možemo takođe dobiti primenom rotacije, ili još jednostavnije na sledeći način:

$\overrightarrow{z_0z_4} = \overrightarrow{z_3z_0} \quad \Rightarrow \quad z_4 - z_0 = z_0 - z_3 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad z_4 = 2z_0 - z_3 = -1-\mathrm{i}.$

☑

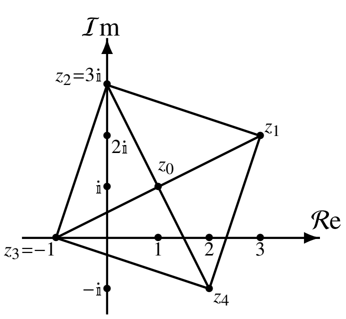
Zadatak 8.31 *Neka je $z_1 = 3+2\mathrm{i}$ jedno teme kvadrata.*

(a) *Odrediti preostala temena z_2, z_3 i z_4 ako se zna da z_2 leži na pozitivnom delu imaginarne ose, a z_3 leži na realnoj osi.*

(b) *Napisati jednačinu četvrtog stepena čiji je skup rešenja $\{z_1, z_4\}$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Iz uslova za z_2 i z_3 imamo da je $z_2 = a\mathrm{i}$ i $z_3 = b$ za neke $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.



Neka je z_0 presek dijagonala traženog kvadrata. Pošto se radi o temenima kvadrata, sledi da je $\rho_{z_2,\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_3$ ili $\rho_{z_2,-\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_3$. U prvom slučaju je

$\rho_{z_2,-\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_3 \overset{(8.4)}{\Rightarrow} z_3 = (z_1 - z_2)e^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad b = a\mathrm{i} + (3+2\mathrm{i}-a\mathrm{i})(-\mathrm{i}) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad b+a-2+\mathrm{i}(3-a) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (b+a-2=0 \ \wedge \ 3-a=0) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (a=3 \ \wedge \ b=-1) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad (z_2 = 3\mathrm{i} \ \wedge \ z_3 = -1).$

U drugom slučaju dobijamo

$$\rho_{z_2,\frac{\pi}{2}}(z_1) = z_3 \stackrel{(8.4)}{\Rightarrow} z_3 = (z_1 - z_2)e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} \Rightarrow b = a\mathrm{i} + (3 + 2\mathrm{i} - a\mathrm{i})\mathrm{i} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b - a + 2 + \mathrm{i}(-3 - a) = 0 \Rightarrow (b - a + 2 = 0 \wedge -3 - a = 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a = -3 \wedge b = -5) \Rightarrow (z_2 = -5\mathrm{i} \wedge z_3 = -3),$$

alu u ovom slučaju se z_2 nalazi na negativnom delu imaginarne ose, tako da ovo rešenje otpada. Dakle, $z_2 = 3\mathrm{i}$ i $z_3 = -1$.

Tačku z_4 možemo naći na isti način kao i tačke z_2 i z_3, a možemo i jednostavnije. Kako je z_0 sredina duži z_1z_3, sledi

$z_0 = \frac{z_1+z_3}{2} = 1 + \mathrm{i}$,

a s druge strane je

$z_0 = \frac{z_2+z_4}{2} \Rightarrow z_4 = 2z_0 - z_2 = 2 - \mathrm{i}$.

(b) Jednačina četvrtog stepena je jednačina koja se dobije kada se polinom četvrtog stepena izjednači sa nulom. Dakle, tražimo polinom četvrtog stepena čiji je skup korena $\{z_1, z_4\}$. Postoje tačno tri rešenja zadatka:

- $(z - z_1)(z - z_4)^3 = 0$, odnosno
  $z^4 - (9 - \mathrm{i})z^3 + (21 + 15\mathrm{i})z^2 - (44 - 29\mathrm{i})z + (28 - 29\mathrm{i}) = 0$.
- $(z - z_1)^2(z - z_4)^2 = 0$, odnosno
  $z^4 - (10 + 2\mathrm{i})z^3 + (40 + 12\mathrm{i})z^2 - (78 + 26\mathrm{i})z + (63 + 16\mathrm{i}) = 0$.
- $(z - z_1)^3(z - z_4) = 0$, odnosno
  $z^4 - (11 + 5\mathrm{i})z^3 + (39 + 39\mathrm{i})z^2 - (75 + 11\mathrm{i})z - (28 + 101\mathrm{i}) = 0$.

☑

Zadatak 8.32 *U kompleksnoj ravni odrediti jednačinu kružnice K i tačku z_1 tako da je $\mathcal{I}\mathrm{m}(z_1) < 0$, i da tačke z_1, $z_2 = 2\sqrt{3} + \mathrm{i}$ i $z_3 = 3\mathrm{i}$ budu temena jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu K.*

➥ ***Rešenje:*** Kako z_1, z_2, i z_3 treba da budu temena jednakostraničnog trougla (čiji su uglovi po $\frac{\pi}{3}$), tačku z_1 ćemo dobiti rotacijom tačke z_3 oko tačke z_2 za ugao $\frac{\pi}{3}$ ili $-\frac{\pi}{3}$:

$$\left(\rho_{z_2,\frac{\pi}{3}}(z_3) = z_1 \vee \rho_{z_2,-\frac{\pi}{3}}(z_3) = z_1\right) \stackrel{(8.4)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \left(z_1 = z_2 + (z_3 - z_2)\cdot e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \vee z_1 = z_2 + (z_3 - z_2)\cdot e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(z_1 = 2\sqrt{3} + \mathrm{i} + \left(2\mathrm{i} - 2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = -\mathrm{i} \vee \right.$$
$$\left. z_1 = 2\sqrt{3} + \mathrm{i} + \left(2\mathrm{i} - 2\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3} + 5\mathrm{i}\right),$$

ali zbog $\mathcal{I}\mathrm{m}(z_1) < 0$ imamo jedinstveno rešenje $z_1 = -\mathrm{i}$. Obeležimo sa z_0 centar tražene kružnice K. Pošto je $\sphericalangle z_3z_0z_2 = -\frac{2\pi}{3}$, tačku z_0 dobijamo na sledeći način:

$$\rho_{z_0,-\frac{2\pi}{3}}(z_3) = z_2 \stackrel{(8.4)}{\Rightarrow} z_2 = z_0 + (z_3 - z_0)\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \Rightarrow z_0 = \frac{z_2 - z_3\cdot e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \mathrm{i}.$$

Poluprečnik opisane kružnice je

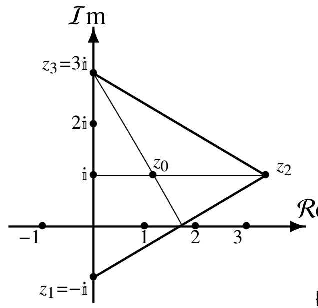
$r = \left|\overrightarrow{z_0 z_1}\right| = |z_1 - z_0| = \left| -\frac{2}{\sqrt{3}} - 2\mathrm{i} \right| = \sqrt{\frac{4}{3} + 4} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$

Prema tome, jednačina tražene kružnice je

$\mathsf{K}(z_0, r): \quad |z - z_0| = r,$

odnosno

$\mathsf{K}(z_0, r): \quad \left| z - \frac{2}{\sqrt{3}} - \mathrm{i} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}.$

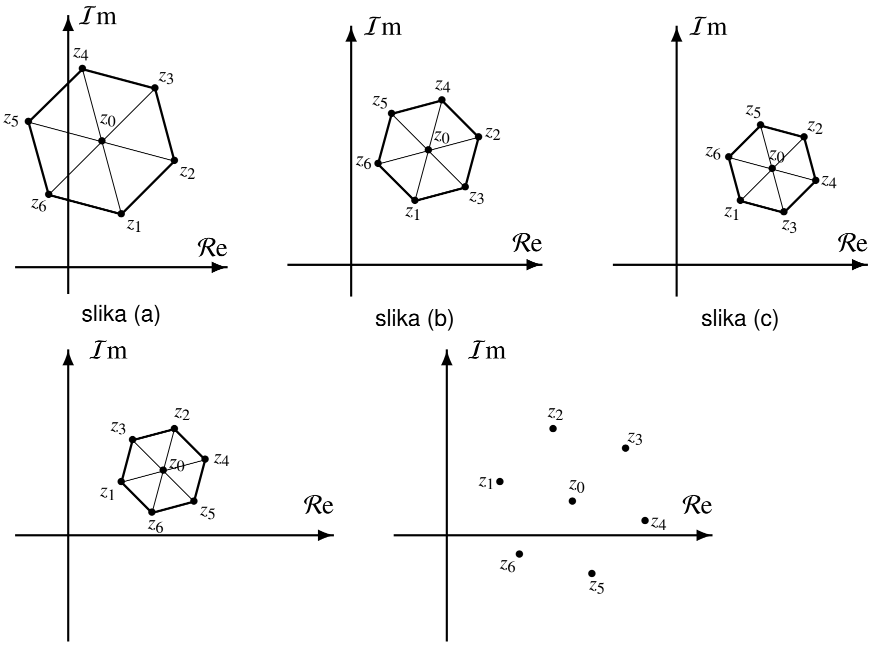


☑

Zadatak 8.33 *Neka je $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ i $z_2 = 2 + 2\mathrm{i}$. U kompleksnoj ravni izračunati ostala temena pravilnog šestougla $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6$, kod kojeg temena ne moraju biti označena redom (u krug).*

➥ ***Rešenje:*** Označimo sa z_0 težište (centar opisane kružnice) šestougla. Ako su u i v dva susedna temena šestougla, tada je $\sphericalangle u z_0 v = \frac{\pi}{3}$ i $\sphericalangle u v z_0 = \sphericalangle v u z_0 = \frac{\pi}{3}$.

Imaćemo 5 različitih rešenja tj. slučajeva, kao na sledećim slikama:



slika (a) slika (b) slika (c)

slika (d) slika (e)

U svakom od ovih slučajeva ćemo prvo izračunati tačku (težište) z_0, a zatim, za poznato teme u izračunavati sledeće (susedno) teme v koristeći formulu za rotaciju (8.4):

$$v = z_0 + (u - z_0)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

Težište z_0 ćemo takođe izračunavati koristeći formulu za rotaciju (8.4). Naime, ako za data temena z_1 i z_2 važi $\sphericalangle z_1z_0z_2 = k\frac{\pi}{3}$ za neko $k \in \{1,2,3,4,5\}$, tada je $z_2 = \rho_{z_0,k\frac{\pi}{3}}(z_1)$ odnosno $z_2 = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}}$, odakle (rešavanjem ove jednačine po z_0) dobijamo

$$z_0 = \frac{z_2 - z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}}} = \frac{z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2}{e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - 1} = \frac{z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2}{e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}}\left(e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}} - e^{-\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}}\right)} =$$
$$= \frac{z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2}{e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}} - e^{-\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}}}e^{-\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}} \overset{(8.15)}{=} \frac{z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2}{2\mathbb{i}\sin\frac{k\pi}{6}}e^{-\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{-\mathbb{i}}{-\mathbb{i}} = \frac{z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2}{2\sin\frac{k\pi}{6}}e^{-\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}} \cdot (-\mathbb{i}) =$$
$$= \frac{z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2}{2\sin\frac{k\pi}{6}}e^{-\mathbb{i}k\frac{\pi}{6}}e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{6}}\left(z_1e^{\mathbb{i}k\frac{\pi}{3}} - z_2\right)e^{-\mathbb{i}\frac{\pi(k+3)}{6}}.$$

Za izračunavanje temena možemo u raznim slučajevima koristiti i razne druge metode. Na primer, ako su u i v dva poznata susedna temena i treba izračunati treće susedno teme t, pri čemu je npr. $\sphericalangle uvt = \frac{2\pi}{3}$ (a na isti način postupamo i u slučaju kada je $\sphericalangle uvt = -\frac{2\pi}{3}$), tada je $t = \rho_{v,\frac{2\pi}{3}}(u)$ (teme t dobijamo rotacijom tačke u oko tačke v za ugao $\frac{2\pi}{3}$), te primenom formule (8.4) dobijamo $t = v + (u - v)e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}$. Ili, npr. ako su u i v dva suprotna temene, tada za poznato teme u i težište z_0, teme v možemo izračunati koristeći da je $\overrightarrow{uz_0} = \overrightarrow{z_0v}$, odnosno $z_0 - u = v - z_0$, odakle dobijamo $v = 2z_0 - u$.

(a) Ako je šestougao kao na slici (a), tada je

$$z_0 = \frac{z_2 - z_1e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{2 + 2\mathbb{i} - (1+\mathbb{i})\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbb{i}\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} =$$
$$= \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}-3}{4} + \left(\frac{3\sqrt{3}+3}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i}.$$

Dalje, u ovom pravilnom šestouglu imamo da je $\overrightarrow{z_0z_3} = \overrightarrow{z_1z_2}$ tj. $z_3 - z_0 = z_2 - z_1$, odakle dobijamo

$$z_3 = z_0 + z_2 - z_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i}.$$

Analogno, iz $\overrightarrow{z_0z_6} = \overrightarrow{z_2z_1}$ tj. $z_6 - z_0 = z_1 - z_2$ sledi

$$z_6 = z_0 + z_1 - z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i}.$$

Na isti način, iz $\overrightarrow{z_3z_4} = \overrightarrow{z_1z_6}$ i $\overrightarrow{z_0z_5} = \overrightarrow{z_1z_6}$ sledi

$$z_4 = z_3 + z_1 - z_6 = 2 - \sqrt{3} + \left(2 + \sqrt{3}\right)\mathbb{i},$$
$$z_5 = z_0 + z_1 - z_6 = 1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right)\mathbb{i}.$$

(b) Ako je šestougao kao na slici (b), tada je

$$z_0 = \frac{z_2 - z_1e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}}{1 - e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{2 + 2\mathbb{i} - (1+\mathbb{i})\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbb{i}\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} \cdot \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} =$$

$$= \frac{\frac{15+3\sqrt{3}}{4} - \frac{5\sqrt{3}-3}{4} + \left(\frac{5\sqrt{3}+3}{4} + \frac{15-3\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathbb{i}.$$

Dalje, u ovom pravilnom šestouglu imamo da je $\overrightarrow{z_1z_3} = \overrightarrow{z_0z_2}$ tj. $z_3 - z_1 = z_2 - z_0$, odakle dobijamo

$$z_3 = z_1 + z_2 - z_0 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathbb{i}.$$

Analogno, iz $\overrightarrow{z_2z_4} = \overrightarrow{z_3z_0}$ tj. $z_4 - z_2 = z_0 - z_3$ sledi

$$z_4 = z_2 + z_0 - z_3 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathbb{i}.$$

Na isti način, iz $\overrightarrow{z_4z_5} = \overrightarrow{z_3z_1}$ i $\overrightarrow{z_0z_6} = \overrightarrow{z_2z_0}$ sledi

$$z_5 = z_4 + z_1 - z_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i},$$

$$z_6 = 2z_0 - z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathbb{i}.$$

(c) U slučaju kada je šestougao kao na slici (c), z_0 je sredina duži z_1z_2 te je

$$z_0 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{i}.$$

Dalje, redom iz $z_3 = \rho_{z_0,\frac{\pi}{3}}(z_1)$, $\overrightarrow{z_3z_4} = \overrightarrow{z_1z_0}$, $\overrightarrow{z_0z_5} = \overrightarrow{z_3z_0}$ i $\overrightarrow{z_0z_6} = \overrightarrow{z_4z_0}$ sledi

$$z_3 = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\mathbb{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{i} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{i}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right) = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i},$$

$$z_4 = z_3 + z_0 - z_1 = \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i},$$

$$z_5 = 2z_0 - z_3 = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i},$$

$$z_6 = 2z_0 - z_4 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i}.$$

(d) Ako je šestougao kao na slici (d), tada je $z_2 = \rho_{z_0,-\frac{2\pi}{3}}(z_1)$, te je

$$z_0 = \frac{z_2 - z_1e^{-\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}}{1 - e^{-\mathbb{i}\frac{2\pi}{3}}} = \frac{2 + 2\mathbb{i} - (1+\mathbb{i})\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbb{i}\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} \cdot \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} =$$

$$= \frac{\frac{15-3\sqrt{3}}{4} + \frac{5\sqrt{3}+3}{4} + \left(\frac{3\sqrt{3}+15}{4} + \frac{3-5\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i}}{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathbb{i}.$$

Dalje, u ovom pravilnom šestouglu, redom iz $\overrightarrow{z_1z_3} = \overrightarrow{z_0z_2}$, $\overrightarrow{z_0z_4} = \overrightarrow{z_1z_0}$, $\overrightarrow{z_0z_5} = \overrightarrow{z_3z_0}$ i $\overrightarrow{z_0z_6} = \overrightarrow{z_2z_0}$, dobijamo

$$z_3 = z_1 + z_2 - z_0 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\mathbb{i},$$

$$z_4 = 2z_0 - z_1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathbb{i},$$

$$z_5 = 2z_0 - z_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i},$$

$$z_6 = 2z_0 - z_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathbb{i}.$$

(e) Ako je šestougao kao na slici (e), tada je $z_2 = \rho_{z_0,-\frac{\pi}{3}}(z_1)$, te je

$$z_0 = \frac{z_2 - z_1 e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-\mathbb{i}\frac{\pi}{3}}} = \frac{2 + 2\mathbb{i} - (1+\mathbb{i})\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}\right)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbb{i}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i}} =$$

$$= \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}+3}{4} + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{4} + \frac{3-3\sqrt{3}}{4}\right)\mathbb{i}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i}.$$

Dalje, u ovom pravilnom šestouglu, redom iz $\overrightarrow{z_2z_3} = \overrightarrow{z_1z_0}$, $\overrightarrow{z_0z_4} = \overrightarrow{z_1z_0}$, $\overrightarrow{z_0z_5} = \overrightarrow{z_2z_0}$ i $\overrightarrow{z_0z_6} = \overrightarrow{z_3z_0}$, dobijamo

$$z_3 = z_2 + z_0 - z_1 = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i},$$

$$z_4 = 2z_0 - z_1 = 2 + \sqrt{3} + \left(2 - \sqrt{3}\right)\mathbb{i},$$

$$z_5 = 2z_0 - z_2 = 1 + \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)\mathbb{i},$$

$$z_6 = 2z_0 - z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbb{i}.$$

☑

Zadatak 8.34 *Neka su, u kompleksnoj ravni, z_1 i z_2 susedna temena pravilnog n-tougla $z_1z_2z_3\ldots z_n$ kod kojeg su temena označena redom u krug. U funkciji od z_1 i z_2 izraziti ostala temena tog n-tougla.*

➥ ***Rešenje:*** Označimo sa z_0 težište (centar opisane kružnice) n-tougla.

Imaćemo dva rešenja, jedno kada je kretanje po tačkama $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ u pozitivnom matematičkom smeru, a drugo kada je to kretanje u negativnom matematičkom smeru. U prvom slučaju je $\sphericalangle z_1z_0z_2 = \frac{2\pi}{n}$, a u drugom i $\sphericalangle z_1z_0z_2 = -\frac{2\pi}{n}$.

U prvom slučaju, primenom formule za rotaciju (8.4) imamo

$$z_2 = \rho_{z_0,\frac{2\pi}{n}}(z_1) \quad \Rightarrow \quad z_2 - z_0 = (z_1 - z_0)e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{n}} \quad \Rightarrow \quad z_0 = \frac{z_1 e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{n}} - z_2}{e^{\mathbb{i}\frac{2\pi}{n}} - 1},$$

a zatim iteravno, za $k \in \{2, 3, 4, \ldots, n\}$

$z_k = \rho_{z_0,\frac{2(k-1)\pi}{n}}(z_1) \quad\Rightarrow\quad z_k - z_0 = (z_1 - z_0)e^{\mathrm{i}\frac{2(k-1)\pi}{n}} \quad\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad z_k = z_0 + (z_1 - z_0)e^{\mathrm{i}\frac{2(k-1)\pi}{n}}, \ \ k \in \{2,3,4,\dots,n\}.$

U drugom slučaju na isti način dobijamo

$$z_0 = \frac{z_1 e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} - z_2}{e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} - 1}, \qquad z_k = z_0 + (z_1 - z_0)e^{-\mathrm{i}\frac{2(k-1)\pi}{n}}, \ \ k \in \{2,3,4,\dots,n\}.$$ ☑

Zadatak 8.35 *Ako su z_1, z_2 i z_3 temena jednakostraničnog trougla, dokazati da važi*

$$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0.$$

➥ ***Rešenje:*** Izrazićemo svaki od sabiraka preko jednog od njih - na primer preko $(z_1 - z_2)^2$:

$\rho_{z_2,-\frac{\pi}{3}}(z_1) = z_3 \quad \overset{(8.4)}{\Rightarrow} \quad z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)\cdot e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad (z_2 - z_3)^2 = (z_1 - z_2)^2 \cdot e^{-2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}},$

i slično

$\rho_{z_1,\frac{\pi}{3}}(z_2) = z_3 \quad \overset{(8.4)}{\Rightarrow} \quad z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\cdot e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} \quad\Rightarrow\quad (z_3 - z_1)^2 = (z_2 - z_1)^2 \cdot e^{2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}.$

Sada, primenom Ojlerovih formula (8.13) dobijamo

$(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = (z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \cdot e^{-2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} + (z_1 - z_2)^2 \cdot e^{2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} =$

$= (z_1 - z_2)^2\left(1 + e^{-2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} + e^{2\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right) \overset{(8.13)}{=} (z_1 - z_2)^2\left(1 + 2\cos\frac{-2\pi}{3}\right) =$

$= (z_1 - z_2)^2\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0.$ ☑

Zadatak 8.36 *Neka su z_1, z_2, z_3, z_4 jedinični kompleksni brojevi. Dokazati da je $z_1z_2z_3z_4$ pravougaonik ako i samo ako je $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.*

➥ ***Rešenje:***

☞ Ako je $z_1z_2z_3z_4$ pravougaonik za čija temena z_i važi da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, tada su vektori $\overrightarrow{Oz_1}$ i $\overrightarrow{Oz_3}$ istog pravca i inteziteta a suprotnog smera, jer dijagonala pravougaonika upisanog u kružnicu je prečnik te kružnice, pa je njihov zbir nula. Isto tako je i $\overrightarrow{Oz_2} + \overrightarrow{Oz_4} = 0$ što znači da je $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

☜ Neka je sada $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, i neka su u i w kompleksni brojevi takvi da je $\overrightarrow{z_1u} = \overrightarrow{Oz_2}$ i $\overrightarrow{uw} = \overrightarrow{Oz_3}$. Tada iz $\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_2} + \overrightarrow{Oz_3} + \overrightarrow{Oz_4} = 0$ i $\overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{z_1u} + \overrightarrow{uw} + \overrightarrow{wO} = 0$ sledi $\overrightarrow{wO} = \overrightarrow{Oz_4}$. Kako su svi vektori jedinični, to je Oz_1uw romb, pa je $\overrightarrow{wO} = \overrightarrow{uz_1} = -\overrightarrow{Oz_2}$. Sada iz $\overrightarrow{wO} = -\overrightarrow{Oz_2}$ i $\overrightarrow{wO} = \overrightarrow{Oz_4}$ sledi $-\overrightarrow{Oz_2} = \overrightarrow{Oz_4}$, što znači da je z_2z_4 prečnik jedinične kružnice, a analogno to važi i za z_1z_3, pa je $z_1z_2z_3z_4$ pravougaonik. ☑

Polinomi, polinomski izrazi i polinomske funkcije

Polinom nad proizvoljnim poljem[13] $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ je uređena k-torka elemenata polja $\mathbf{F}$ kod koje je poslednja komponenta različita od „nule” 0 polja $\mathbf{F}$, odnosno, polinom je

[13]Polinome je moguće definisati i nad prstenom.

$p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, gde je $n \in \mathbb{N}$, $p_i \in F$, $p_n \neq 0$. Pri tome ćemo koeficijent p_0 zvati ***slobodni član***, koeficijent p_n zvati ***vodeći član***, a $n = \deg(p)$ je ***stepen*** polinoma p. Sa $F[x]$ se označava skup svih polinoma nad poljem $\mathbf{F}$. Uređena trojka $\mathbf{F}[x] = (F[x], +, \cdot)$ (gde su + i · redom sabiranje i množenje polinoma) je komutativan prsten s jedinicom.

Polinomu $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ nad poljem $\mathbf{F}$ jednoznačno odgovara ***polinomski izraz*** $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$, tj. svaki polinom možemo poistovećivati sa odgovarajućim polinomskim izrazom[14], te je tako uobičajeno da za polinomski izraz $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ kažemo da je to polinom p.

Polinomska funkcija je funkcija definisana polinomskim izrazom, dakle funkcija $p : F \to F$, $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$, gde je $p_i \in F$. Polinomske funkcije u opštem slučaju ne možemo poistovećivati sa polinomima, jer u slučaju konačnih polja $\mathbf{F}$, različitim polinomima (tj. polinomskim izrazima) može da bude definisana ista polinomska funkcija (vidi [RD05]). Za beskonačna polja $\mathbf{F}$ postoji uzajamno jednoznačna korespodencija između polinoma i polinomskih funkcija, te u takvom slučaju možemo reći „polinom”, a pri tome misliti na odgovarajuću polinomsku funkciju, i obratno.

Koren ili ***nula*** polinoma $p \in F[x]$ je nula odgovarajuće polinomske funkcije, tj. rešenje jednačine $p(x) = 0$, tj. svako $x_0 \in F$ za koje važi $p(x_0) = 0$. Element $x_0 \in F$ je koren polinoma p ako i samo ako je polinom $p(x)$ deljiv polinomom $x - x_0$. Na osnovu ***Bezuove teoreme***, ostatak pri delenju polinoma $p(x)$ nad nekim poljem $\mathbf{F}$ polinomom $x - \alpha$, jednak je vrednosti $p(\alpha)$.

Postupak za delenje polinoma $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ (nad bilo kojim poljem) se, u slučaju kada je delilac polinom prvog stepena tj. oblika $(x - \alpha)$, može skraćeno zapisati tzv. ***Hornerovom šemom***:

	p_n	p_{n-1}	p_{n-2}	$\cdots$	p_2	p_1	p_0
α	q_{n-1}	q_{n-2}	q_{n-3}	$\cdots$	q_1	q_0	q_{-1}

gde je $q_{n-1} = p_n$ i $q_k = \alpha q_{k-1} + p_{k-1}$ za sve $k \in \{n-2, n-3, \ldots, 1, 0, -1\}$, pri čemu je $q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \ldots + q_1 x + q_0$ količnik, a q_{-1} ostatak pri delenju.

S obzirom na prethodnu napomenu, Hornerovom šemom možemo proveriti da li je neki element polja α koren polinoma - ako se za ostatak pri delenju dobije 0, tada α jeste koren polinoma.

U Hornerovoj šemi se u graničnoj vrsti moraju napisati *svi* koeficijenti, tj. ne smeju se preskočiti koeficijenti 0.

Primer 8.3 *Neka je $p(x) = x^3 - 3x + 1$ i $q(x) = x + 1$. Izračunajmo količnik i ostatak delenja polinoma p polinomom q, s jedne strane primenom standardnog algoritma za delenje polinoma, i s druge strane primenom Hornerove šeme.*

(a) *Primenom standarnog algoritma dobijamo*

[14]Iako su to formalno različiti pojmovi.

$$
\begin{array}{rl}
(x^3 \qquad\quad - \; 3x \; + 1) & : (x+1) = x^2 - x - 2 \\
\underline{-(x^3 + \quad x^2) \qquad\qquad} & \\
-x^2 \; - \; 3x \; + 1 & \\
\underline{-(-x^2 - \quad x) \quad} & \\
- \;\; 2x + 1 & \\
- \underline{(-2x - 2)} & \\
3 &
\end{array}
$$

Dakle, količnik je $s(x) = x^2 - x - 2$*, a ostatak* $r(x) = 3$.

(b) *Primenom Hornerove šeme na* $p(x) = x^3 - 3x + 1$ *i* $q(x) = x + 1 = x - (-1)$ *dobijamo*

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 1 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & -2 & 3
\end{array}
$$

gde su $1, -1, -2$ *koeficijenti količnika* $s(x) = x^2 - x - 2$*, a poslednji koeficijent* 3 *je ostatak* $r(x) = 3$. ✓

Glavni zadaci pri radu sa polinomima su određivanje njegovih korena, i ***faktorizacija*** polinoma (rastavljanje polinoma na proizvod nesvodljivih polinoma manjeg stepena - vidi [RD05]).

Polinomi stepena 0 (tj. polinomi - konstante) po definiciji nisu ni svodljivi ni nesvodljivi, polinom stepena različitog od 0 je ***svodljiv*** ako se može napisati kao proizvod polinoma manjeg stepena, a inače je ***nesvodljiv***.

Ako polinom $p \in F[x]$ ima bar jedan koren x_0, tada je od svodljiv (jer se može napisati u obliku $(x - x_0)q(x)$). Obratno ne važi - na primer, polinom $x^4 + 2x^2 + 1$ se nad poljem realnih brojeva može napisati u obliku $x^4 + 2x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2$ (svodljiv je), a očigledno nema ni jedan koren u $\mathbb{R}$.

Ako je polinom $p \in F[x]$ drugog ili trećeg stepena, tada je on svodljiv ako i samo ako ima bar jedan koren x_0. Naime, ako ima koren x_0, tada se može napisati u obliku $a(x - x_0)q(x)$ tj, svodljiv je, a s druge strane, ako je svodljiv i stepena je 2, tada se faktoriše u obliku $a(x - x_0)(x - x_1)$, a ako je svodljiv i stepena je 3, tada se faktoriše u obliku $a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ ili $a(x - x_0)\left(x^2 + bx + c\right)$, tj. u svakom od posmatranih slučajeva ima bar jedan koren x_0. Za polinome stepena većeg od 3 ovakvo tvrđenje ne važi, što potvrđuje gore navedeni primer polinoma $x^4 + 2x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2$ nad poljem $\mathbb{R}$.

Primer 8.4 *Neka su p, q i r proizvoljni polinomi nad nekim poljem* $\mathbf{F}$*, takvi da je* $\deg(p) = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,* $\deg(q) = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, i* $r = 0$ *(r je „nula-polinom”). Tada je:*

- $\deg(p + r) = \deg(p) = n$ *jer je* $p + r = p + 0 = p$*, i* $p \cdot r = p \cdot 0 = 0$*;*
- *za* $n > m$ *je* $\deg(p + q) = n$ *(npr. za* $p(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$ *i* $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ *je* $\deg(p + q) = \deg\left(x^5 + \ldots\right) = 5$*), a za* $n < m$ *je* $\deg(p + q) = m$*; za* $n = m$ *je* $p + q = 0$ *(„nula-polinom”) ili je* $\deg(p + q) = k \in \{n, n-1, \ldots, 1, 0\}$ *- npr. nad poljem* $\mathbb{R}$*, za* $p(x) = x^2 + x + 1$ *i* $q(x) = x^2 + 2x + 3$ *je* $\deg(p + q) = \deg\left(2x^2 + 3x + 4\right) = 2$*,*

za $p(x) = x^2 + x + 1$ *i* $q(x) = -x^2 + 2x + 3$ *je* $\deg(p+q) = \deg(3x+4) = 1$,

za $p(x) = x^2 + x + 1$ *i* $q(x) = -x^2 - x + 3$ *je* $\deg(p+q) = \deg(4) = 0$,

a za $p(x) = x^2 + x + 1$ *i* $q(x) = -x^2 - x - 1$ *je* $p + q = 0$;

- $\deg(pq) = n + m$, *jer je* $(x^n + \ldots)(x^m + \ldots) = (x^n x^m + \ldots) = (x^{n+m} + \ldots)$. ✔

Definicija 8.2 *Element* $x_0 \in F$ *je* ***koren reda*** k *(gde je* $k \in \mathbb{N}$*), tj.* k***-struki koren*** *polinoma* $p \in F[x]$ *ako i samo ako je polinom* p *deljiv sa* $(x - x_0)^k$ *i nije deljiv sa* $(x - x_0)^{k+1}$*, odnosno, ako i samo ako je* $p(x) = (x - x_0)^k q(x)$ *gde je* $q(x_0) \neq 0$.

Teorema 8.2 *Za polinome nad poljima realnih i kompleksnih brojeva važi da je* x_0 *koren reda* k *polinoma* p *ako i samo ako je*

$$p(x_0) = 0 \ \wedge \ p'(x_0) = 0 \ \wedge \ p''(x_0) = 0 \ \wedge \ \ldots p^{(k-1)}(x_0) = 0 \ \wedge \ p^{(k)}(x_0) \neq 0$$

gde su $p'(x)$*,* $p'(x)$*,* $\ldots$*,* $p(j)(x)$*,* $\ldots$ *redom prvi izvod, drugi izvod,* $\ldots$*, izvod reda* j*,* $\ldots$ *polinomske funkcije* $p(x)$.

☞ Svaki polinom $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ stepena n nad poljem $\mathbb{C}$ ima tačno n korenova $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ (među kojima može biti i jednakih, tj. višestrukih). To znači da se nad $\mathbb{C}$ on faktoriše u obliku

$$p(x) = p_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \tag{8.20}$$

Ako je $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ polinom nad poljem $\mathbb{R}$ (tj. $\forall i$, $p_i \in \mathbb{R}$), tada za svaki od njegovih kompleksnih korenova $x_1, x_2, \ldots, x_n$ može da nastupi jedna od sledećih mogućnosti:

1) $x_k \in \mathbb{R}$, ili

2) $x_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, pri čemu je u tom slučaju i $\overline{x_k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ takođe koren polinoma p.

Dakle, kompleksni koreni realnog polinoma se javljaju u konjugovanim parovima, tj. faktorizacija realnog polinoma nad poljem $\mathbb{C}$ je oblika

$$p(x) = p_n(x - x_1)\ldots(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - \overline{x_{k+1}})\ldots(x - x_m)(x - \overline{x_m}), \tag{8.21}$$

gde su $x_1, \ldots, x_k$ realni, a $x_{k+1}, \ldots, x_m$ kompleksni brojevi. Pri tome je

$$\left(x - x_j\right)\left(x - \overline{x_j}\right) = x^2 - \left(x_j + \overline{x_j}\right)x + x_j\overline{x_j} \overset{(8.13),(8.10)}{=} x^2 - 2\mathcal{R}\text{e}\left(x_j\right)x + \left|x_j\right|^2, \tag{8.22}$$

pri čemu je $x^2 - 2\mathcal{R}\text{e}\left(x_j\right)x + \left|x_j\right|^2$ realan polinom stepena 2.
To za posledicu daje na se nad poljem $\mathbb{R}$ svaki polinom faktoriše u obliku proizvoda polinoma prvog i drugog stepena, tj. u obliku

$$p(x) = p_n(x - x_1)\ldots(x - x_k)\left(x^2 + a_{k+1}x + b_{k+1}\right)\ldots\left(x^2 + a_m x + b_m\right). \tag{8.23}$$

☞ Za polinome stepena n nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ je dokazano da *ne* postoji opšti postupak za izračunavanje njihovih korena. Naime, za polinom $ax^2 + bx + c$ stepena 2 je nam od ranije poznata formula $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ za izračunavanje njegovih korena, postoje formule tj. postupci za izračunavanje korena polinoma stepena 3 i 4, i dokazano je da ne postoji opšti postupak za izračunavanje korena polinoma stepena većeg od 4.

☞ Ako je $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ polinom nad poljem $\mathbb{C}$ (ili $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{Q}$), takav da su svi njegovi koeficijenti celi brojevi (tj. $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$), tada su svi njegovi racionalni koreni (svi koreni koji pripadaju skupu $\mathbb{Q}$) oblika $\frac{m}{k}$, gde je m neki delilac slobodnog člana p_0, a k je neki delilac vodećeg člana p_n (tj. $m|p_0$ i $k|p_n$). Dakle, sve racionalne korene ovakvog polinoma možemo naći proverom svih kandidata iz konačnog skupa $\left\{ \frac{m}{k} \;\middle|\; m|p_0 \wedge k|p_n \right\}$.

Uočimo da prethodno tvrđenja ne kaže da je svaki razlomak $\frac{m}{k}$ koren polinoma, već samo da je svaki racionalni koren takvog oblika. To znači da za svaki od tih razlomaka („kandidata za racionalne korene”) treba proveriti da li jeste zaista koren, tj. da li je $p\left(\frac{m}{k}\right) = 0$, te nakon provera dobijamo sve racionalne korena.
Tvrđenje možemo uopštiti i na slučaj kada su svi koeficijenti polinoma p racionalni brojevi ($p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$). Naime, ako je $p(x) = \frac{a_n}{b_n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{b_1}x + \frac{a_0}{b_0}$ gde je $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ (tj. $\frac{a_i}{b_i} \in \mathbb{Q}$), tada množeći polinom $p(x)$ brojem $\mathsf{NZS}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ dobijamo da je $p(x) = \frac{1}{\mathsf{NZS}(a_0, a_1, \ldots, a_n)}(c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0)$ gde su koeficijenti $c_0, c_1, \ldots, c_n$ polinoma $q(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ celi brojevi, te na njega možemo primeniti prethodno tvrđenje, a polinomi p i q očigledno imaju jednake korene.
Ovakvo tvrđenje ne važi ako bar jedan od koeficicijenata nije ceo, odnosno racionalan broj.

Teorema 8.3 *Ako su p i q polinomi nad poljem* $\mathbf{F}$*, tada je skup zajedničkih korena ovih polinoma (pri čemu se svaki broji onoliko puta kolika mu je višestrukost) jednak skupu korena najvećeg zajedničkog delioca ovih polinoma.*

☞ Ako su polinomi p i q napisani u faktorisanom obliku

$$p(x) = p_1^{k_1}(x) \cdot p_2^{k_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}(x),$$
$$q(x) = q_1^{m_1}(x) \cdot q_2^{m_2}(x) \cdot \ldots \cdot q_t^{m_t}(x),$$

i ako je poznato da je polinom p deljiv polinomom q, lako je uočiti sledeće:

- svaki m-tostruki faktor polinoma q mora biti *bar* m-tostruki faktor polinoma p (tj. $\forall q_i, \exists p_j,\ p_j = q_i \wedge k_j \geq m_i$); drugim rečima, faktorizacija polinoma q mora biti „podskup” faktorizacije polinoma p;
- svaki m-tostruki koren polinoma q mora biti *bar* m-tostruki koren polinoma p.

Primer 8.5 *Ispitajmo svodljivost polinoma*

(p) $p(x) = 1$,	(q) $q(x) = x + 1$,
(r) $r(x) = x^2 + 1$,	(s) $s(x) = x^2 + 2x + 1$,
(t) $t(x) = x^3 + x + 1$,	(u) $u(x) = x^{517} + 1$,

nad poljima $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_3$ *i* $\mathbb{Z}_5$.

S obzirom na napomenu uz formulu (8.20) *(strana 162), polinomi r, s, t i u su svodljivi nad poljem kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$*, a s obzirom na napomenu uz formulu* (8.23) *(strana 162), polinomi t i u su svodljivi nad poljem realnih brojeva* $\mathbb{R}$.

Nad bilo kojim poljem, polinom stepena 2 *ili* 3 *je svodljiv ako i samo ako ima koren u tom polju (vidi napomenu na strani 161), što možemo primeniti pri ispitivanju svodljivosti polinoma r, s i t.*

(p) *Polinom p stepena* 0 *nad bilo kojim poljem po definiciji nije ni svodljiv ni nesvodljiv.*

(q) *Polinom q stepena* 1 *nad bilo kojim poljem po definiciji je nesvodljiv (ne može se napisati kao proizvod dva polinoma stepena manjeg od 1).*

(r) *Polinom r stepena* 2 *je svodljiv nad* $\mathbb{C}$*, a nad ostalim poljima je svodljiv ako i samo ako ima koren u posmatranom polju. U polju* $\mathbb{C}$*, koreni polinoma r su* $x_{1,2} = \pm \mathbb{i}$*, te iz* $x_{1,2} \notin \mathbb{R}$ *i* $x_{1,2} \notin \mathbb{Q}$ *sledi da je polinom r nesvodljiv nad poljima* $\mathbb{R}$ *i* $\mathbb{Q}$*.*

Kako u polju $\mathbb{Z}_3$ *(čiji su elementi* 0, 1 *i* 2*) važi* $r(0) = 1$, $r(1) = 2$ *i* $r(2) = 2$*, sledi da polinom r u polju* $\mathbb{Z}_3$ *nema korena, te je nesvodljiv nad* $\mathbb{Z}_3$*.*

Kako u polju $\mathbb{Z}_5$ *(čiji su elementi* 0, 1, 2, 3, 4 *i* 5*) važi* $r(0) = 1$, $r(1) = 2$, $r(2) = 0$, ... *sledi da polinom r u polju* $\mathbb{Z}_5$ *ima koren (element* 2*), te je svodljiv nad* $\mathbb{Z}_5$*.*

(s) *Polinom s stepena* 2 *je svodljiv nad* $\mathbb{C}$*, a nad ostalim poljima je svodljiv ako i samo ako ima koren u posmatranom polju. U polju* $\mathbb{C}$*, koreni polinoma s su* $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = -1$*, te iz* $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ *i* $x_{1,2} \in \mathbb{Q}$ *sledi da je polinom s svodljiv nad poljima* $\mathbb{R}$ *i* $\mathbb{Q}$*.*

Kako u polju $\mathbb{Z}_3$ *važi* $s(0) = 1$, $s(1) = 1$, *i* $s(2) = 0$*, sledi da polinom s u polju* $\mathbb{Z}_3$ *ima koren (element* 2*), te je svodljiv nad* $\mathbb{Z}_3$*.*

Kako u polju $\mathbb{Z}_5$ *važi* $s(0) = 1$, $s(1) = 4$, $s(2) = 4$, $s(3) = 1$ *i* $s(4) = 0$*, sledi da polinom s u polju* $\mathbb{Z}_5$ *ima koren (element* 4*), te je svodljiv nad* $\mathbb{Z}_5$*.*

(t) *Polinom t stepena* 3 *je svodljiv nad* $\mathbb{C}$ *i* $\mathbb{R}$*, a nad ostalim poljima je svodljiv ako i samo ako ima koren u posmatranom polju.*

U polju $\mathbb{Q}$*, kandidati za korene polinoma t su* -1 *i* 1 *(vidi napomenu na strani 163), te kako je* $t(-1) = -1 \neq 0$ *i* $t(1) = 3 \neq 0$*, sledi da je polinom t nesvodljiv nad poljem* $\mathbb{Q}$*.*

Kako u polju $\mathbb{Z}_3$ *važi* $t(0) = 1$, $t(1) = 0$*, sledi da polinom t u polju* $\mathbb{Z}_3$ *ima koren (element* 1*), te je svodljiv nad* $\mathbb{Z}_3$*.*

Kako u polju $\mathbb{Z}_5$ *važi* $t(0) = 1$, $t(1) = 3$, $t(2) = 1$, $t(3) = 1$ *i* $t(4) = 4$*, sledi da polinom t u polju* $\mathbb{Z}_5$ *nema korena, te je nesvodljiv nad* $\mathbb{Z}_5$*.*

(u) *U svakom polju* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ *postoji neutralni element* 1 *za operaciju* $\cdot$*, kao i njemu inverzni element* -1 *pri operaciji* $+$*. S obzirom na osobine polja (vidi* [RD05]*), sledi da nad svakim poljem važi* $u(-1) = (-1)^{517} + 1 = -1 + 1 = 0$ *(gde je* 0 *neutralni element operacije* $+$*), te polinom u u svakom polju* $\mathbf{F}$ *ima bar jedan koren - element* -1*, te je polinom u svodljiv nad svakim poljem.* ✔

Vijetove formule

Neka je

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$$

polinom nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$. Pretpostavka da bi se moglo govoriti o Vijetovim formulama za polinom $p(x)$ jeste da on ima tačno n korena (među kojima može biti jednakih, odnosno svaki koren se pojavljuje onoliko puta kolika mu je višestrukost), tj. da se može faktorisati na proizvod linearnih faktora (tj. polinoma prvog stepena):

$$p(x) = p_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Naime, važi sledeće tvrđenje. Elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ polja F su koreni polinoma $p(x)$ ako i samo ako važe sledeće jednakosti (Vijetove formule)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i &= -\frac{p_{n-1}}{p_n}, \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j &= \frac{p_{n-2}}{p_n}, \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n} x_i x_j x_k &= -\frac{p_{n-3}}{p_n}, \\ &\vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n &= (-1)^n \frac{p_0}{p_n}. \end{aligned}$$

Tvrđenje se dokazuje razvijanjem izraza $p_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ i izjednačavanjem koeficijenata uz x^k sa odgovarajućim koeficijentima polinoma p. Dakle:

(a) ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$, tada za elemente polja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i koeficijente $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ važe gore navedene jednakosti (Vijetove formule);

(b) ako za elemente polja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i koeficijente $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ važe gore navedene jednakosti (tj. Vijetove formule), tada su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinoma $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$.

O polinomima čiji koeficijenti čine geometrijsku progresiju

Neka je $p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p_2 x^2 + p_1 x + p_0$ polinom nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, čiji koeficijenti p_i čine geometrijski niz čiji je prvi član c, a koeficijent progresije q (dakle $p_i = cq^i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$), tj. posmatrajmo polinom oblika[15]

$$p(x) = q^n c x^n + q^{n-1} c x^{n-1} + \ldots + q^2 c x^2 + qcx + c \tag{8.24}$$

nad poljem $\mathbb{C}$, gde je $c \neq 0$. Uočimo da se izraz $p(x)$ može posmatrati kao zbir prvih $n+1$ članova geometrijskog niza $b_k = c(qx)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, te na osnovu formule za zbir članova geometrijskog niza (vidi dodatak A) sledi da je

$$\forall x \neq \frac{1}{q}, \qquad p(x) = c\frac{1 - (qx)^{n+1}}{1 - qx}. \tag{8.25}$$

Uvrštavanjem $x = \frac{1}{q}$ u polinom (8.24) dobijamo $p\left(\frac{1}{q}\right) = c + c + \ldots + c = (n+1)c \neq 0$, odnosno $\frac{1}{q}$ nije koren polinoma (8.24). Stoga pri izračunavanju korena ovakvog polinoma dobijamo

[15]U praksi, kao i pri rešavanju raznih matematičkih problema se relativno često pojavljuju polinomi ovakvog oblika.

$$p(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1-(qx)^{n+1}=0 \ \wedge \ x\neq\frac{1}{q}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^{n+1}=\frac{1}{q^{n+1}} \ \wedge \ x\neq\frac{1}{q}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x=\sqrt[n+1]{\frac{1}{q^{n+1}}}=\sqrt[n+1]{\frac{1}{|q|^{n+1}}e^{\mathbb{i}\arg\frac{1}{q^{n+1}}}} \ \wedge \ x\neq\frac{1}{q}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{1}{|q|}e^{\mathbb{i}\frac{2k\pi+\arg\frac{1}{q^{n+1}}}{n+1}} \ \middle| \ k\in\{0,1,2,\ldots,n\}\right\}\setminus\left\{\frac{1}{q}\right\}.$$

Dakle, skup korena polinoma (8.24) je skup vrednosti kompleksnog korena $\sqrt[n+1]{\frac{1}{q^{n+1}}}$ bez $\frac{1}{q}$, tj.

$$\left\{x\in\mathbb{C} \mid x\in\sqrt[n+1]{\frac{1}{q^{n+1}}}\right\}\setminus\left\{\frac{1}{q}\right\}. \tag{8.26}$$

Ukoliko su svi koeficijenti polinoma p realni brojevi, tada je $q\in\mathbb{R}$ i $\arg\frac{1}{q^{n+1}}\in\{0,\pi\}$, i u tom slučaju se kompleksni koreni polinoma javljaju u konjugovanim parovima oblika $x_{1,2}=\frac{1}{|q|}\left(\cos\frac{2k\pi}{n+1}\pm\mathbb{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1}\right)$ ili $x_{1,2}=\frac{1}{|q|}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{n+1}\right)\pm\mathbb{i}\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{n+1}\right)\right)$, te pri faktorizaciji polinoma p u polju $\mathbb{R}$ množenjem članova $x-x_1$ i $x-x_2$ iz faktorizacije polinoma p u polju $\mathbb{C}$, dobijamo u $\mathbb{R}$ kvadratni polinom (nesvodljiv za prave kompleksne brojeve x_1 i x_2)

$$x^2-\frac{2}{|q|}\cos\frac{2k\pi}{n+1}+\frac{1}{q^2} \qquad \text{tj.} \qquad x^2-\frac{2}{|q|}\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{n+1}\right)+\frac{1}{q^2}, \tag{8.27}$$

što sledi iz (8.22). Vidi zadatak **8.39**.

Zadatak 8.37 *Nad poljem realnih brojeva su dati polinomi*

$$p(x)=x^4+x^3-x^2+x-2, \qquad q(x)=2x^5-2x^4-2x^3+2x^2-4x+4.$$

Naći njihove zajedničke korene.

➥ ***Rešenje:*** Euklidovim algoritmom ćemo izračunati polinom $r=\mathsf{NZD}(p,q)$, a zatim određivanjemnjegovih korena dobiti zajedničke korene polinoma p i q (vidi teoremu 8.3). Pri tome, umesto polinoma $q(x)$ možemo uzeti njemu odgovarajući normalizovani polinom (vodeći koeficijent je 1), što ne utiče ni na r (koji je po definiciji ionako normalizovani polinom), ni na korene polinoma. Iz istih razloga u toku postupka možemu svaki polinom zameniti njemu odgovarajućim normalizovanim polinomom. Neka je $\tilde{q}(x)=\frac{1}{2}q(x)=x^5-x^4-x^3+x^2-2x+2$, te Euklidovim aalgoritmom izračunavamo $r=\mathsf{NZD}(p,q)=\mathsf{NZD}(p,\tilde{q})$:

korak 1:

$$\begin{array}{l}
(x^5-x^4-x^3+x^2-2x+2):(x^4+x^3-x^2+x-2)=x-2\\
\underline{-(x^5+x^4-x^3+x^2-2x\,)}\\
\qquad -2x^4 \qquad\qquad\qquad +2\\
\qquad \underline{-(-2x^4-2x^3+2x^2-2x+4)}\\
\qquad\qquad 2x^3-2x^2+2x-2=2(x^3-x^2+x-1)
\end{array}$$

korak 2:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^4 + \quad x^3 - \quad x^2 + \ x \ -2) : (x^3 - x^2 + x - 1) = x + 2 \\
\underline{-(x^4 - \quad x^3 + \quad x^2 - \ x)\qquad\quad} \\
\qquad\qquad 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\
\qquad\quad -\underline{(2x^3 - 2x^2 + 2x - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Prema tome, $r(x) = \mathsf{NZD}(p,q)(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Grupisanjem članova polinoma r možemo dobiti $r(x) = x\big(x^2+1\big) - \big(x^2+1\big) = (x-1)\big(x^2+1\big)$, odakle sledi da je broj 1 jedini zajednički realan koren polinoma p i q. ☑

☞ Polinomi p i q iz prethodnog zadatka imaju u polju kompleksnih brojeva zajedničke korene 1, $\mathbb{i}$ i $-\mathbb{i}$.

Zadatak 8.38 *U polju $\mathbb{Z}_3$ naći zajedničke korene polinoma*

$$p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1.$$

➥ ***Rešenje:***

Prvi način

Možemo primeniti potpuno isti postupak kao u zadatku **8.37**. Pri tome računske operacije izvodimo u polju $\mathbb{Z}_3$, gde je $-1 = 2$, $-2 = 1$, $1^{-1} = 1$ i $2^{-1} = 2$.

korak 1:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^5 + \ 2x^4 + 2x^3 + \ x^2 + 2x \ +1) : (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) = x + 1 \\
\underline{-(x^5 + \quad x^4 + 2x^3 + \ x^2 + \ x)\qquad\quad} \\
\qquad\qquad x^4 \qquad\qquad\quad + \ \ x + 1 \\
\qquad\ \ \underline{-(x^4 + \ x^3 + 2x^2 + \ \ x + 1)} \\
\qquad\qquad\quad 2x^3 + \ x^2 \qquad\qquad = 2\big(x^3 + 2x^2\big)
\end{array}
$$

korak 2:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^4 + \quad\ x^3 \ + 2x^2 \ + x + 1) : (x^3 + 2x^2) = x + 2 \\
\underline{-(x^4 + \quad 2x^3)\qquad\qquad\qquad\quad} \\
\qquad\qquad 2x^3 \ + 2x^2 \ + x + 1 \\
\qquad\ \ \underline{-(2x^3 \ + \ x^2)\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2 \ + x + 1
\end{array}
$$

korak 3:

$$
\begin{array}{l}
\quad(x^3 + \ 2x^2 \qquad\qquad) : (x^2 + x + 1) = x + 1 \\
\underline{-(x^3 + \quad x^2 + \ x)\quad} \\
\qquad\qquad x^2 + 2x \\
\qquad\ \ \underline{-(x^2 + \ x + 1)} \\
\qquad\qquad\qquad x + 2
\end{array}
$$

korak 4:

$$\begin{array}{l} (x^2 + \quad x \ + 1) : (x+2) = x+2 \\ \underline{-(x^2 + \quad 2x)} \\ \qquad 2x \ + 1 \\ \qquad \underline{-(2x \ + 1)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Sledi da je $\mathsf{NZD}(p,q)(x) = x+2 = x-1$, te je 1 jedini koren polinoma $NZD(p,q)$, odnosno jedini zajednički koren polinoma p i q.

Drugi način

Polje $\mathbb{Z}_3$ ima samo 3 elementa, direktnim ispitivanjem vrednosti polinomskih funkcija za sve elemente skupa $\mathbb{Z}_3$ dobijamo

$$\begin{array}{lll} p(0) = 1, & p(1) = 0, & p(2) = 2, \\ & q(1) = 0, & \end{array}$$

odakle sledi da je 1 jedini zajednički koren polinoma p i q. ☑

Zadatak 8.39 *Date polinome rastaviti na faktore nad poljima kompleksnih i realnih brojeva.*

(a) $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1.$

(b) $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

(c) $h(x) = -162x^6 + 54x^5 - 18x^4 + 6x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}.$

(d) $r(x) = 9x^6 - 3x^4 + x^2 - \frac{1}{3}.$

➥ ***Rešenje:***

(a) Prvi način: Proverom kandidata ± 1 za racionalne korene polinoma f (vidi stranu 163) dobijamo

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

odnosno $f(1) = 0$, pri čemu je $f(x) = (x-1)\left(x^6 + x^4 + x^2 + 1\right)$, te grupisanjem sabiraka u $x^6 + x^4 + x^2 + 1$ dalje dobijamo

$$f(x) = (x-1)\left(x^4\left(x^2+1\right) + x^2 + 1\right) = (x-1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right).$$

Kompleksni koreni polinoma $x^2 + 1$ su $\pm\mathrm{i}$, a polinom $x^4 + 1$ ima kompleksne korene $\sqrt[4]{-1} \overset{(8.7)}{=} \left\{e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}, e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}, e^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right\}$, te je

$$f(x) = (x-1)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})\left(x - e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\left(x - e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\left(x - e^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)$$

faktorizacija polinoma f nad $\mathbb{C}$, a množeći linearne faktore koji sadrže uzajamno konjugovane kompleksne korene dobijamo (vidi (8.22)) faktorizaciju nad poljem $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-1)\left(x^2+1\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{\pi}{4}x + \left|e^{\frac{\pi}{4}\mathbb{i}}\right|^2\right)\left(x^2 - 2\cos\tfrac{3\pi}{4}x + \left|e^{\frac{3\pi}{4}\mathbb{i}}\right|^2\right) =$$
$$= (x-1)\left(x^2+1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x+1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x+1\right).$$

Drugi način: Polinom f možemo posmatrati kao zbir prvih 8 članova geometrijskog niza sa prvim članom $c = -1$ i koeficijentom progresije $q = -x$, te primenom (8.25) i (8.26) dobijamo

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-(-x)^8}{1+x} = \frac{1+x^8}{1+x} = 0 \ \wedge\ x \neq -1\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x \in \sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{e^{0\cdot\mathbb{i}}} \ \wedge\ x \neq -1\right) \quad \overset{(8.7)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \left\{1, e^{\frac{\pi}{4}\mathbb{i}}, e^{\frac{\pi}{2}\mathbb{i}}, e^{\frac{3\pi}{4}\mathbb{i}}, e^{-\frac{3\pi}{4}\mathbb{i}}, e^{-\frac{\pi}{2}\mathbb{i}}, e^{-\frac{\pi}{4}\mathbb{i}}\right\},$$

te faktorizacije nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ redom glase (vidi (8.27))

$$f(x) = (x-1)\left(x - e^{\frac{\pi}{4}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{\frac{-\pi}{4}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{\frac{\pi}{2}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{\frac{-\pi}{2}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{3\frac{\pi}{4}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{\frac{-3\pi}{4}\mathbb{i}}\right)$$
$$= (x-1)\left(x^2 - \sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}x+1\right).$$

(b) Prvi način: Grupisanjem sabiraka u $g(x)$ dobijamo $g(x) = x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)\left(x^4+x^2+1\right)$ Uvodeći smenu $x^2 = t$ u jednačinu $x^4+x^2+1 = 0$ dobijamo jednačinu $t^2+t+1 = 0$ čija su rešenja $t_{1,2} = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} = e^{\pm\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$, te iz $x^2 = e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$ i $x^2 = e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$ dobijamo rešenja $x_1 = e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}$, $x_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$, $x_3 = e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}$ i $x_4 = e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$ jednačine $x^4+x^2+1 = 0$. Sledi da je $\left\{-1, e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}, e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}, e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}, e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right\}$ skup korena polinoma g. Stoga faktorizacija nad $\mathbb{C}$ glasi

$$g(x) = (x+1)\left(x - e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right),$$

odakle primenom (8.22) dobijamo faktorizaciju nad $\mathbb{R}$:

$$g(x) = (x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right).$$

Drugi način: Polinom g možemo posmatrati kao zbir prvih 6 članova geometrijskog niza sa prvim članom $c = 1$ i koeficijentom progresije $q = x$, te primenom (8.25) dobijamo

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-x^6}{1-x} = 0 \ \wedge\ x \neq 1\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x \in \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{e^{0\cdot\mathbb{i}}} \ \wedge\ x \neq 1\right) \quad \overset{(8.7)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \left\{e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}, e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}, -1, e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}, e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right\},$$

te faktorizacije nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ redom glase

$$g(x) = (x+1)\left(x - e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\left(x - e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)$$
$$= (x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right).$$

(c) Kako je $h(x) = 2\left(-81x^6 + 27x^5 - 9x^4 + 3x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)$, a pri tome izraz u zagradi $-81x^6 + 27x^5 - 9x^4 + 3x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$ možemo posmatrati kao zbir prvih 7 članova geometriskog niza sa prvim članom $-\frac{1}{9}$ i koeficijentom progresije $-3x$, primenom tehnike opisane na strani 165 dobijamo

$$h(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1-(-3x)^7}{1-(-3x)}=-\frac{1}{9}\cdot\frac{1+3^7x^7}{1+3x}=0 \ \wedge\ x\neq-\frac{1}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(3^7x^7=-1 \ \wedge\ x\neq-\frac{1}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^7=-\frac{1}{3^7} \ \wedge\ x\neq-\frac{1}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x\in\sqrt[7]{-\frac{1}{3^7}}=\sqrt[7]{\frac{1}{3^7}e^{\pi\mathrm{i}}} \ \wedge\ x\neq-\frac{1}{3}\right) \quad \overset{(8.7)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{7}\mathrm{i}},\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{7}\mathrm{i}},\frac{1}{3}e^{\frac{5\pi}{7}\mathrm{i}},\frac{1}{3}e^{-\frac{5\pi}{7}\mathrm{i}},\frac{1}{3}e^{-\frac{3\pi}{7}\mathrm{i}},\frac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{7}\mathrm{i}}\right\},$$

te faktorizacije nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ redom glase

$$h(x)=2\left(x-\tfrac{1}{3}e^{\frac{\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{3\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}e^{\frac{5\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}e^{-\frac{5\pi}{7}\mathrm{i}}\right)$$
$$=2\left(x^2-\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{\pi}{7}x+\tfrac{1}{9}\right)\left(x^2-\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{3\pi}{7}x+\tfrac{1}{9}\right)\left(x^2-\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{5\pi}{7}x+\tfrac{1}{9}\right).$$

(d) Polinom $r(x)=9x^6-3x^4+x^2-\frac{1}{3}$ možemo posmatrati kao zbir prva 4 člana geometriskog niza sa prvim članom $-\frac{1}{3}$ i koeficijentom progresije $-3x^2$, te primenom tehnike opisane na strani 165 dobijamo

$$r(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(-3x^2\right)^4}{1-(-3x^2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-3^4x^8}{1+3x^2}=0 \ \wedge\ 1+3x^2\neq 0\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(3^4x^8=1 \ \wedge\ x\neq\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^8=\frac{1}{3^4} \ \wedge\ x\neq\sqrt{-\frac{1}{3}}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(x\in\sqrt[8]{-\frac{1}{3^4}}=\sqrt[8]{\frac{1}{3^4}e^{0\cdot\mathrm{i}}} \ \wedge\ x\neq\sqrt{\frac{1}{3}e^{\pi\cdot\mathrm{i}}}\right) \quad \overset{(8.7)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad x\in\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}},\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}},\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{-3\pi}{4}\mathrm{i}}\right\},$$

te faktorizacije nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$ redom glase

$$r(x)=9\left(x-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)\left(x-\tfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}\right)$$
$$=9\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right)\left(x^2-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\tfrac{\pi}{4}x+\tfrac{1}{3}\right)\left(x^2-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\tfrac{3\pi}{4}x+\tfrac{1}{3}\right).$$

☑

Zadatak 8.40 *Nad poljem kompleksnih brojeva su dati polinomi*

$p(x)=2x^6+9x^5+22x^4+45x^3+58x^2+36x+8,$

$q(x)=x^6+2x^4+2x^2+1.$

(a) *Izračunati sve korene polinoma p i faktorisati ga nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.*

(b) *Dokazati da su polinomi p i q uzajamno prosti nad poljem $\mathbb{R}$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Na osnovu teoreme o racionalnim korenima polinoma sa celobrojnim koeficijentima, svi racionalni koreni polinoma p se nalaze u skupu $\left\{\pm\frac{1}{2},\pm1,\pm2,\pm4,\pm8\right\}$. Očigledno nijedan pozitivan realan broj ne može biti koren polinoma p (jer

$\forall x > 0,\ p(x) > 0)$, pa treba ispitati samo negativne kandidate. Najbolje je da pri tome koristimo Hornerovu šemu jer pri tome odmah dobijamo i (delimičnu) faktorizaciju.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 2 & 9 & 22 & 45 & 58 & 36 & 8 \\ \hline
-\frac{1}{2} & 2 & 8 & 18 & 36 & 40 & 16 & 0 & \checkmark \\
-\frac{1}{2} & 2 & 7 & \frac{29}{2} & \frac{115}{4} & \frac{205}{8} & \frac{51}{16} & & \times
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(2x^5+8x^4+18x^3+36x^2+40x+16\right) = \\ &= 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x^5+4x^4+9x^3+18x^2+20x+8\right), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 4 & 9 & 18 & 20 & 8 \\ \hline
-1 & 1 & 3 & 6 & 12 & 8 & 0 & \checkmark \\
-1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & & \checkmark \\
-1 & 1 & 1 & 3 & 5 & & & \times
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)\left(x^4+3x^3+6x^2+12x+8\right) = \\ &= 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)^2\left(x^3+2x^2+4x+8\right), \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \hline
-2 & 1 & 0 & 4 & 0 & \checkmark \\
-2 & 1 & -2 & 8 & & \times
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$p(x) = 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)^2(x+2)\left(x^2+4\right).$$

Polinom x^2+4 očigledno nema realnih korena, a u polju kompleksnih brojeva ima jednostruke korene $\pm 2\mathbb{i}$. Dakle, u polju realnih brojeva polinom p ima korene $-\frac{1}{2}$ (1-struki), -1 (2-struki) i -2 (1-struki), a u polju kompleksnih brojeva osim navedenih realnih korena ima i 1-struke korene $2\mathbb{i}$ i $-2\mathbb{i}$. Faktorizacija nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ redom glasi

$$\begin{aligned} p(x) &= 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)^2(x+2)\left(x^2+4\right) = \\ &= 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)^2(x+2)(x-2i)(x+2i). \end{aligned}$$

(b) Treba da dokažemo da polinomi p i q nemaju zajedničkih prostih faktora, a s obzirom na to da smo dobili faktorizaciju polinoma p, možemo dokazati da ni jedan prost faktor polinoma p nije faktor tj. delilac polinoma q. Kako je očigledno $q(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, polinom q nema linearnih prostih faktora, tako da ostaje samo da dokažemo da x^2+4 nije delilac polinoma q nad $\mathbb{R}$, tj. da se pri delenju q sa x^2+4 dobija ostatak različit od 0.

$$\begin{array}{l} (x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1) : (x^2+4) = x^4 - 2x^2 + 10 \\ -(x^6 + 4x^4) \\ \hline \quad -2x^4 + 2x^2 + 1 \\ \quad -(2x^4 - 8x^2) \\ \hline \qquad 10x^2 + 1 \\ \qquad -(10x^2 + 40) \\ \hline \qquad\qquad -39 \end{array}$$

Time je tvrđenje dokazano.

☞ Polinom q smo mogli jednostavno faktorisati na sledeći način:

$$q(x) = x^6 + x^4 + x^4 + x^2 + x^2 + 1 = x^4\left(x^2+1\right) + x^2\left(x^2+1\right) + \left(x^2+1\right) =$$
$$= \left(x^2+1\right)\left(x^4+x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right),$$

odakle takođe vidimo da su polinomi p i q uzajamno prosti. ☑

Zadatak 8.41 *Koristeći Hornerovu šemu razložiti polinom $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ po stepenima od $x+1$.*

➥ ***Rešenje:*** Deleći polinom p sa $x+1 = x-(-1)$ iterativno dobijamo

	1	−3	−4	1
−1	1	−4	0	$\boxed{1}$
−1	1	−5	$\boxed{5}$	
−1	1	$\boxed{-6}$		
−1	$\boxed{1}$			

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} p(x) &= (x+1)\left(x^2-4x\right)+1 \\ &= (x+1)((x+1)(x-5)+5)+1 \\ &= (x+1)((x+1)((x+1)-6)+5)+1 \\ &= (x+1)^3 - 6(x+1)^2 + 5(x+1) + 1 \end{aligned}$$

☞ Na ovaj način, kada treba u polinomu p da uvedemo smenu $x+1 = t$, dobijamo polinom sređen po koeficijentima uz t, pri čemu su ti koeficijenti jednaki zaokruženim ostacima pri deljenju sa $x+1$ u Hornerovoj šemi. ☑

Zadatak 8.42 *Dat je polinom $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ nad poljem $\mathbb{C}$. Koristeći Hornerovu šemu*

(a) *izračunati sve njegove korene i faktorisati ga nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$,*

(b) *napisati ga po stepenima od $x+2$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Kandidati za racionalne korene polinoma p su $\pm1, \pm2, \pm4$. Pomoću Hornerove šeme proveravamo koji od ovih kandidata jeste koren i kolike je višestrukosti, i time tražimo odgovarajuće linearne faktore.

	1	4	3	−4	−4		
1	1	5	8	4	0	✓	$\Rightarrow$ $p(x) = (x-1)\left(x^3+5x^2+8x+4\right)$
1	1	6	14	18		✗	
−1	1	4	4	0		✓	$\Rightarrow$ $p(x) = (x-1)(x+1)\left(x^2+4x+4\right)$
−1	1	3	1			✗	
2	1	6	16			✗	
−2	1	2	0			✓	$\Rightarrow$ $p(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x+2)$
−2	1	0				✓	$\Rightarrow$ $p(x) = (x-1)(x+1)(x+2)^2$

(b) Hornerovom šemom dobijamo

	1	4	3	−4	−4
−2	1	2	−1	−2	$\boxed{0}$
−2	1	0	−1	$\boxed{0}$	
−2	1	−2	$\boxed{3}$		
−2	1	$\boxed{-4}$			
−2	$\boxed{1}$				

odakle sledi $p(x) = (x+2)^4 - 4(x+2)^3 + 3(x+2)^2$. ☑

Zadatak 8.43 *Nad poljem $\mathbb{R}$ rastaviti na parcijalne sabirke racionalne funkcije*

(a) $R(x) = \dfrac{2x-1}{x^5+2x^4+2x^3+x^2}$,

(b) $R(x) = \dfrac{x^6-3x^5-x^4-2x^3+3x+1}{x^3-x^2+2x-2}$.

➥ ***Rešenje:*** Sledi opis algoritma za rastavljanje racionalne funkcije $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne sabirke.

① Najpre, ukoliko je $\deg P \geq \deg Q$, delimo polinom P polinomom Q, dobijajući količnik $T(x)$ i ostatak $S(x)$. To znači da je tada $R(x) = T(x) + \dfrac{S(x)}{Q(x)}$, gde je $\deg S < \deg Q$. U slučaju $\deg P < \deg Q$, ovaj korak se preskače, i neka je tada $S(x) = P(x)$.

② Faktorišemo polinom $Q(x)$ nad $\mathbb{R}$, pri čemu se dobija faktorizacija oblika (vidi (8.23))

$$Q(x) = q\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{s_i}\prod_{i=1}^{k}\left(x^2+a_ix+b_i\right)^{t_i}.$$

③ Racionalnu funkciju

$$\frac{S(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{q\prod\limits_{i=1}^{m}(x-c_i)^{s_i}\prod\limits_{i=1}^{k}(x^2+a_ix+b_i)^{t_i}}$$

rastavljamo na parcijalne sabirke tako što je što ćemo odrediti realne brojeve $C_{i,j}$,$A_{i,j}$,$B_{i,j}$ za koje je

$$\frac{S(x)}{q\prod\limits_{i=1}^{m}(x-c_i)^{s_i}\prod\limits_{i=1}^{k}(x^2+a_ix+b_i)^{t_i}} =$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{C_{i,1}}{x-c_i} + \frac{C_{i,2}}{(x-c_i)^2} + \ldots + \frac{C_{i,s_i}}{(x-c_i)^{s_i}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{A_{i,1}x+B_{i,1}}{x^2+a_1x+b_1} + \frac{A_{i,2}x+B_{i,2}}{(x^2+a_ix+b_i)^2} + \ldots + \frac{A_{i,t_i}x+B_{i,t_i}}{(x^2+a_ix+b_i)^{t_i}}\right).$$ ✫

④ Sabiranjem razlomaka u poslednjem izrazu dobijamo

$$\frac{S(x)}{q\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{s_i}\prod_{i=1}^{k}(x^2+a_ix+b_i)^{t_i}}=\frac{L(x)}{q\prod_{i=1}^{m}(x-c_i)^{s_i}\prod_{i=1}^{k}(x^2+a_ix+b_i)^{t_i}},$$

gde je $L(x)$ polinom čiji su koeficijenti linearni izrazi po $C_{i,j}$,$A_{i,j}$,$B_{i,j}$.

⑤ Izjednačavanjem koeficijenata polinoma $S(x)$ i $L(x)$ dobijamo sistem linearnih jednačina po $C_{i,j}$,$A_{i,j}$,$B_{i,j}$. Njegovim rešavanjem (vidi poglavlje 9) i uvrštavanjem izračunatih koeficijenata $C_{i,j}$,$A_{i,j}$,$B_{i,j}$ u izraz ✰ dobijamo racionalnu funkciju $R(x)$ rastavljenu na parcijalne sabirke.

🛈 Rastavljanje racionalne funkcije na parcijalne sabirke se javlja pri rešavanju integrala racionalnih funkcija. Rastavljanjem racionalne funkcije na parcijalne sabirke se integral racionalne funkcije svodi na zbir tabličnih integrala i/ili integrala koji se smenom ili parcijalnom integracijom svode na tablične integrale.

(a) Prvi korak algoritma se preskače. Faktorišimo $p(x)=x^5+2x^4+2x^3+x^2$. Kako je $p(x)=x^2\left(x^3+2x^2+2x+1\right)$, proverom kandidata ±1 za racionalne korene polinoma x^3+2x^2+2x+1 dobijamo

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 2 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 5 & 6 & \times \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \checkmark \end{array}\qquad\Rightarrow\qquad p(x)=x^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$$

pri čemu je x^2+x+1 nesvodljiv polinom nad $\mathbb{R}$ (koreni su mu kompleksni brojevi). Sada iz

$$R(x)=\frac{2x-1}{x^2(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}=$$
$$=\frac{A\left(x^4+2x^3+2x^2+x\right)+B\left(x^3+2x^2+2x+1\right)+C\left(x^4+x^3+x^2\right)+(Dx+E)\left(x^3+x^2\right)}{x^2(x+1)(x^2+x+1)}=$$
$$=\frac{(A+C+D)x^4+(2A+B+C+D+E)x^3+(2A+2B+C+E)x^2+(A+2B)+B}{x^2(x+1)(x^2+x+1)}$$

sledi

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} A & & & + & C & + & D & & & = & 0\\ 2A & + & B & + & C & + & D & + & E & = & 0\\ 2A & + & 2B & + & C & & & + & E & = & 0\\ A & + & 2B & & & & & & & = & 2\\ & & B & & & & & & & = & -1 \end{array}$$

Oduzimanjem treće jednačine od druge, a zatim oduzimanjem druge od treće, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} A & + & B & + & C & & & & & = & 0\\ & - & B & & & + & D & & & = & 0\\ 2A & + & 2B & + & C & & & + & E & = & 0\\ A & + & 2B & & & & & & & = & 2\\ & & B & & & & & & & = & -1 \end{array}$$

Iz poslednje dve jednačine sledi, prvo $B=-1$, a zatim $A=4$. Nakon uvrštavanja ovih vrednosti u prve tri jednačine, redom dobijamo iz prve jednačine $C=-3$, zatim iz druge $D=-1$, te iz treće $E=-3$. Time dobijamo

$$R(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x+1}-\frac{x+3}{x^2+x+1}.$$

(b)

$$\begin{array}{l}
(x^6-3x^5-x^4-2x^3+3x+1):(x^3-x^2+2x-2)=x^3-2x^2-5x-1\\
\underline{-(x^6-x^5+2x^4-2x^3)}\\
\quad -2x^5-3x^4+3x+1\\
\quad \underline{-(-2x^5+2x^4-4x^3+4x^2)}\\
\qquad -5x^4+4x^3-4x^2+3x+1\\
\qquad \underline{-(-5x^4+5x^3-10x^2+10x)}\\
\qquad\quad -x^3+6x^2-7x+1\\
\qquad\quad \underline{-(-x^3+x^2-2x+2)}\\
\qquad\qquad 5x^2-5x-1
\end{array}$$

Dakle, $R(x)=x^3-2x^2-5x-1+\dfrac{5x^2-5x-1}{x^3-x^2+2x-2}$.

Ispitujući kandidate $\pm1,\pm2$ za racionalne korene polinoma x^3-x^2+2x-2 dobijamo

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -1 & 2 & -2\\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & 0 \ \checkmark
\end{array}\qquad\Rightarrow\qquad x^3-x^2+2x-2=\left(x^2+2\right)(x-1)$$

gde je x^2+2 nesvodljiv polinom nad poljem $\mathbb{R}$. Prema tome, racionalnu funkciju $\dfrac{5x^2-5x-1}{x^3-x^2+2x-2}$ ćemo zapisati u obliku $\dfrac{Ax+B}{x^2+2}+\dfrac{C}{x-1}$. Iz

$$\frac{5x^2-5x-1}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{C}{x-1}=\frac{(A+C)x^2+(-A+B)x+(-B+2C)}{x^3-x^2+2x-2}$$

izjednačavanjem koeficijenata u polinomima $(A+C)x^2+(-A+B)x+(-B+2C)$ i $5x^2-5x-1$ dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr}
A & & & + & C & = & 5\\
-A & + & B & & & = & -5\\
 & - & B & + & 2C & = & -1
\end{array}$$

Dodavanjem prve jednačine na drugu, a zatim druge na treću, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{rcrcr}
A & + & C & = & 5\\
B & + & C & = & 0\\
 & & 3C & = & -1
\end{array}$$

čija su rešenja $A=\frac{16}{3}$, $B=\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{3}$. Prema tome

$$R(x)=x^3-2x^2-5x-1+\frac{16x+1}{3(x^2+2)}-\frac{1}{3(x-1)}.$$

☑

Zadatak 8.44 *Nad poljem* $\mathbb{R}$ *su dati polinomi*

$$p(x) = x^5 - (10+a)x^4 + (10a+35)x^3 - (35a+50)x^2 + (50a+24)x - 24a,$$

$$q(x) = x^3 + (5-b)x^2 + (6-5b)x - 6b,$$

gde su a i b realni parametri.

(a) *Za koje vrednosti parametara* $a,b \in \mathbb{R}$ *je polinom* $r(x) = x-1$ *najveći zajednički delilac polinoma p i q.*

(b) *Za koje vrednosti* $a,b \in \mathbb{R}$ *je polinom* $r(x) = x^2+x-2$ *najveći zajednički delilac polinoma p i q.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Delenjem polinoma p polinomom r dobijamo

	1	$-10-a$	$10a+35$	$-35a-50$	$50a+24$	$-24a$
1	1	$-9-a$	$9a+26$	$-26a-24$	$24a$	0

$$\Rightarrow \quad p(x) = (x-1)\left(x^4 - (9+a)x^3 + (9a+26)x^2 - (26a+24)x + 24a\right).$$

Dakle, polinom p je deljiv polinomom r za svako $a \in \mathbb{R}$.

Delenjem polinoma q polinomom r dobijamo

	1	$5-b$	$6-5b$	$-6b$
1	1	$6-b$	$12-6b$	$12-12b$

$$\Rightarrow \quad p(x) = (x-1)\left(x^2 + (6-b)x + (12-6b)\right) + (12-12b).$$

Da bi polinom q bio deljiv polinomom r, ostatak pri deljenju mora biti 0, tj. mora biti $b = 1$.

Dakle, polinom r deli polinome p i q za $(a,b) \in A = \{(\alpha,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Da bi polinom r bio *najveći* zajednički delilac polinoma p i q, ovi polinomi ne smeju imati drugih zajedničkih prostih faktora osim $(x-1)$. Za $(a,b) \in A$, odnosno za $b = 1$, je $q(x) = (x-1)\left(x^2-5x+6\right) = (x-1)(x-2)(x-3)$, te iz skupa A treba još eliminisati one uređene parove (a,b) za koje je $x-2$ ili $x-3$ faktor polinoma p, tj. one za koje je 2 ili 3 koren polinoma p. Kako je

	1	$-9-a$	$9a+26$	$-26a-24$	$24a$
2	1	$-7-a$	$7a+12$	$-12a$	0
3	1	$-4-a$	$4a$	0	

odnosno $p(2) = 0$ i $p(3) = 0$ za sve $a \in \mathbb{R}$, sledi da su $x-2$ i $x-3$ faktori polinoma p za sve $(a,b) \in A$, tako da polinom r ni za koje vrednosti parametara a i b nije najveći zajednički delilac polinoma p i q - naime, za polinom $s(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ važi $s|p$, $s|q$ i $r|s$.

(b) Kako je $r(x) = 0$ za $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \{-2, 1\}$, odnosno $r(x) = (x-1)(x+2)$, sledi da je $r = \mathsf{NZD}(p,q)$ ako i samo ako važi

$$r|p \quad \wedge \quad r|q \quad \wedge \quad (\urcorner\exists t \neq r,\ t|p \wedge t|q \wedge r|t).$$

(b.1) Kako je

$r|p \quad \Leftrightarrow \quad (p(1)=0 \ \wedge \ p(-2)=0),$

$r|q \quad \Leftrightarrow \quad (q(1)=0 \ \wedge \ q(-2)=0),$

rešavanjem sistema jednačina

$p(1) \equiv 0,$

$p(-2) = -360a - 720 = 0,$

$q(1) = 12b - 12 = 0,$

$q(-2) \equiv 0,$

dobijamo da je r delilac polinoma p i q za $a=-2$ i $b=1$, odnosno za $(a,b) \in A = \{(-2,1)\}$.

(b.2) Za $(a,b)=(-2,1)$ će r biti <u>najveći</u> zajednički delilac polinoma p i q ako ne postoji polinom t koji je $\overline{\text{deljiv}}$ polinomom r, a koji deli polinome p i q. Deleći polinom $q(x)=x^3+4x^2+x-6$ polinomom $r(x)=(x-1)(x+2)$, tj. redom faktorima $x-1$ i $x+2$ dobijamo

	1	4	1	−6
1	1	5	6	0
−2	1	−3	0	

odnosno $q(x)=(x-1)\left(x^2+5x+6\right)=(x-1)(x+2)(x+3)$. Sledi da će polinom r će biti <u>najveći</u> zajednički delilac polinoma p i q ako i samo ako $x+3$ nije faktor $\overline{\text{polinoma}}$ p, tj. ako i samo ako je $p(-3) \neq 0$. Izračunavajući $p(-3)=-840 \neq 0$ dobijamo da je za $(a,b)=(-2,1)$ zaista $r = \mathsf{NZD}(p,q)$ ☑

Zadatak 8.45 *Neka je* $p(x)=2x^6+ax^5-4x^4-5x^3-bx^2+4x+3$ *polinom nad poljem* $\mathbb{C}$*. Odrediti vrednosti parametara* $a,b \in \mathbb{C}$ *tako da* 1 *i* -3 *budu koreni polinoma* p*, a zatim za te vredosti parametara faktorisati polinom* p*.*

➥ ***Rešenje:*** Rešavajući linearan sistem jednačina

$$0 = p(1) = a-b \quad \wedge \quad 0 = p(-3) = 1260 - 243a - 9b$$

dobijamo $a=5$ i $b=5$, te su (samo) za $(a,b)=(5,5)$ brojevi 1 i -3 koreni polinoma $p(x)=2x^6+5x^5-4x^4-5x^3-5x^2+4x+3$. To znači da su $x-1$ i $x+3$ faktori polinoma p. Tačnije

	2	5	−4	−5	−5	4	3	
1	2	7	3	−2	−7	−3	0	$\Rightarrow \ p(x)=(x-1)\left(2x^5+7x^4+3x^3-2x^2-7x-3\right)$
1	2	9	12	10	3	0		$\Rightarrow \ p(x)=(x-1)^2\left(2x^4+9x^3+12x^2+10x+3\right)$
1	2	11	23	33	36			
−3	2	3	3	1	0			$\Rightarrow \ p(x)=(x-1)^2(x+3)\left(2x^3+3x^2+3x+1\right)$
−3	2	−3	12	−35				

Dobili smo da je 1 dvostruki, a -3 jednostruki koren polioma p, pri čemu je još ostalo da se faktoriše polinom $2x^3+3x^2+3x+1$. Ovaj polinom ima celobrojne koeficijente, te proveravajući kandidate ± 1 i $\pm\frac{1}{2}$ za njegove racionalne korene dobijamo

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 2 & 5 & 8 & 9 \\
-1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\
\frac{1}{2} & 2 & 4 & 5 & \frac{7}{2} \\
-\frac{1}{2} & 2 & 2 & 2 & 0
\end{array}
\Rightarrow \quad
\begin{aligned}
p(x) &= (x-1)^2(x+3)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(2x^2+2x+2\right) \\
&= 2(x-1)^2(x+3)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(x^2+x+1\right)
\end{aligned}
$$

Koreni kvadratnog polinoma x^2+x+1 su $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, te faktorizacija polinoma p nad poljem $\mathbb{C}$ glasi

$$p(x) = 2(x-1)^2(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$ ☑

Zadatak 8.46 *Odrediti parametre $a,b,c \in \mathbb{R}$ tako da -2 bude tačno dvostruki koren polinoma $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x + c$ nad poljem $\mathbb{R}$.*

➥ ***Rešenje:***

<u>Prvi način</u>

Podelićemo pomoću Hornerove šeme polinom p sa $(x-(-2))^2 = (x+2)^2$, te ćemo izjednačavanjem odgovarajućih ostataka sa nulom dobiti a i b za koje -2 jeste dvostruki koren polinoma p, a zatim ćemo od tih a i b odabrati one za koje -2 nije trostruki koren polinoma p, tj. za koje p nije deljivo za $(x+2)^3$, odnosno za koje je ostatak pri delenju sa $(x+2)^3$ različit od nule. Dakle,

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & 1 & a & b & -4 & c \\
\hline
-2 & 1 & a-2 & -2a+b+4 & 4a-2b-12 & -8a+4b+c+24 \\
-2 & 1 & a-4 & -4a+b+12 & 12a-4b-36 & \\
-2 & 1 & a-6 & -6a+b+24 & &
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
-8a+4b+c+24 &=& 0 \\
12a-4b-36 &=& 0 \\
-6a+b+24 &\neq& 0
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
-8a+4b+c &=& -24 \\
12a-4b &=& 36 \\
-6a+b &\neq& -24
\end{array}
\quad \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
b &=& 3a-9 \\
c &=& -24-4(3a-9)+8a = -4a+12 \\
b &\neq& 6a-24
\end{array}
\quad \Leftrightarrow
$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b,c) \in \{(\alpha, 3\alpha-9, -4\alpha+12) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ 3\alpha-9 \neq 6\alpha-24\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a,b,c) \in \{(\alpha, 3\alpha-9, -4\alpha+12) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{5\}\}.$$

<u>Drugi način</u>

Isti postupak možemo sprovesti koristeći izvode polinoma - vidi teoremu 8.2 - broj -2 je tačno dvostruki koren polinoma $p(x)$ ako i samo ako je

$$p(-2) = 0 \quad \wedge \quad p'(-2) = 0 \quad \wedge \quad p''(-2) = 0.$$

Uvrštavajući broj -2 u polinom p i njegove izvode $p'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx - 4$ i $p''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ dobijamo iste dve jednačine i jednu nejednačinu koje smo dobili i na prvi način. ☑

Zadatak 8.47 *Neka su*

$$p(x) = (x+1)^m - x^m - 1, \qquad q(x) = \left(x^2+x+1\right)^2, \qquad r(x) = \left(x^2+x+1\right)^3$$

polinomi nad poljem $\mathbb{C}$.

(a) *Za koje vrednosti parametra* $m \in \mathbb{N}$ *je polinom* p *deljiv polinomom* q*?*

(b) *Za koje vrednosti parametra* $m \in \mathbb{N}$ *je polinom* p *deljiv polinomom* r*?*

➥ ***Rešenje:***

(a) Polinom p je stepena $m-1$, a polinom q stepena 4, te o deljivosti možemo govoriti samo za $m-1 \geq 4$ odnosno $m \geq 5$. Rešenja kvadratne jednačine $x^2+x+1=0$ su $x_1 = -\frac{1}{2} + \mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$ i $x_2 = -\frac{1}{2} - \mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$, te je

$$q(x) = \left(x^2+x+1\right)^2 = \left(x - e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)^2 \left(x - e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)^2.$$

Sledi da $q|p$ ako i samo ako su x_1 i x_2 bar dvostruki koreni polinoma p, a ovo važi ako i samo ako je (vidi teoremu 8.2)

$$[1]: \ p(x_1) = 0, \qquad [2]: \ p'(x_1) = 0, \qquad [3]: \ p(x_2) = 0, \qquad [4]: \ p'(x_2) = 0,$$

gde je $p'(x) = m\left((x+1)^{m-1} - x^{m-1}\right)$. Sistem jednačina $[1],[2],[3],[4]$ ćemo rešiti po $m \in \{5,6,7,\ldots\}$ tako što ćemo rešiti svaku jednačinu pojedinačno, te je skup rešenja sistema jednak preseku skupova rešenja pojedinačnih jednačina. Označimo sa S_i skup rešenja jednačine $[i]$.

$$\begin{aligned}
&\text{(a.1)}\ p(x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}+1\right)^m - \left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)^m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} + e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\right)^m - e^{\frac{2m\pi}{3}\mathbb{i}} - 1 = 0 \quad \overset{(8.13)}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} 2\frac{1}{2}\right)^m - e^{\frac{2m\pi}{3}\mathbb{i}} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}} - \left(e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(t^2 - t + 1 = 0 \ \wedge \ t = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(t = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbb{i} \ \wedge \ t = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(t = e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} \ \vee \ t = e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right) \ \wedge \ t = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(t = e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} \ \wedge \ t = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right) \ \vee \ \left(t = e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} \ \wedge \ t = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right)\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}} \ \vee \ e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}} = e^{\frac{m\pi}{3}\mathbb{i}}\right) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{m\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \frac{-\pi}{3} + 2k\pi = \frac{m\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right) \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \quad (m = 6k+1,\ k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad m = 6k-1,\ k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad m \in \{6k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{6k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

[1] - Deleći jednačine sa π, i množeći ih sa 3.

Uzimajući u obzir gorenavedeni uslov $m \geq 5$, dobijamo da je skup rešenja jednačine [1] skup $S_1 = \{6k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{6k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(a.2) $p'(x_1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}+1\right)^{m-1}-\left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{m-1}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}+e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)\right)^{m-1}-e^{\frac{2(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{m-1}-e^{\frac{2(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad m\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}-\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^2\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(m=0 \ \vee\ e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}-\left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^2=0\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(m=0 \ \vee\ \left(t=e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}} \ \wedge\ t-t^2=0\right)\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(m=0 \ \vee\ \left(t=e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}} \ \wedge\ (t=0 \ \vee\ t=1)\right)\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(m=0 \ \vee\ \left(e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}=0 \ \vee\ e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}=1\right)\right) \quad\stackrel{[1]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(m=0 \ \vee\ e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}=e^0=1\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(m=0 \ \vee\ \frac{(m-1)\pi}{3}+2k\pi=0,\ k\in\mathbb{Z}\right) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (m=0 \ \vee\ m-1+6k=0,\ k\in\mathbb{Z}) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (m=0 \ \vee\ m=1-6k,\ k\in\mathbb{Z}) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (m=0 \ \vee\ m=1+6k,\ k\in\mathbb{Z}) \quad\Leftrightarrow\quad m\in\{0\}\cup\{1+6k \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

[1] - Jednačina $e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}=0$ nema rešenja jer je $\left|e^{\frac{(m-1)\pi}{3}\mathrm{i}}\right|=1$ za svako m.

Uzimajući u obzir gorenavedeni uslov $m\geq 5$, dobijamo da je skup rešenja jednačine [1] skup $S_2=\{6k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$.

(a.3) Na isti način kao pod (a.1) dobijamo isto rešenje:

$$p(x_2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}+1\right)^m-\left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^m-1=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad m\in S_3=\{6k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\cup\{6k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}.$$

(a.4) Na isti način kao pod (a.2) dobijamo isto rešenje:

$$p'(x_2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad m\left(\left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}+1\right)^{m-1}-\left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{m-1}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad m\in S_4=\{6k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}.$$

Prema tome

$$q|p \quad\Leftrightarrow\quad m\in S=S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4=\{6k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}.$$

(b) Analogno kao pod (a), polinom p je stepena $m-1$, a polinom r je stepena 6, te deljivost možemo razmatrati samo za $m\geq 7$ (tj. $m-1\geq 6$). Iz

$$r(x)=\left(x^2+x+1\right)^3=\left(x-e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^3\left(x-e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^3$$

sledi da $r|p$ ako i samo ako su $x_1=e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ i $x_2=e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ bar trostruki koreni polinoma p, a ovo važi ako i samo ako je

[1′] : $p(x_1)=0$, [2′] : $p'(x_1)=0$, [3′] : $p''(x_1)=0$,
[4′] : $p(x_2)=0$, [5′] : $p'(x_2)=0$, [6′] : $p''(x_2)=0$,

gde je $p'(x) = m\Big((x+1)^{m-1} - x^{m-1}\Big)$ i $p''(x) = m(m-1)\Big((x+1)^{m-2} - x^{m-2}\Big)$. Jednačine $[1']$, $[2']$, $[4']$ i $[5']$ smo rešili pod (a), a rešavajući po $m \in \{7,8,9\ldots\}$ jednačine $[3']$ i $[6']$ dobijamo:

(b.1) $p''(x_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m-1)\left(\left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}+1\right)^{m-2} - \left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{m-2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad m(m-1)\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}+e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)\right)^{m-2} - e^{\frac{2(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}}\right) = 0 \quad \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad m(m-1)\left(\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{m-2} - e^{\frac{2(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}}\right) = 0 \quad \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \quad e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} - \left(e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(t = e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} \;\wedge\; t - t^2 = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(t = e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} \;\wedge\; (t = 0 \;\vee\; t = 1)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} = 0 \;\vee\; e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} = 1\right) \quad \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \quad e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} = e^0 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(m-2)\pi}{3} + 2k\pi = 0,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad m - 2 + 6k = 0,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m = 2 - 6k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad m = 2 + 6k,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in \{6k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

[1] - Na osnovu Ojlerovih formula (8.13) važi $e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} + e^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}} 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$.

[2] - Za $m \geq 7$ je $m(m-1) \neq 0$.

[3] - Jednačina $e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}} = 0$ nema rešenja jer je $\left|e^{\frac{(m-2)\pi}{3}\mathrm{i}}\right| = 1$ za sve $m \in \mathbb{N}$.

Uzimajući u obzir gorenavedeni uslov $m \geq 7$, dobijamo da je skup rešenja jednačine $[3']$ skup $S_{3'} = \{6k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(b.2) Na isti način kao pod (b.1) dobijamo isto rešenje:

$$p''(x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m-2)\left(\left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}+1\right)^{m-2} - \left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}\right)^{m-2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \in S_{6'} = \{6k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Prema tome, $r|p$ ako i samo ako

$$m \in S = S_1 \cap S_2 \cap S_{3'} \cap S_4 \cap S_5 \cap S_{6'} = \{6k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{6k+2 \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Dakle, polinom r ne deli polinom p ni za koje $m \in \mathbb{Z}$. ☑

Zadatak 8.48 *Faktorisati polinom* $p(x) = x^4 + 1$ *nad poljem* $\mathbb{R}$.

➥ ***Rešenje:*** Očigledno je $p(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tj. polinom p nema realnih korena, tako da p nema prostih linearnih faktora. Sledi (vidi (8.23)) da se p može rastaviti tačno na dva kvadratna faktora, koje treba odrediti.

Prvi način

$$p(x) = x^4 + 1 = \left(x^2 + ax + b\right)\left(x^2 + cx + d\right) =$$
$$= x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+c = 0 \;\wedge\; ac+b+d = 0 \;\wedge\; ad+bc = 0 \;\wedge\; bd = 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a=-c \ \wedge \ b\neq 0 \ \wedge \ d\neq 0 \ \wedge \ b=\frac{1}{d} \ \wedge \ -c^2+\frac{1}{d}+d=0 \ \wedge \ -cd+\frac{c}{d}=0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a=-c \ \wedge \ b\neq 0 \ \wedge \ d\neq 0 \ \wedge \ b=\frac{1}{d} \ \wedge \ c^2=\frac{1}{d}+d \ \wedge \ c\left(\frac{1}{d}-d\right)=0\right) \qquad [*].$$

Poslednja jednakost važi ako je $c=0$ ili $d=\frac{1}{d}$, te dalje sistem jednačina $[*]$ rešavamo diskusijom po ova dva slučaja.

(a) U slučaju $c=0$ je

$$[*] \quad \Leftrightarrow \quad \left(a=c=0 \ \wedge \ b\neq 0 \ \wedge \ d\neq 0 \ \wedge \ b=\frac{1}{d} \ \wedge \ \frac{1}{d}+d=0\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a=c=0 \ \wedge \ d^2=-1\right),$$

te u ovom slučaju sistem nema rešenja.

(b) U slučaju $d=\frac{1}{d} \ \Leftrightarrow \ d^2=1 \ \Leftrightarrow \ (d=1 \ \vee \ d=-1)$ je

(b.1) za $d=1$:

$$[*] \quad \Leftrightarrow \quad \left(b=d=1 \ \wedge \ a=-c \ \wedge \ c^2=2\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\left(b=d=1 \ \wedge \ a=\sqrt{2} \ \wedge \ c=-\sqrt{2}\right) \vee \right.$$

$$\left. \vee \left(b=d=1 \ \wedge \ a=-\sqrt{2} \ \wedge \ c=\sqrt{2}\right)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad p(x)=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right);$$

(b.2) za $d=-1$:

$$[*] \quad \Leftrightarrow \quad \left(b=d=-1 \ \wedge \ a=-c \ \wedge \ c^2=-2\right),$$

tj. ni u ovom slučaju nema rešenja.

Dakle, jedino rešenje[16] zadatka je $p(x)=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$.

Drugi način

Do faktorizacije u $\mathbb{R}$ možemo doći pomoću faktorizacije u $\mathbb{C}$, jer se kompleksni koreni polinoma p lako izračunavaju. Iz

$$p(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\in\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{e^{\pi \mathrm{i}}}=\left\{e^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}} \;\middle|\; k\in\{-2,-1,0,1\}\right\})=$$

$$=\left\{e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}},e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right\}$$

sledi

$$p(x)=\left(x-e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)\overset{(8.22)}{=}\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right),$$

gde je poslednji izraz faktorizacija polinoma p nad $\mathbb{R}$. ☑

Zadatak 8.49 *Odrediti koeficijente $a,b,c\in\mathbb{R}$ polinoma $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ako se zna da su 1 i -2 njegove nule, kao i da polinom P pri delenju sa $x-3$ daje ostatak 10. Za tako određene koeficijente $a,b,c\in\mathbb{R}$ faktorisati polinom P nad poljem $\mathbb{R}$.*

[16] Više rešenja i ne može biti jer je faktorizacija polinoma uvek jedinstvena

➥ ***Rešenje:*** Deleći polinom $P(x)$ redom sa $x-1$, $x+2$ i $x-3$ dobijamo ostatke koje redom izjednačavamo sa 0, 0 i 10:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & a & b & c \\ \hline 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & a+b+c+1=0 \\ -2 & 1 & a-1 & -a+b+3=0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & a & b & c \\ \hline 3 & 1 & a+3 & 3a+b+9 & 9a+3b+c+27=10 \end{array}.$$

Rešavajući sistem jednačina

$$a+b+c+1=0, \qquad -a+b+3=0, \qquad 9a+3b+c+27=10$$

dobijamo $a=-1$, $b=-4$, $c=4$. Dakle $P(x)=x^3-x^2-4x+4$. Koristeći da su 1 i -2 koreni polinoma P, dolazimo i do trećeg njegovog korena:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & \end{array},$$

odakle sledi $P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)$. ☑

Zadatak 8.50 *Napisati normirani polinom sa realnim koeficijentima $P(x)$ petog stepena koji je deljiv sa $Q(x)=x^2+4$, jedan koren polinoma $P(x)$ je $\mathbb{i}$, a ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x-1$ je -20. Dobijeni polinom $P(x)$ faktorisati nad poljem realnih i nad poljem kompleksnih brojeva.*

➥ ***Rešenje:*** Kako je P polinom sa koeficijentima iz polja realnih brojeva, iz $P(\mathbb{i})=0$ sledi da mora biti i $P(\overline{\mathbb{i}})=P(-\mathbb{i})=0$ (vidi (8.21)), te je polinom P deljiv polinomom $S(x)=(x-\mathbb{i})(x+\mathbb{i})=x^2+1$. Dakle, P je polinom 5-og stepena i deljiv je polinomima Q i S koji su stepena 2, odakle sledi da je P oblika $P(x)=(x^2+4)(x^2+1)(x-\alpha)$. Iz uslova da pri delenju polinoma $P(x)$ polinomom $x-1$ dobijamo ostatak -20 sledi da važi (Bezuova teorema - vidi [RD05]) $P(1)=-20$. Uvrštavajući poslednju jednakost u polinom $P(x)=(x^2+4)(x^2+1)(x-\alpha)$ dobijamo da je $-20=P(1)=10-10\alpha$, odakle dobijamo $\alpha=3$. Dakle, traženi polinom je

$$P(x)=(x^2+4)(x^2+1)(x-3)=x^5-3x^4+5x^3-15x^2+4x-12,$$

a faktorizacije nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ redom glase

$$P(x)=(x^2+4)(x^2+1)(x-3)=(x-2i)(x+2i)(x-\mathbb{i})(x+\mathbb{i})(x-3).$$ ☑

Zadatak 8.51 *Ostaci pri delenju polinoma P sa $x-1$, $x-2$ i $x+1$ su redom 2, 3 i 6. Odrediti ostatak pri delenju polinoma P polinomom $(x-1)(x-2)(x+1)$.*

➥ ***Rešenje:*** Pri delenju polinoma P polinomom trećeg stepena $(x-1)(x-2)(x+1)$ se dobija količnik $Q(x)$ i ostatak koji je najviše drugog stepena, tj. ostatak je oblika ax^2+bx+c za neke $a,b,c\in\mathbb{R}$ koje treba da izračunamo. Na osnovu teoreme o delenju polinoma sledi

[∗] $P(x)=(x-1)(x-2)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c.$

S druge strane, ako se pri delenju polinoma P sa $x-\alpha$ dobija neki količnik $q(x)$ i ostatak β, na osnovu teoreme o delenju polinoma sledi da je $P(x) = (x-\alpha)q(x)+\beta$, te koristeći zadane uslove dobijamo da je

[1] $P(x) = (x-1)q_1(x)+2,$
[2] $P(x) = (x-2)q_2(x)+3,$
[3] $P(x) = (x+1)q_3(x)+6,$

za neke količnike $q_1(x)$, $q_2(x)$ i $q_3(x)$. Ako u poslednju jednakost uvrstimo redom brojeve 1, 2 i -1, to korišćenjem i prve tri jednakosti dobijamo sistem jednačina

$2 \overset{[1]}{=} P(1) \overset{[*]}{=} a+b+c,$
$3 \overset{[2]}{=} P(2) \overset{[*]}{=} 4a+2b+c,$
$6 \overset{[3]}{=} P(-1) \overset{[*]}{=} a-b+c,$

Ako prvu jednačinu pomnoženu sa -4 dodamo drugoj, zatim prvu jednačinu oduzmemo od treće, dobijamo

$$\begin{array}{rrrcrlll} a+ & b+ & c & = & 2 & & & \Rightarrow\ a=1\\ & -2b & -3c & = & -5 & & \Rightarrow\ c=3 & \\ & -2b & & = & 4 & \Rightarrow\ b=-2 & & \end{array}$$

Dakle, ostatak pri delenju polinoma P polinomom $(x-1)(x-2)(x+1)$ je x^2-2x+3. ☑

Zadatak 8.52 *Neka su $P(x) = x^3-2px^2+p^2x-q^2$ i $Q(x) = x^3-px+q$ polinomi nad poljem $\mathbb{C}$, gde je $p,q \in \mathbb{C}$. Dokazati da su nule polinoma P kvadrati nula polinoma Q.*

➥ ***Rešenje:*** Polinom Q je trećeg stepena, te nad $\mathbb{C}$ tri nule x_1,x_2,x_3. Treba dokazati da su x_1^2,x_2^2,x_3^2 nule polinoma P. S obzirom da su x_1,x_2,x_3 nule polinoma Q ako i samo ako za polinom Q važe odgovarajuće Vijetove formule, a x_1^2,x_2^2,x_3^2 su nule polinoma P ako i samo ako važe njima odgovarajuće Vijetove formule, tvrđenje možemo dokazati tako što ćemo dokazati sledeću implikaciju:

$$\begin{array}{rcll} x_1+x_2+x_3 &=& 0 & \text{[Q1]}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 &=& -p & \text{[Q2]}\\ x_1x_2x_3 &=& -q & \text{[Q3]} \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{rcll} x_1^2+x_2^2+x_3^2 &=& 2p & \text{[P1]}\\ x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2 &=& p^2 & \text{[P2]}\\ x_1^2x_2^2x_3^2 &=& q^2 & \text{[P3]} \end{array}.$$

Neka važe jednakosti [Q1], [Q2] i [Q3].

[P3] Kvadriranjem [Q3] dobijamo [P3].

[P1] Kvadriranjem [Q1] dobijamo

$$0 = (x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) \overset{[Q2]}{=} x_1^2+x_2^2+x_3^2-2p,$$

odakle sledi [P1].

[P2] Kvadriranjem [Q2] dobijamo

$$p^2 = (x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3) = x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3) \overset{[Q3],[Q1]}{=}$$
$$= x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2,$$

odakle sledi [P2]. ☑

Zadatak 8.53 *Neka su* $f(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1$ *i* $g(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$ *polinomi nad poljem* $\mathbb{R}$*, i neka je* $r = \mathsf{NZD}(f, g)$*. Odrediti sve prirodne brojeve* n *za koje polinom* r *deli polinom* $t_n(x) = (x+1)^{1993} + x^n$*.*

➥ ***Rešenje:*** Euklidovim algoritmom izračunavamo polinom r.

korak 1:

$$\begin{array}{l}
(x^5 + 2x^4 - 2x^2 - 3x - 1) : (x^4 - x^2 - 2x - 1) = x + 2 \\
\underline{-(x^5 - x^3 - 2x^2 - x)} \\
\quad 2x^4 + x^3 - 2x - 1 \\
\quad \underline{-(2x^4 - 2x^2 - 4x - 2)} \\
\quad\quad x^3 + 2x^2 + 2x + 1
\end{array}$$

korak 2:

$$\begin{array}{l}
(x^4 - x^2 - 2x - 1) : (x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = x - 2 \\
\underline{-(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x)} \\
\quad -2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \\
\quad \underline{-(2x^3 - 4x^2 - 4x - 2)} \\
\quad\quad x^2 + x + 1
\end{array}$$

korak 3:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) : (x^2 + x + 1) = x + 1 \\
\underline{-(x^3 + x^2 + x)} \\
\quad x^2 + x + 1 \\
\quad \underline{-(x^2 + x + 1)} \\
\quad\quad 0
\end{array}$$

Sledi da je $r(x) = x^2 + x + 1$. Shodno napomeni na strani 163 o faktorizaciji polinoma od kojih je jedan deljiv drugim, da bi polinom r bio delilac polinoma t_n, svaki kompleksni koren z_0 reda m polinoma r mora biti i koren reda $k \geq m$ (dakle reda najmanje k) polinoma t_n. Kompleksni koreni polinoma r su $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{-3}}{2} = e^{\pm\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, i oni su jednostruki, te oni moraju biti i bar jednostruki koreni polinoma t_n, odnosno mora da važi $t_n\left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) = 0$ i $t_n\left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) = 0$.

$$\left(t_n\left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) = 0 \ \wedge \ t_n\left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) = 0\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + 1\right)^{1993} + \left(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^n = 0 \ \wedge \ \left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} + 1\right)^{1993} + \left(e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)^n = 0\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\right)^{1993} + e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0 \ \wedge \ \left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\right)^{1993} + e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0\right) \ \overset{(8.13),[1]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ \left(e^{\mathrm{i}\frac{1993\pi}{3}}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^{1993} + e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0 \ \wedge \ e^{-\mathrm{i}\frac{1993\pi}{3}}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\right)^{1993} + e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(e^{664\pi\mathrm{i} + \frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} \cdot 1 + e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0 \ \wedge \ e^{-664\pi\mathrm{i} - \frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} \cdot 1 + e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0\right) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \left(e^{664\pi\mathrm{i}} \cdot e^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} + e^{\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0 \ \wedge \ e^{-664\pi\mathrm{i}} \cdot e^{-\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} + e^{-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{3}} = 0\right) \ \overset{[2]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{1}{3}\pi \mathbb{i}} = -e^{\mathbb{i}\frac{2n\pi}{3}} \ \wedge \ e^{-\frac{1}{3}\pi \mathbb{i}} = -e^{-\mathbb{i}\frac{2n\pi}{3}}\right) \overset{[3]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{\frac{1}{3}\pi \mathbb{i}} = e^{\mathbb{i}\pi\frac{2n+3}{3}} \ \wedge \ e^{-\frac{1}{3}\pi \mathbb{i}} = e^{\mathbb{i}\pi\frac{3-2n}{3}}\right) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{3}\pi + 2k\pi = \frac{2n+3}{3}\pi \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi = \frac{3-2n}{3}\pi\right) \overset{[4]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z},\ 1+6k = 2n+3 \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z},\ -1+6k = 3-2n) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k-1 \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 2-3k) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (n \in \{3k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \wedge \ n \in \{2-3k \mid k \in \mathbb{Z}\}) \overset{[5]}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad n \in \{3k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

[1] - Važi $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$.

[2] - Važi $e^{664\pi\mathbb{i}} = e^0 = 1$.

[3] - Važi $-e^{\varphi\mathbb{i}} = -1 \cdot e^{\varphi\mathbb{i}} = e^{\pi\mathbb{i}} \cdot e^{\varphi\mathbb{i}} = e^{(\varphi+\pi)\mathbb{i}}$.

[4] - Množeći obe jednakosti sa $\frac{3}{\pi}$.

[5] - $\{3k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{2-3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Pri tome je n parametar iz skupa $\mathbb{N}$, te je krajnje rešenje

$$n \in \{3k-1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N} = \{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$ ☑

☞ Neka je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ proizvoljno konačno polje sa m elemenata. Neka je $\mathbb{O}$ nula (neutralni element operacije +) tog polja. Tada važi (vidi [RD05])

$$\begin{aligned} \forall a \in F \setminus \{\mathbb{O}\},\ a^{m-1} = 1 \quad &\Rightarrow \quad \forall a \in F \setminus \{\mathbb{O}\},\ a^m = a \\ &\Rightarrow \quad \forall a \in F \setminus \{\mathbb{O}\},\ a^m - a = \mathbb{O} \\ &\Rightarrow \quad \forall a \in F,\ a^m - a = \mathbb{O}. \end{aligned}$$

Prema tome, polinomu $x^m - x$ odgovara polinomska funkcija koja je identički jednaka $\mathbb{O}$, te koristeći identitet $a^m - a = \mathbb{O}$ možemo konstruisati različite polinome koji imaju iste odgovarajuće polinomske funkcije. Na primer, u polju $\mathbb{Z}_3$ važi

$$\forall a \in F,\ 1 + a^2 = 1 + \mathbb{O} + a^2 = 1 + a^3 - a + a^2 = 1 + 2a + a^2 + a^3 = \ldots$$

tako da polinomi $x^2 + 1,\ x^3 + x^2 + 2x + 1, \ldots$ imaju jednake polinomske funkcije.

Zadatak 8.54 *Neka je $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom nad poljem $\mathbb{Z}_3$. Za koje vrednosti parametara $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ je polinomska funkcija polinoma p jednaka polinomskoj funkciji nula-polinoma?*

➥ ***Rešenje:*** Polinomska funkcija nula polinoma $\mathbb{O}$ je nula-funkcija, te treba da nađemo vrednosti $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ za koje važi $\forall x \in Z_3,\ p(x) = 0$. Svodeći sistem linearnih jednačina $p(0) = 0 \ \wedge \ p(1) = 1 \ \wedge \ p(2) = 0$ na trougaoni oblik (drugu jednačinu dodajemo na treću, a zatim prvu jednačinu stavljamo na mesto treće)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & d & = & 0 \\ 1 & + & a & + & b & + & c & + & d & = & 0 \\ 1 & + & 2a & + & b & + & 2c & & & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcccccccccl} & a & + & b & + & c & + & d & = & 2 & \Rightarrow a = 2c \\ \Rightarrow & & & 2b & + & & + & d & = & 1 & \Rightarrow b = 2 \\ & & & & & & & d & = & 0 & \end{array}$$

(1 puta neodređen sistem) te su rešenja

$(a,b,c,d) \in \{(2\alpha,2,\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbb{Z}_3\} = \{(0,2,0,0),(2,2,1,0),(1,2,2,0)\}$.

Dakle, polinomi

$p_1(x) = x^4 + 2x^3$,
$p_2(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$,
$p_3(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x$,

imaju nula-funkciju kao odgovarajuću polinomsku funkciju. ☑

Zadatak 8.55 *Neka je* $\mathbf{F} = (F,+,\cdot)$ *proizvoljno polje, neka je* $p(x) = x^4 - ax^3 - bx - c$ *polinom nad poljem* $\mathbf{F}$*, i neka su* $a,b,c,d \in F$ *koreni polinoma* p*.*

(a) *Dokazati da važe sledeće jednakosti*

(1) $d = -b - c$, (2) $b^2 + bc + c^2 = 0$, (3) $bc(b+c) = -b$, (4) $ab = -c$.

(b) *Za* $\mathbf{F} = \mathbb{C}$*, izračunati vrednosti* a,b,c,d *za koje je* $p(0) \neq 0$.

➥ ***Rešenje:***

(a) Kako su $a,b,c,d \in F$ koreni polinoma p, na osnovu Vijetovih formula sledi

[1] $a+b+c+d = a$, [3] $acd + bcd + abc + abd = b$,
[2] $cd + ab + ac + ad + bc + bd = 0$, [4] $abcd = -c$.

Iz [1] direktno sledi (1). Uvrštavanjem (1) u [2] dobijamo (2). Uvrštavanjem (1) u [3], i koristeći (2) dobijamo

$acd + bcd + abc + abd = b$
$\Rightarrow \quad -acb - ac^2 - b^2c - bc^2 + abc - ab^2 - abc = b$
$\Rightarrow \quad -acb - ac^2 - b^2c - bc^2 - ab^2 = b$
$\Rightarrow \quad -a\left(cb + c^2 + b^2\right) - bc(b+c) = b$
$\Rightarrow \quad -bc(b+c) = b$
$\Rightarrow \quad (3).$

Uvrštavanjem (1) u [4], i koristeći (3) dobijamo

$abcd = -c$
$\Rightarrow \quad -ab^2c - abc^2 = -c$
$\Rightarrow \quad -a(bc(b+c)) = -c$
$\Rightarrow \quad -a(-b) = -c$
$\Rightarrow \quad (4).$

(b) Iz $0 \neq p(0) = 0^4 - a0^3 - b0 - c$ sledi $c \neq 0$. Dalje, iz (4) i $c \neq 0$ sledi $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Deleći (3) sa $b \neq 0$ dobijamo jednakost $b = -c - \frac{1}{c}$, čijim uvrštavanjem u (2) sledi $c^2 + 1 + \frac{1}{c^2} = 0$, odnosno, množenjem sa $c^2 \neq 0$ dobijamo jednačinu $\left(c^2\right)^2 + c^2 + 1 = 0$ po c. Uvodeći smenu $c^2 = t$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$t^2+t+1=0$ čija su rešenja $t_1=-\frac{1}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$ i $t_2=-\frac{1}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}$, te vraćajući smenu $c=\sqrt{t}$ dobijamo 4 rešenja za c:

$$c_1=e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}=\frac{1}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad c_2=e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}=-\frac{1}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$c_3=e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}=\frac{1}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad c_4=e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}=-\frac{1}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Koristeći vezu $b=-c-\frac{1}{c}$ i Ojlerove formule (8.13) dobijamo odgovarajuća 4 rešenja za b:

$$b_1=-\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}+e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\mathcal{R}\mathrm{e}\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\frac{1}{2}=-1,$$
$$b_2=-\left(e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}+e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\mathcal{R}\mathrm{e}\left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1,$$
$$b_3=-\left(e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}+e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\mathcal{R}\mathrm{e}\left(e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\frac{1}{2}=-1,$$
$$b_4=-\left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}+e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\mathcal{R}\mathrm{e}\left(e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}\right)=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Koristeći vezu (4) tj. $a=\frac{c}{b}$, gde je $b_i\neq 0$, dobijamo odgovarajuća 4 rešenja za a:

$$a_1=-e^{\frac{\pi}{3}\mathbb{i}},\qquad a_2=e^{-\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}},\qquad a_3=-e^{-\frac{\pi}{3}\mathbb{i}},\qquad a_4=e^{\frac{2\pi}{3}\mathbb{i}}.$$

Koristeći vezu (1) tj. $d_i=-b_i-c_i$, dobijamo odgovarajuća 4 rešenja za d:

$$d_1=-1-\left(\frac{1}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad d_2=1-\left(-\frac{1}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$d_3=-1-\left(\frac{1}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad d_4=1-\left(-\frac{1}{2}+\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}-\mathbb{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prema tome, skup rešenja za (a,b,c,d) je

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-1,\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},1,-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$ ☑

Zadatak 8.56 *U skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$ rešiti jednačinu $x^n+x^{n-1}+\ldots+x+p=0$, gde je $n\in\mathbb{N}$ i $p\in\mathbb{N}$ je prost broj.*

➥ ***Rešenje:*** Polinom $Q(x)=x^n+x^{n-1}+\ldots+x+p=0$ ima celobrojne koeficijente, te su nad poljem $\mathbb{Q}$ koreni polinoma Q oblika $\frac{m}{k}$ gde je $m|p$ i $k|1$ (vidi stranu 163), odnosno, kako je p prost broj, $m\in\{1,-1,p,-p\}$ i $k\in\{1,-1\}$. Dakle, svi racionalni, pa samim tim i svi celi koreni polinoma Q pripadaju skupu $\{1,-1,p,-p\}$. Proverom ovih kandidata za rešenje dobijamo

(a) $Q(1)>0$ i $Q(p)>0$;

(b) $Q(-1) = \begin{cases} p \neq 0 & , \quad \text{za parno } n \\ p-1 \neq 0 & , \quad \text{za neparno } n \end{cases}$;

(c) $Q(-p) = p^2 - p^3 + p^4 - \ldots + (-1)^n p^n$,

(c.1) za $n = 1$ je $Q(-p) = -p + p = 0$;

(c.2) za $n \geq 2$ se matematičkom indukcijom lako dokazuje da za parno $n \geq 2$ važi $Q(-p) = p^2 - p^3 + p^4 - \ldots + (-1)^n p^n > 0$, dok za neparno $n \geq 2$ važi $Q(-p) = p^2 - p^3 + p^4 - \ldots + (-1)^n p^n < 0$; sledi dokaz ovog tvrđenja za parno n, a na isti način se tvrđenje dokazuje i za neparno n:

- za $n = 2$ je $Q(-p) = p^2 > 0$;
- pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = 2k$:
  $Q(-p) = p^2 - p^3 + p^4 - \ldots + (-1)^{2k} p^{2k} = t > 0$;
- dokazujemo da tvrđenje važi i za $n = 2k + 2$:
  $Q(-p) = p^2 - p^3 + p^4 - \ldots + p^{2k} - p^{2k+1} + p^{2k+2} =$
  $= t - p^{2k+1} + p^{2k+2} = t + p^{2k+1}(p - 1) > 0$
  (jer je $p > 1$).

Rezime: za $n = 1$ je $-p$ jedino celobrojno rešenje jednačine $Q(x) = 0$, a za $n > 0$ posmatrana jednačina nema celobrojnih rešenja. ☑

Glava 9

Matrice, determinante i sistemi linearnih jednačina

9.1 Matrice i i osnovne operacije sa matricama

Neformalno, ***matrica*** A ***formata*** $m \times n$ nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ je „pravougaoni blok” elemenata polja $\mathbf{F}$, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

gde je $a_{i,j} \in F$. Dakle, element $a_{i,j}$ se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni. Matrica je ***kvadratna*** ako je $m = n$.

✎ Sa $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$ ćemo označavati matricu A formata $m \times n$ čiji su elementi $a_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

✎ ***Nula-matrica*** nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ (formata $m \times n$) je matrica čiji su svi elementi nule polja $\mathbf{F}$. Označavaćemo je sa $\mathbb{O}$, odnosno sa $\mathbb{O}_{m \times n}$ ako je potrebno naglasiti kog je formata, tj. u slučajevima kada to nije iz konteksta jasno.

✎ ***Jedinična matrica*** nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ je kvadratna matrica (formata $n \times n$) čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice polja $\mathbf{F}$, a ostali elementi su nule polja $\mathbf{F}$. Označavaćemo je sa I (takođe je uobičajena i oznaka E), odnosno sa $I_{n \times n}$ ako je potrebno naglasiti kog je formata, tj. u slučajevima kada to nije iz konteksta jasno.

Osnovne računske operacije sa matricama su sabiranje matrica, množenje matrice skalarom, i množenje matrica:

1. Matrice se mogu sabirati samo ako su istog formata. Za matrice $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$ i $B = [b_{i,j}]_{m \times n}$, njihov zbir je matrica $C = [c_{i,j}]_{m \times n}$ (takođe formata $m \times n$) čiji su elementi jednaki zbiru elemenata matrica A i B sa odgovarajućih pozicija, tj. $A + B = C$ gde su elementi matrice $C = [c_{i,j}]_{m \times n}$ definisani sa

$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

2. Matrica se skalarom (iz istog polja iz kojeg su elementi matrice) množi tako što se svaki element matrice pomnoži tim skalarom. Za matricu $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ i skalar λ je proizvod skalara λ i matrice A matrica $C = [c_{i,j}]_{m\times n} = \lambda \cdot A$ (takođe formata $m\times n$) gde su elementi matrice $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$ definisani sa
$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad c_{i,j} = \lambda \cdot a_{i,j}.$$
3. Matrice se mogu množiti samo ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge matrice. Za matrice $A = [a_{i,j}]_{m\times k}$ i $B = [b_{i,j}]_{k\times n}$, njihov proizvod je matrica $C = [c_{i,j}]_{m\times n} = A \cdot B$ (broj vrsta je jednak broju vrsta prve matrice, a broj kolona je jednak broju kolona druge) čiji je svaki element $c_{i,j}$ jednak „proizvodu i-te vrste matrice A i j-te kolone matrice B, tj. $A \cdot B = C$ gde su elementi matrice $C = [c_{i,j}]_{m\times n}$ definisani sa
$$\forall i \in \{1,\dots,m\},\ \forall j \in \{1,\dots,n\}, \quad c_{i,j} = \sum_{l=1}^{k} a_{i,l} \cdot b_{l,j}.$$
4. Razlika matrica $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ i $B = [b_{i,j}]_{m\times n}$ je zbir matrica A i $-B = [-b_{i,j}]_{m\times n}$, tj. $A - B = A + (-1) \cdot B = [a_{i,j} - b_{i,j}]_{m\times n}$.
5. ***Transponovana matrica*** matrice $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ je matrica $A^T = [a_{j,i}]_{n\times m}$, tj. matrica dobijena od A tako što svaka i-ta vrsta matrice A postaje i-ta kolona matrice A^T.

Za proizvoljnu matricu $A_{m\times n}$, u izrazima kao što su $A + \mathbb{O}$ i AI podrazumevamo da su $\mathbb{O}$ i I matrice odgovarajućeg formata, tj. da je $\mathbb{O}$ formata $m\times n$, a I formata $n\times n$.

Kada god ne naglasimo drugačije, podrazumevaćemo da je matrica nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Ne treba mešati množenje matrice skalarom i množenje determinante skalarom. Matrica se množi skalarom tako što se svaki element matrice pomnoži tim skalarom, a kao što ćemo videti kasnije, determinanta se množi skalarom tako što se elementi jedne vrste ili kolone pomnože tim skalarom.

Sabiranje matrica odgovarajućeg formata je asocijativna i komutativna operacija. Neutralni element pri sabiranju matrica odgovarajućeg formata je nula-matrica, a inverzni element matrice $A = [a_{i,j}]_{m\times n}$ pri sabiranju je $-A = [-a_{i,j}]_{m\times n}$.

Primer 9.1 *Neka su*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -3 & 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$
$$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

matrice nad poljem $\mathbb{R}$. Tada je npr.

(a) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -5 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix},$

$$C+D=\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & -7 \end{bmatrix}, \quad C-D=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A+\mathbb{O}=A, \quad \mathbb{O}-A=-A=\begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix},$$

dok, na primer, zbirovi $A+C$, $B+E$, $E+F$, ... *nisu definisani;*

(b) $A^T=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^T=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad F^T=\begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix};$

(c) $2\cdot C=\begin{bmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & 8 \\ 10 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad 2\cdot E=\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -10 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2\cdot F=\begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix};$

(d) $A^2=A\cdot A$ *nije definisano,*

$A\cdot B$ *nije definisano,*

$$A\cdot C=\begin{bmatrix} -26 & -1 & 30 \\ -23 & -5 & 30 \end{bmatrix}, \quad A\cdot D=\begin{bmatrix} -23 & -1 & -21 \\ 0 & -5 & 13 \end{bmatrix},$$

$$A\cdot E=\begin{bmatrix} -47 & -9 \\ -25 & -14 \end{bmatrix}, \quad A\cdot F=\begin{bmatrix} 15 \\ 32 \end{bmatrix},$$

$C\cdot A$ *nije definisano,*

$C\cdot B$ *nije definisano,*

$$C^2=C\cdot C=\begin{bmatrix} -7 & 7 & 13 \\ 14 & 3 & -6 \\ -9 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad C\cdot D=\begin{bmatrix} -12 & -4 & 12 \\ 14 & 17 & 12 \\ -26 & -7 & 21 \end{bmatrix},$$

$$C\cdot E=\begin{bmatrix} -25 & -1 \\ 17 & 3 \\ -37 & 2 \end{bmatrix}, \quad C\cdot F=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix},$$

$$E\cdot A=\begin{bmatrix} -12 & -3 & 10 \\ -7 & -31 & 21 \\ 2 & 32 & -18 \end{bmatrix}, \quad E\cdot B=\begin{bmatrix} -7 & 17 & 14 \\ -3 & -11 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$E\cdot C$ *nije definisano,*

$E\cdot D$ *nije definisano,*

$E^2=E\cdot E$ *nije definisano,*

$E\cdot F$ *nije definisano,*

$F\cdot A$, $F\cdot B$, $F\cdot C$, $F\cdot D$, $F\cdot E$ *i* $F^2=F\cdot F$ *nisu definisani.* ✔

Teorema 9.1 *Neka je* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *skup svih matrica formata* $m\times n$ *nad poljem* $\mathbf{F}=(F,+,\cdot)$. *Uređeni par* $\mathbf{M}_{m\times n}=(\mathcal{M}_{m\times n},+)$ *je komutativna grupa. Neutralni element je nula-matrica* $\mathbb{O}$, *tj. za svaku matricu* $A\in\mathcal{M}_{m\times n}$ *važi* $A+\mathbb{O}=\mathbb{O}+A=A$, *a za proizvoljnu matricu* $A=[a_{i,j}]_{m\times k}$, *njoj inverzni element je matrica* $-A=[-a_{i,j}]_{m\times k}$.

☞ Množenje matrica odgovarajućeg formata je asocijativna operacija. Neutralni element pri sabiranju matrica odgovarajućeg formata je jedinična matrica. Za neke matrice postoji inverzni element pri množenju matrica, tzv. inverzna matrica, a za neke ne.

Teorema 9.2 *Neka je $\mathcal{M}_{n\times n}$ skup svih matrica formata $n\times n$ nad poljem $\mathbf{F} = (F,+,\cdot)$. Uređeni par $\mathbf{M}_{n\times n} = (\mathcal{M}_{n\times n},\cdot)$ je asocijativan grupoid sa neutralnim elementom. Neutralni element je jedinična matrica I formata $n\times n$, tj. za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ važi $A\cdot I = I\cdot A = A$. Kao što ćemo videti kasnije, neke matrice skupa $\mathcal{M}_{n\times n}$ imaju inverzni element, a neke ne.*

U opštem slučaju, množenje matrica nije komutativna operacija. Matrice A i B čak mogu biti takvog formata da je proizvod $A\cdot B$ definisan, a proizvod $B\cdot A$ nije definisan.

Množenje matrica je i distributivno u odnosu na sabiranje matrica, tj. za matrice A, B i C odgovarajućeg formata važi $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ i $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$.

Teorema 9.3 *Neka je $\mathcal{M}_{n\times n}$ skup svih matrica formata $n\times n$ nad poljem $\mathbf{F} = (F,+,\cdot)$. Uređena trojka $\mathbf{M}_{n\times n} = (\mathcal{M}_{n\times n},+,\cdot)$ je prsten sa jedinicom*[1].

✎ Matrica A je ***idempotentna*** ako je $A\cdot A = A$.

✎ Matrica A je ***involutivna*** ako je $A\cdot A = I$.

✎ Matrica A je ***skalarna*** ako je oblika $A = \lambda\cdot I$ za neki skalar λ.

✎ Matrica A je ***nilpotentna*** ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $A^n = \mathbb{O}$ (nilpotentna matrica mora biti kvadratna matrica da bi A^n bilo definisano).

9.2 Determinante

Označimo sa S_n skup svih permutacija skupa $\{1,2,\dots,n\}$. Svaka permutacija $\sigma \in S_n$ skupa $\{1,2,\dots,n\}$ je jedna bijektivna funkcija tog skupa, odnosno

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

✎ Ovu permutaciju je uobičajeno da skraćeno zapisujemo sa $(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \dots\ \sigma(n))$.

Ako je $i < j$ i $\sigma(i) > \sigma(j)$, tada uređeni par $(\sigma(i),\sigma(j))$ nazivamo ***inverzijom*** permutacije σ. Broj svih inverzija permutacije σ ćemo označavati sa $Inv\,\sigma$, odnosno imamo da je $Inv\,\sigma = |\{(\sigma(i),\sigma(j)) \mid i < j \land \sigma(i) > \sigma(j)\}|$. Za permutaciju σ važi

$$Inv(m,\sigma(2),\sigma(3)\dots\sigma(n)) = m-1+Inv(\sigma(2),\sigma(3)\dots\sigma(n)).$$

Na primer, broj svih inverzija permutacije (3 5 1 4 2) dobijamo tako što brojimo sve cifre desno od trojke koje su manje od tri, i kojih ima 2, desno od petice i manjih od pet ima 3, desno od jedinice a manjih od jedan ima 0, desno od četiri a manjih od četiri ima

[1] Ovaj prsten nije komutativan, i u njemu postoje delitelji nule

1, i desno od dvojke a manjih od dva ima 0. Dakle, posmatrana permutacija (3 5 1 4 2) ima ukupno $2+3+0+1+0=6$ inverzija.

Determinanta kvadratne matrice je jedna od najvažnijih karakteristika kvadratnih matrica. Za kvadratnu matricu $A=\left[a_{i,j}\right]_{n\times n}$, vrednost njene determinante se izračunava po formuli

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{Inv\,\sigma}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}. \tag{9.1}$$

Ako se ne naglasi drugačije, podrazumevamo da su determinante zadane nad poljem realnih brojeva.

Pri izračunavanju determinanti ćemo koristiti neke od sledećih njihovih važnih osobina.

[D1] Ako je matrica A' dobijena od matrice A tako što su i-ta vrsta i j-ta vrsta (ili kolona) zamenile mesta (gde je $i\neq j$), tada je $\det A'=-\det A$.

[D2] Ako su dve vrste (kolone) u matrici A jednake ili proporcionalne, tada važi da je $\det A=0$.

[D3] Determinanta se množi skalarom (brojem) tako što se svi elementi neke vrste (ili kolone) pomnože tim skalarom, odnosno, ako se i-ta vrsta (kolona) matrice A pomnoži skalarom λ, dobija se matrica A' za koju važi $\det A'=\lambda\det A$.

[D4] Ako su svi elementi neke i-te vrste (kolone) matrice A jednaki nuli, tada važi da je $\det A=0$.

[D5] Ako je matrica A' dobijena od matice A tako što je neka i-ta vrsta (kolona) matrice A pomnožena skalarom λ dodana nekoj j-toj vrsti (koloni), tada važi da je $\det A'=\det A$.

[D6] Označimo sa $M_{i,j}$ matricu koja se od matrice $A=\left[a_{i,j}\right]_{n\times n}$ dobija tako što se iz matrice A izbace i-ta vrsta i j-ta kolona. Determinantu A razvijamo po k-toj vrsti, odnosno po k-toj koloni na sledeći način:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}M_{k,j},\qquad \det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}M_{i,k}.$$

[D7] Ako su u nekoj k-toj vrsti (ili koloni) svi elementi matrice $A=\left[a_{i,j}\right]_{n\times n}$ oblika $a_{k,j}=b'_{k,j}+c'_{k,j}$, tada je $\det A=\det B+\det C$, gde su elementi matrica $B=\left[b_{i,j}\right]_{n\times n}$ i $C=\left[c_{i,j}\right]_{n\times n}$ dati sa

$$b_{i,j}=\begin{cases}a_{i,j} & , \quad i\neq k\\ b'_{i,j} & , \quad i=k\end{cases},\qquad c_{i,j}=\begin{cases}a_{i,j} & , \quad i\neq k\\ c'_{i,j} & , \quad i=k\end{cases}.$$

[D8] Za svaku kvadratnu matricu A formata n važi $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$.

[D9] Za svake dve kvadratne matrice A i B formata n važi $\det(AB)=\det A\cdot\det B$.

[D10] Za su svi elementi kvadratne matrice A ispod (iznad) *glavne* dijagonale jednaki nuli, tada je $\det A$ proizvod elemenata sa njene glavne dijagonale.

Osobina [D10] ne važi za matrice čiji su elementi iznad (ispod) *sporedne* dijagonale jednaki nuli. U ovom slučaju treba nekad, u zavisnosti od formata n matrice, uzeti predznak minus ispred proizvoda elemenata sa njene glavne dijagonale, ali pravilo za koje n treba uzeti predznak minus je složeno.

Izračunavanje determinante formata 3×3 po definiciji se svodi na tzv. ***Sarusovo pravilo*** (vidi zadatak **9.1** pod (2)).

Sarusovo pravilo se može koristiti *samo* u slučaju determinante formata 3×3. Primenom na determinantu nekog drugog formata se dobija pogrešan rezultat.

Postupak (primena osobina determinanti) izračunavanja determinanti je isti nad bilo kojim poljem.

Zadatak 9.1 *Izračunati determinante*

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$, (2) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}$,

(3) $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$, (4) $D_4 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

➥ ***Rešenje:***

(1) Po definiciji, determinantu formata 2×2 izračunavamo po formuli
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd$, tako da je $D_1 = 2\cdot(-4) - (-1)\cdot 5 = -3$.

(2) Izračunavajući determinantu po definiciji, što se, *samo* u slučaju determinante formata 3×3, svodi na poznato Sarusovo pravilo dobijamo

$$D_2 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right. =$$

$$= 1\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-4)\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot(-3) - (2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-4)\cdot(-3) + (-1)\cdot 5\cdot 3) = -22.$$

Sarusovo pravilo se *ne može* primenjivati na determinante koje nisu formata 3×3.

(3) Izračunavajući vrednost determinante po definiciji dobijamo

$$\begin{aligned} D_3 = {} & (-1)^0 1\cdot 3\cdot 2\cdot(-1) + (-1)^1 1\cdot 3\cdot 4\cdot 4 + (-1)^2 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + \\ & + (-1)^3 1\cdot(-1)\cdot 0\cdot 4 + (-1)^4 1\cdot 0\cdot(-1)\cdot 4 + (-1)^5 1\cdot 0\cdot 0\cdot 2 + \\ & + (-1)^6 2\cdot 2\cdot 2\cdot(-1) + (-1)^7 2\cdot 2\cdot 4\cdot 4 + (-1)^8 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + \\ & + (-1)^9 2\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 4 + (-1)^{10} 2\cdot 0\cdot 0\cdot 4 + (-1)^{11} 2\cdot 0\cdot(-1)\cdot 2 + \\ & + (-1)^{12} 0\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)^{13} 0\cdot 2\cdot 0\cdot 4 + (-1)^{14} 0\cdot 3\cdot 0\cdot(-1) + \\ & + (-1)^{15} 0\cdot 3\cdot(-1)\cdot 4 + (-1)^{16} 0\cdot 0\cdot 0\cdot 0 + (-1)^{17} 0\cdot 0\cdot(-1)\cdot(-1) + \\ & + (-1)^{18}(-1)\cdot 2\cdot(-1)\cdot 4 + (-1)^{19}(-1)\cdot 2\cdot 0\cdot 2 + (-1)^{20}(-1)\cdot 3\cdot 0\cdot 4 + \\ & + (-1)^{21}(-1)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 2 + (-1)^{22}(-1)\cdot(-1)\cdot 0\cdot 0 + \\ & + (-1)^{23}(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -2. \end{aligned}$$

Da bi smo izbegli ovakav golemi račun (kod determinante formata n moramo izvršiti u opštem slučaju $n!$ sabiranja i $n!(n-1)$ množenja), determinante formata većeg od 3 skoro uvek računamo koristeći osobine determinanti. Od ovog pravila odstupamo samo u retkim slučajevima kada je determinanta tako specifična da ju je lakše izračunati po definiciji.

$$D_3 \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{[3]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -2$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - prva vrsta pomnožena sa -2 se dodaje na drugu vrstu, i prva vrsta se dodaje na četvrtu;

[2] - druga vrsta se oduzima od treće, i druga vrsta pomnožena sa 2 se dodaje četvrtoj vrsti;

[3] - treća vrsta pomnožena sa $-\frac{2}{3}$ se dodaje četvrtoj vrsti;

[4] - determinanta koja ispod glavne dijagonale ima nule, jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.

(4) $$D_4 \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} (d-c)\cdot \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{[3]}{=} (d-c)\cdot(c-b)\cdot \begin{vmatrix} a & a \\ a & b \end{vmatrix} =$$
$$\overset{[4]}{=} (d-c)\cdot(c-b)\cdot(b-a)\cdot a$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - oduzimanje treće vrste od četvrte;

[2] - razvijanje determinante po četvrtoj vrsti;

[3] - oduzimanje druge vrste od treće, i nakon toga razvijanje determinante po trećoj vrsti;

[4] - ponovimo prethodni postupak ili determinantu izračunamo po definiciji. ☑

Zadatak 9.2 *Nad poljem kompleksnih brojeva izračunati sledeće determinante (D_n je formata $n \times n$):*

(a) $$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix},$$

(b) $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ a^n & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & a^n & 1 & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

➥ ***Rešenje:***

$$\text{(a)}\ D_n \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} na+b & na+b & na+b & \cdots & na+b \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} =$$

$$\overset{[2]}{=} (na+b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} =$$

$$\overset{[3]}{=} (na+b)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} \overset{[4]}{=} (na+b)b^{n-1}.$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - drugu, treću, četvrtu, ..., n-tu vrstu dodamo na prvu;

[2] - izvlačimo $na+b$ iz prve vrste;

[3] - prvu kolonu oduzimamo od druge, treće, četvrte, ..., n-te kolone;

[4] - ako su svi elementi iznad (ispod) *glavne* dijagonale jednaki nuli, tada je determinanta jednaka proizvodu elemenata sa glavne dijagonale.

$$\text{(b)}\ D_n \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a^n & 1-a^{n+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a^{n-1} & 0 & 1-a^{n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & 1-a^{n+1} \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} \left(1-a^{n+1}\right)^n$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - $(n-1)$-u kolonu pomnoženu sa $-a$ oduzmemo od n-te, $(n-2)$-u kolonu pomnoženu sa $-a$ oduzmemo od $(n-1)$-e, $(n-3)$-u kolonu pomnoženu sa $-a$ oduzmemo od $(n-2)$-e, ..., prvu kolonu pomnoženu sa $-a$ oduzmemo od druge (obratimo pažnju na redosled);

[2] - ako su svi elementi iznad (ispod) glavne (sporedne) dijagonale jednaki nuli, tada je determinanta jednaka proizvodu elemenata sa glavne (sporedne) dijagonale. ☑

Zadatak 9.3 *Za $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, nad poljem kompleksnih brojeva izračunati determinantu*

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & \mathrm{i}+1 & d \\ c & d & d \end{vmatrix},$$

➥ ***Rešenje:*** Za $d=0$ je očigledno $D=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & \mathbb{i}+1 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}=-c^2(\mathbb{i}+1)$, a za $d\neq 0$ oduzimanjem treće kolone od druge, i dodavanjem treće kolone pomnožene sa $-\frac{c}{d}$ prvoj koloni dobijamo $D=\begin{vmatrix} a-\frac{c^2}{d} & b-c & c \\ b-c & \mathbb{i}+1-d & d \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}$, i zatim razvijanjem po trećoj vrsti dobijamo $D=d\cdot\begin{vmatrix} a-\frac{c^2}{d} & b-c \\ b-c & \mathbb{i}+1-d \end{vmatrix}=d\left(\frac{ad-c^2}{d}(\mathbb{i}+1-d)-(b-c)^2\right)$. ☑

Zadatak 9.4 *Nad poljem $\mathbb{Z}_5$ izračunati determinantu* $D=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

➥ ***Rešenje:*** Za izračunavanje koristimo potpuno isti postupak kao i kod determinanti nad poljem $\mathbb{R}$, pri čemu računske operacije izvodimo u polju $\mathbb{Z}_5$.

$$D\overset{[1]}{=}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}\overset{[2]}{=}2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}\overset{[3]}{=}3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}\overset{[4]}{=}3\cdot 4\cdot(-1)3+3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}\overset{[5]}{=}$$

$$=2\cdot(3\cdot 4-1\cdot 4)=2\cdot(2-4)=2\cdot(-2)=2\cdot 3=1,$$

pri čemu smo primenjivali sledeće transformacije:

[1] - prvu kolonu pomnoženu sa $-2=3$ (inverzni element za 2 pri sabiranju) dodajemo drugoj koloni, i prvu kolonu pomnoženu sa $-\frac{3}{2}=-3\cdot 2^{-1}=-3\cdot 3=-4=1$ (2^{-1} je inverzni element za 2 pri množenju) dodajemo četvrtoj koloni.

[2] - razvijamo determinantu po prvoj koloni;

[3] - treću vrstu pomnoženu sa $-1=4$ dodajemo drugoj vrsti;

[4] - razvijamo determinantu po trećoj vrsti;

[5] - poslednju determinantu računamo po definiciji. ☑

9.3 Sistemi linearnih jednačina

Posmatrajmo sistem S linearnih jednačina

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

nad poljem $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$, gde su $a_{ij}, b_i \in R$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ koeficijenti, a $x_i \in R$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ promenljive sistema.

✎ Sa $\mathcal{R}_S$ ćemo označavati skup rešenja sistema S linearnih jednačina.

Transformacije ekvivalencije sistema, kojima se ne menja skup $\mathcal{R}_S$ rešenja sistema su sledeće transformacije:

[ES1] zamena mesta i-te i j-te kolone (tj. promenljive) u sistemu;

[ES2] zamena mesta i-te i j-te jednačine;

[ES3] množenje neke jednačine konstantom $k \neq 0$ (gde je 0 „nula", tj. neutralni element operacije + polja $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$);

[ES4] dodavanje neke i-te jednačine pomnožene sa $k \in R$ nekoj j-toj jednačini.

Primenom ovih transformacija, Gausovim postupkom eliminacije od polaznog sistema pravimo ekvivalentan sistem u „trougaonom obliku":

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + c_{1,3}x_3 + \ldots + c_{1,k}x_k + \ldots + c_{1,n}x_n &=& d_1 \\
c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + \ldots + c_{2,k}x_k + \ldots + c_{2,n}x_n &=& d_2 \\
c_{3,3}x_3 + \ldots + c_{3,k}x_k + \ldots + c_{3,n}x_n &=& d_3 \\
\ddots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots &=& \vdots \\
c_{k,k}x_k + \ldots + c_{k,n}x_n &=& d_k \\
0 &=& \lambda_{k+1} \\
&\vdots& \\
0 &=& \lambda_m
\end{array}$$

gde je $c_{i,j}, d_i, \lambda_l \in R$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$, i gde je $c_{i,i} \neq 0$ za sve $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ (gde je 0 „nula", tj. neutralni element operacije + polja $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$).

Na osnovu trougaonog oblika donosimo zaključke o prirodi sistema i izračunavamo rešenja „zamenom unatrag" na sledeći način:

(1) ako je $\lambda_l \neq 0$ za neko $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$, tada je sistem ***kontradiktoran*** (protivrečan), odnosno nema rešenja, tj. $\mathcal{R}_S = \emptyset$;

(2) ako je $\lambda_l = 0$ za sve $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$ i $k = n$ (sve promenljive od x_1 do x_n se pojavljuju na glavnoj dijagonali), tada je sistem ***određen***, odnosno ima tačno jedno rešenje, tj. $\mathcal{R}_S = \left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$;

(3) ako je $\lambda_l = 0$ za sve $l \in \{k+1,k+2,\ldots,m\}$ i $k < n$, tj. osim promenljivih $x_1,\ldots,x_k$ koje se pojavljuju na glavnoj dijagonali, u sistemu figuriše još $n-k$ promenljivih, tada je sistem ***neodređen*** $n-k$ puta, odnosno pri izboru rešenja imamo $n-k$ stepeni slobode, tj. promenljive $x_{k+1},\ldots,x_n \in R$ mogu uzimati proizvoljne vrednosti, dok $x_1,\ldots,x_k$ izračunavamo (tj. izražavamo preko $x_{k+1},\ldots,x_n \in R$) metodom „zamene unatrag"); geometrijski, skup rešenja $n-k$ puta neodređenog sistema je $(n-k)$-dimenzionalni linearni objekat (prava, ravan, hiperravan,...), tj. lineal mnogostrukosti $n-k$ (vidi poglavlje o vektorskim prostorima).

☞ Gausov algoritam eliminacije i metod rešavanja sistema linearnih jednačina „zamenom unatrag" primenjujemo na isti način na sisteme linearnih jednačina nad bilo kojim poljem. Razlika je samo u računu sa koeficijentima odnosno elementima posmatranog polja.

☞ Zaključke o prirodi sistema, kao i izračunavanje rešenja „zamenom unatrag”, možemo doneti *samo* na osnovu trougaonog oblika sistema, kod kojeg je, obratimo pažnju, $c_{i,i} \neq 0$ za sve $i \in \{1,2,\dots,k\}$.

☞ Ako u nekom zadatku nije drugačije naglašeno, podrazumeva se da dati sistem posmatramo nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Ako je $b_i = 0$ za sve $i \in \{1,2,\dots,m\}$, kažemo da je sistem ***homogen***. Homogen sistem ne može biti kontradiktoran, jer ima bar jedno rešenje $(0,0,\dots,0)$. Ako je homogen sistem S linearnih jednačina

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + a_{m,2}x_2 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}$$

nad poljem $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$ određen, njegov skup rešenja $\mathcal{R}_S$ je trivijalan nula-potprostor vektorskog prostora $(\mathbf{R}^n,\mathbf{R},+,\cdot)$, a ako je k puta neodređen, njegov skup rešenja $\mathcal{R}_S$ je k-dimenzionalan potprostor vektorskog prostora $(\mathbf{R}^n,\mathbf{R},+,\cdot)$ (vidi poglavlje o vektorskim prostorima).

Kramerove formule

Posmatrajmo tzv. „kvadratni sistem” S linearnih jednačina (sa jednakim brojem jednačina i promenljivih)

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + a_{1,2}x_2 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + a_{2,2}x_2 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + a_{n,2}x_2 & + \dots & + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

nad poljem $\mathbf{R} = (R,+,\cdot)$. Označimo sa D_S „determinantu sistema”

$$D_S = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

i označimo sa

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{1,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{1,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinante koja se dobija od determinante sistema D_S zamenom i-te kolone koeficijentima $b_1, b_2 \dots, b_n$.

Teorema 9.4 *Kvadratni sistem S linearnih jednačina ima jedistveno rešenje (određen je) ako i samo ako je $D_S \neq 0$, i tada se to rešenje može dobiti primenom Kramerovih formula*

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D_S}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D_S}, \quad x_3 = \frac{D_{x_3}}{D_S}, \quad \dots \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D_S}.$$

Kramerovim formulama možemo izračunavati rešenja sistema samo u slučaju kada on ima jedinstveno rešenje, tj. kada je $D_S \neq 0$. Ako je $D_S = 0$, tada o prirodi sistema možemo zaključiti samo da on nije određen, a ostale opcije moramo ispitivati Gausovim postupkom svođenja na trougaoni oblik, tj. tada *samo* iz trougaonog oblika možemo saznati da li je kontradiktoran ili k-puta neodređen.

Gausov postupak eliminacije i metod izračunavanja rešenja sistema „zamenom unatrag" je u opštem slučaju bolji metod iz sledećih razloga:

* univerzalan je, tj. možemo ga primenjivati na bilo koji sistem linearnih jednačina, dok Kramerovim formulama dobijamo rešenja sistema samo kada je on kvadratni (ima isti broj jednačina i promenljivih), i determinanta mu je različita od nule,
* efikasniji je u opštem slučaju, jer se njegovom primenom dobijaju rešenja sa manje računskih operacija nego primenom Kramerovih formula.

Zadatak 9.5 *Sledeće sisteme linearnih jednačina rešiti nad poljem realnih brojeva* $\mathbb{R}$.

$$S_1: \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 5x & - & 3y & - & 5z & = & 1 \end{array} \qquad S_2: \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 5x & - & 3y & + & 4z & = & 1 \end{array}$$

$$S_3: \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & z & = & -3 \\ 5x & - & 3y & + & 4z & = & -4 \end{array} \qquad S_4: \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & 4z & = & 4 \\ 3x & - & 3y & + & 6z & = & 6 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

(S_1) Sistem ćemo Gausovim postupkom eliminacije svesti na trougaoni oblik transformacijama ekvivalencije, a zatim ćemo izračunati rešenja zamenom unatrag.

$$S_1 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \\ & & 2y & - & 15z & = & -9 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \\ & & & - & 9z & = & 5 \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l} z = -\frac{5}{9}, \\ y = -7 + 3z = -7 - \frac{15}{9} = -\frac{78}{9}, \\ x = 2 + y - 2z = 2 - \frac{78}{9} + \frac{10}{9} = -\frac{50}{9}. \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj, a zatim prvu jednačinu pomnoženu sa -5 dodajemo trećoj;

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo trećoj;

[3] - metodom zamene unatrag, iz treće jednačine izračunamo z, zatim koristeći izračunato z iz druge jednačine izračunavamo y, i na kraju koristeći izračunate z i y iz prve jednačine izračunavamo x.

Prema tome, sistem S_1 je jednoznačno rešiv (određen), i skup rešenja mu je $\mathcal{R}_{S_1} = \left\{\left(-\frac{50}{9}, -\frac{78}{9}, -\frac{5}{9}\right)\right\}$ (skup rešenja je skup uređenih trojki kod kojih redosled komponenti odgovara redosledu promenljivih u zadanom sistemu).

Drugi način - primenom Kramerovih formula

Kako je $D_S = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, sistem je određen. Primenom Kramerovih formula dobijamo

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 50 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{D_x}{D_S} = -\frac{50}{9},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 78 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{D_y}{D_S} = -\frac{78}{9},$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{D_z}{D_S} = -\frac{5}{9},$$

odnosno $\mathcal{R}_{S_1} = \left\{\left(-\frac{50}{9}, -\frac{78}{9}, -\frac{5}{9}\right)\right\}$.

☞ Geometrijski gledano, skup rešenja ovog sistema je tačka u prostoru $\mathbb{R}^3$.

(S_2) Gausovim postupkom eliminacije i zamenom unatrag dobijamo

$$S_2 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \\ & & 2y & - & 6z & = & -9 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \\ & & & & 0 & = & 5 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj, a zatim prvu jednačinu pomnoženu sa -5 dodajemo trećoj;

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo trećoj.

Prema tome, sistem S_2 je kontradiktoran, tj. skup rešenja mu je $\mathcal{R}_{S_2} = \emptyset$.

☞ Kako je $D_{S_2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, sistem nismo mogli rešavati primenom Kramerovih formula. Iz $D_{S_2} = 0$ sledi jedino da sistem nije određen.

(S_3) Gausovim postupkom eliminacije i zamenom unatrag dobijamo

$$S_3 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \\ & & 2y & - & 6z & = & -4 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & -7 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj, a zatim prvu jednačinu pomnoženu sa -5 dodajemo trećoj;

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo trećoj.

Prema tome, sistem S_3 je 1-struko neodređen (jer jednu promenljivu, tj. promenljivu z koja ne figuriše na glavnoj dijagonali možemo proizvoljno birati), te zamenom unatrag, redom iz druge i prve jednačine dobijamo

$\boxed{z = \alpha \in \mathbb{R}, \quad y = 3z - 7 = 3\alpha - 7, \quad x = y - 2z + 2 = (3\alpha - 7) - 2\alpha + 2 = \alpha - 5}$

tj. skup rešenja sistema je

$\mathcal{R}_{S_3} = \{(\alpha - 5, 3\alpha - 7, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-5,-7,0) + \alpha(1,3,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$

☞ Geometrijski gledano, skup rešenja ovog sistema je prava u prostoru $\mathbb{R}^3$, i to prava koja sadrži tačku $(-5,-7,0)$, a vektor pravca joj je $(1,3,1)$ (vidi poglavlje o analitičkoj geometriji). Prava je jednodimenzionalni linearni objekat, i skup rešenja ovog sistema je prava jer je u pitanju 1-puta neodređen sistem linearnih jednačina.

☞ Kako je $D_{S_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$, sistem nismo mogli rešavati primenom Kramerovih formula. Iz $D_{S_3} = 0$ sledi jedino da sistem nije određen.

(S_4) Gausovim postupkom eliminacije i zamenom unatrag dobijamo

$$S_4 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj, a zatim prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodajemo trećoj.

Prema tome, sistem S_4 je 2-struko neodređen (jer dve promenljive, tj. promenljive y i z koje ne figurišu na glavnoj dijagonali možemo proizvoljno birati), te tako iz prve jednačine dobijamo

$\boxed{y = \alpha \in \mathbb{R}, \quad z = \beta \in \mathbb{R}, \quad x = y - 2z + 2 = \alpha - 2\beta + 2}$

tj. skup rešenja sistema je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{S_4} &= \{(\alpha - 2\beta + 2, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2,0,0) + (\alpha,\alpha,0) + (-2\beta,0,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2,0,0) + \alpha(1,1,0) + \beta(-2,0,1) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

☞ Geometrijski gledano, skup rešenja ovog sistema je ravan u prostoru $\mathbb{R}^3$, i to ravan koja sadrži tačku $(2,0,0)$, i paralelna je sa vektorima $(1,1,0)$ i $(-2,0,1)$, tj. vektor normale joj je $(1,1,0) \times (-2,0,1) = (1,-1,2)$ (vidi poglavlje o analitičkoj geometriji). ravan je dvodimenzionalni linearni objekat, i skup rešenja ovog sistema je ravan jer je u pitanju 2-puta neodređen sistem linearnih jednačina.

☞ Kako je $D_{S_4} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, sistem nismo mogli rešavati primenom Kramerovih formula. Iz $D_{S_4} = 0$ sledi jedino da sistem nije određen. ☑

Zadatak 9.6 *Sledeće sisteme linearnih jednačina rešiti nad poljem realnih brojeva* $\mathbb{R}$.

$$S_1: \quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & = & 8 \end{array}$$

$$S_2: \quad \begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& z &=& -2 \\ 3x &+& y &+& 2z &=& 4 \end{array}$$

$$S_3: \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x &+& 2y &-& z &-& 3u &=& -2 \\ 3x &+& 6y &-& 3z &-& 9u &=& 4 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

(S_1) Sistem možemo svesti na trougaoni oblik npr. dole navedenim ekvivalentnim transformacijama, a zatim izračunavamo rešenja zamenom unatrag (iz treće jednačine izračunamo z, zatim koristeći izračunato z iz druge jednačine izračunavamo x, i na kraju koristeći izračunate z i x iz prve jednačine izračunavamo y):

$$S_1 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y &+& 3x &+& 2z &=& 6 \\ y &+& 2x &-& z &=& -1 \\ 2y &+& 4x &+& 3z &=& 8 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y &+& 3x &+& 2z &=& 6 \\ &-& x &-& 3z &=& -7 \\ &-& 2x &-& z &=& -4 \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y &+& 3x &+& 2z &=& 6 \\ &-& x &-& 3z &=& -7 \\ &&&& 5z &=& 10 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = \frac{10}{5} = 2 \\ x = 7 - 3z = 7 - 6 = 1 \\ y = 6 - 2z - 3x = 6 - 4 - 3 = -1 \end{array}}$$

[1] - promenljive x i y zamene mesta;

[2] - prvu jednačinu oduzmemo od druge, i prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na treću;

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo trećoj.

Prema tome, sistem S_1 je jednoznačno rešiv i skup rešenja glasi $\mathcal{R}_{S_1} = \{(1, -1, 2)\}$ (skup rešenja je skup uređenih trojki kod kojih redosled komponenti odgovara redosledu promenljivih u zadanom sistemu).

(S_2) Postupajući na isti način kao u prethodnom primeru dobijamo

$$S_2 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& z &=& -2 \\ &-& 5y &+& 5z &=& 10 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &=& -2 &+& z \\ && y &=& -2 &+& z \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = -2 + z \\ x = -2 + z - 2y = -2 + z - 2(-2 + z) = 2 - z \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo drugoj;

[2] - drugu jednačinu podelimo sa -5, i zatim prebacimo na desnu stranu sve promenljive koje se ne pojavljuju na glavnoj dijagonali.

Prema tome, sistem S_2 je jednostruko neodređen i njegov skup rešenja glasi

$$\mathcal{R}_{S_2} = \{(2 - \gamma, \gamma - 2, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} = \{(2, -2, 0) + \gamma(-1, 1, 1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$$

(skup rešenja je skup uređenih trojki oblika $(2-\gamma, \gamma-2, \gamma)$, gde je γ proizvoljan realan broj). Primetimo da je skup rešenja $\mathcal{R}_{S_2}$ lineal mnogostrukosti 1 (vidi poglavlje o vektorskim prostorima), tj. prava u $\mathbb{R}^3$ koja sadrži tačku $(2,-2,0)$ i paralelna je sa vektorom $(-1,1,1)$.

(S_3) Postupajući na isti način kao u prethodnom primeru dobijamo:

$$S_3 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & - & 3u & = & -2 \\ & & & & & & 0 & = & 10 \end{array}}$$

[1] - prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodamo drugoj.

te je sistem S_3 kontradiktoran, odnosno $\mathcal{R}_{S_3} = \emptyset$. ☑

Zadatak 9.7 *Sledeći sistem S linearnih jednačina diskutovati po parametru $a \in \mathbb{R}$ i rešiti nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & - & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & a \end{array}$$

➥ ***Rešenje:*** U ovom slučaju se u sistemu pojavljuje parametar $a \in \mathbb{R}$, što znači da će i rešenja (tj. skup rešenja) zavisiti od tog parametra. Gausovim postupkom eliminacije sistem svodimo na trougaoni oblik:

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \\ & - & 5y & + & 5z & = & a+4 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \\ & & & & 0 & = & a-6 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo drugoj, i prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodamo trećoj;

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa -1 dodamo na treću.

Sada vidimo da je u slučaju $a \neq 6$ sistem kontradiktoran ($\mathcal{R}_S = \emptyset$), a u slučaju $a = 6$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & - & 5y & + & 5z & = & 10 \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & -2 \\ & & y & - & z & = & -2 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = -2+z \\ x = 2 \end{array}}$$

[3] - drugu jednačinu delimo sa -5.

Dakle, u slučaju $a = 6$ sistem S je jednostruko neodređen, i skup rešenja glasi mu je $\mathcal{R}_S = \{(2,-2+\gamma,\gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\} = \{(2,-2,0)+\gamma(0,1,1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$ (lineal jednostrukosti 1, odnosno prava koja sadrži tačku $(2,-2,0)$ i paralelna je sa vektorom $(0,1,1)$). ☑

Zadatak 9.8 *Po parametrima $a,b,c \in \mathbb{R}$ diskutovati sledeće sisteme linearnih jednačina:*

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_1: & x & - & 2y & = & 2 \\ & ax & + & 2y & = & a \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_2: & ax & + & ay & = & 0 \\ & & - & (a-1)y & = & a-1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_3: & ax & + & ay & = & a \\ & ax & - & ay & = & -a \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lrcrcr} S_4: & x & + & by & = & 1 \\ & ax & - & ay & = & b \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcrcl} S_5: & ax & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & y & + & z & = & b \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lrcrcl} S_6: & ax & + & y & = & b \\ & ax & - & by & = & b \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcrcl} S_7: & x & + & y & + & z & = & a \\ & ax & + & ay & + & az & = & a \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lrcrcl} S_8: & x & + & y & = & a \\ & x & + & ay & = & 1 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcl} S_9: & x & + & ay & = & 2 \\ & ax & + & ay & = & b \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{lrcrcl} S_{10}: & ax & + & by & = & c \\ & bx & + & ay & = & c \end{array}}$$

➥ ***Rešenje:***

(S_1) Dodavanjem druge jednačine na prvu dobijamo

$$S_1 \iff \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 2 \\ (a+1)x & & & = & a+2 \end{array}}$$

odakle vidimo da je sistem određen za $a \neq -1$, a za $a = -1$ je

$$S_1 \iff \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 2 \\ & & 0 & = & 1 \end{array}}$$

te je u ovom slučaju sistem kontradiktoran.

(S_2) Sistem S_2 je već zadan u trougaonom obliku, te vidimo da je određen za $a \notin \{0,1\}$. Za $a = 0$ je

$$S_2 \iff \boxed{\begin{array}{rcr} y & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array}}$$

te je u ovom slučaju sistem 1-puta neodređen (promenljiva x se može birati na proizvoljan način). Za $a = 1$ je

$$S_2 \iff \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}}$$

te je u ovom slučaju sistem takođe 1-puta neodređen.

(S_3) Dodavanjem druge jednačine na prvu dobijamo

$$S_3 \iff \boxed{\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & a \\ 2ax & & & = & 0 \end{array}}$$

odakle vidimo da je sistem određen za $a \neq 0$, a za $a = 0$ je

$$S_3 \iff \boxed{0 = 0}$$

te je u ovom slučaju sistem 2-puta neodređen (i x i y se mogu birati na proizvoljan način).

(S_4) Kako je determinanta sistema $D_{S_4} = \begin{vmatrix} 1 & b \\ a & -a \end{vmatrix} = -a - ab = -a(1+b) \neq 0$ za $a \neq 0$ i $b \neq -1$, sistem je određen za $a \neq 0$ i $b \neq -1$.

Za $a = 0$ je

$$S_4 \iff \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & by & = & 1 \\ & & 0 & = & b \end{array}}$$

te u ovom slučaju imamo da je za $b \neq 0$ kontradiktoran, a za $b = 0$ je 1-puta neodređen (y se može birati na proizvoljan način).

Za $b = -1$ je

$$S_4 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ ax & - & ay & = & -1 \end{array}} \overset{[1]}{=} \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ & & 0 & = & -1 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa $-a$ dodajemo drugoj.

te je u ovom slučaju kontradiktoran.

Dakle:

- $*$ sistem je određen za $(a \neq 0 \wedge b \neq -1)$,
- $*$ sistem je kontradiktoran za $(b = -1 \vee (a = 0 \wedge b \neq 0))$,
- $*$ sistem je 1-puta neodređen za $(a = 0 \wedge b = 0)$.

(S_5) Sistem S_5 je već zadan u trougaonom obliku, te vidimo da je 1-puta neodređen za $a \neq 0$, a za $a = 0$ je

$$S_5 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} y & + & z & = & 1 \\ y & + & z & = & b \end{array}} \overset{[1]}{=} \boxed{\begin{array}{rcrcr} y & + & z & = & 1 \\ & & 0 & = & b \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu oduzimamo od druge.

te je u ovom slučaju kontradiktoran za $b \neq 0$, a 2-puta neodređen za $b = 0$ (promenljive x i z se u ovom slučaju mogu birati na proizvoljan način). Dakle:

- $*$ sistem je kontradiktoran za $(a = 0 \wedge b \neq 0)$,
- $*$ sistem je 1-puta neodređen za $a \neq 0$,
- $*$ sistem je 2-puta neodređen za $(a = 0 \wedge b = 0)$.

(S_6) Kako je determinanta sistema $D_{S_6} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & -b \end{vmatrix} = -ab - a = -a(b+1) \neq 0$ za $a \neq 0$ i $b \neq -1$, sistem je određen za $a \neq 0$ i $b \neq -1$.

Za $a = 0$ je

$$S_6 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcr} y & = & b \\ -by & = & b \end{array}} \overset{[1]}{=} \boxed{\begin{array}{lcl} y & = & b \\ 0 & = & b^2 + b = b(b+1) \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa b dodajemo drugoj.

te u ovom slučaju imamo da je za $b \notin \{-1, 0\}$ kontradiktoran, a za $b \in \{-1, 0\}$ je 1-puta neodređen (x se može birati na proizvoljan način).

Za $b = -1$ je

$$S_6 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & -1 \\ ax & + & y & = & -1 \end{array}} \overset{[2]}{=} \boxed{\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & -1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} y & + & ax & = & -1 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}}$$

[2] - prvu jednačinu oduzmemo od druge.

te je u ovom slučaju 1-puta neodređen.

Dakle:

- $*$ sistem je određen za $(a \neq 0 \wedge b \neq -1)$,
- $*$ sistem je kontradiktoran za $(a = 0 \wedge b \notin \{-1, 0\})$,
- $*$ sistem je 1-puta neodređen za $((a = 0 \wedge b \notin \{-1, 0\}) \vee b = -1)$.

(S_7) Dodavanjem prve jednačine pomnožene sa $-a$ drugoj dobijamo

$$S_7 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & & & & 0 & = & a-a^2 = a(1-a) \end{array}}$$

te je za $a \in \{0,1\}$ sistem 2-puta neodređen, a za $a \notin \{0,1\}$ je kontradiktoran.

(S_8) Oduzimanjem prve jednačine od druge dobijamo

$$S_8 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ & & (a-1)y & = & 1-a \end{array}}$$

te je za $a \neq 1$ sistem određen, a za $a = 1$ je 1-puta neodređen (tada druga jednačina glasi $0 = 0$).

(S_9) Oduzimanjem prve jednačine od druge dobijamo

$$S_9 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} x & + & ay & = & 2 \\ (a-1)x & & & = & b-2 \end{array}}$$

te je za $a \neq 1$ sistem određen. Za $a = 1$ je

$$S_9 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ & & 0 & = & b-2 \end{array}}$$

te je tada kontradiktoran za $b \neq 2$, a 1-puta neodređen za $b = 2$.

(S_{10}) Kako je determinanta sistema $D_{S_4} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \neq 0$ za $a \neq \pm b$, sistem je određen za $a \neq \pm b$.

(1) Za $a = b$ je

$$S_{10} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} ax & + & ay & = & c \\ ax & + & ay & = & c \end{array}} \overset{[1]}{=} \boxed{\begin{array}{ccccc} ax & + & ay & = & c \\ & & 0 & = & 0 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu oduzimamo od druge.

te u ovom slučaju imamo:

(1.1) za $a \neq 0$ (dakle $a = b \neq 0$) je sistem 1-puta neodređen,

(1.2) za $a = 0$ (dakle $a = b = 0$) je sistem ekvivalentan sa jednačinom $0 = c$, te je kontradiktoran za $c \neq 0$, a 2-puta neodređen za $c = 0$ (i x i y se mogu birati proizvoljno).

(2) Za $a = -b$ je

$$S_{10} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccc} ax & - & ay & = & c \\ -ax & + & ay & = & c \end{array}} \overset{[2]}{=} \boxed{\begin{array}{ccccc} ax & - & ay & = & c \\ & & 0 & = & 2c \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu dodajemo na drugu.

te u ovom slučaju imamo:

(2.1) za $c \neq 0$ je kontradiktoran,

(2.2) za $c = 0$ je sistem ekvivalentan sa jednačinom $ax - ay = 0$, te je 1-puta neodređen za $a \neq 0$ (ekvivalentan je sa jednačinom $x - y = 0$), a 2-puta neodređen za $a = 0$ (ekvivalentan je sa jednačinom $0 = 0$).

Dakle:

∗ sistem je određen za $a \neq \pm b$,

- $*$ sistem je kontradiktoran za $(a = \pm b \wedge c \neq 0)$,
- $*$ sistem je 1-puta neodređen za $(a = b \neq 0 \vee (a = -b \neq 0 \wedge c = 0))$.
- $*$ sistem je 2-puta neodređen za $a = b = c = 0$.

$\boxtimes$

Zadatak 9.9 *Diskutovati po a i rešiti sistem jednačina S:*
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & ay & = & 5 \\ x & + & y & = & 2 \\ ax & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:*** Koristeći transformacije

[1] - prve dve jednačine zamene mesta,

[2] - prvu jednačinu pomnoženu sa -3 dodamo na drugu, i prvu jednačinu pomnoženu sa $-a$ dodamo na treću,

dobijamo

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 3x & + & ay & = & 5 \\ ax & + & 2y & = & 4 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ & & (a-3)y & = & -1 \\ & & (2-a)y & = & 4-2a \end{array}}$$

(1) U slučaju $a = 3$ (pri čemu drugoj i trećoj jednačini yamenimo mesta) je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ & - & y & = & -2 \\ & & 0 & = & -1 \end{array}}$$

pa vidimo da je u ovom slučaju sistem kontradiktoran, tj. skup rešenja je $\mathcal{R}_S = \emptyset$.

(2) U slučaju $a \neq 3$ je

$$S \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2 \\ & & (a-3)y & = & -1 \\ & & 0 & = & 4-2a+\frac{2-a}{a-3} = \frac{(2-a)(2a-5)}{a-3} \end{array}}$$

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa $-\frac{2-a}{a-3}$ (gde je $a \neq 3$) dodamo na treću.

odakle dobijamo diskusiju:

(2.1) za $a \neq 2 \wedge a \neq \frac{5}{2}$ je sistem kontradiktoran;

(2.2) za $a = 2$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ & - & y & = & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2-y = 1 \end{array}}$$

pa vidimo da je u ovom slučaju sistem jednoznačno rešiv (određen), tj. skup rešenja sistema je $\mathcal{R}_S = \{(1,1)\}$;

(2.3) Za $a = \dfrac{5}{2}$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ & - & \frac{1}{2}y & = & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 2 \\ x = 2-y = 0 \end{array}}$$

pa vidimo da je u ovom slučaju sistem jednoznačno rešiv (određen), tj. skup rešenja sistema je $\mathcal{R}_S = \{(0,2)\}$.

☑

Zadatak 9.10 *Diskutovati i rešiti u zavisnosti od parametara $a, b \in \mathbb{R}$ sistem*

$$S: \begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & az & = & 0 \\ ax & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (1-a)y & & & = & 1 \\ & & (a-1)y & + & (a-1)z & = & 0 \\ & & & & (1-a)z & = & b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (1-a)y & & & = & 1 \\ & & & & (1-a)z & = & b \\ & & & & 0 & = & b+1 \end{array}}$$

[1] - četvrtu jednačinu premestimo na prvo mesto, a zatim, prvu jednačinu pomnoženu sa $-a$ dodamo drugoj, prvu jednačinu pomnoženu sa -1 dodamo trećoj, i prvu jednačinu pomnoženu sa $-a$ dodamo četvrtoj;

[2] - treća i četvrta jednačina zamene mesta, a zatim drugu i treću jednačinu dodamo na četvrtu.

(a) Za $b \neq -1$ sistem je kontradiktoran (zbog četvrte jednačine).

(b) Za $b = -1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (1-a)y & & & = & 1 \\ & & & & (1-a)z & = & -1 \end{array}}$$

te dobijamo sledeće podslučajeve:

(b.1) za $b = -1 \land a = 1$ je sistem kontradiktoran jer je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -1 \end{array}} \Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathcal{R}_S = \emptyset;$$

(b.2) za $b = -1 \land a \neq 1$ vidimo da je sistem jednostruko određen jer je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = \frac{1}{a-1} \\ y = \frac{1}{1-a} \\ x = 0 - y - z = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{a-1} = 0 \end{array}} \Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathcal{R}_S = \left\{\left(0, \tfrac{1}{1-a}, \tfrac{1}{a-1}\right)\right\}.$$

☑

Zadatak 9.11 *Diskutovati i rešiti sistem u zavisnosti od parametara $a, b \in \mathbb{R}$:*

$$S: \begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & ay & + & az & + & bt & = & 0 \\ ax & + & ay & + & bz & + & at & = & 0 \\ ax & + & by & + & az & + & at & = & 0 \\ bx & + & ay & + & az & + & at & = & 0 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:*** Kvadratni homogen sistem (homogen sistem je onaj čiji su slobodni članovi tj. brojevi sa desne strane jednakosti svi jednaki nuli) je jedinstveno određen ako i samo ako mu je determinanta različita od nule. Koristeći osobine determinanti, izračunavamo determinantu sistema

$$D_S = \begin{vmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \overset{[2]}{=}$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \overset{[3]}{=} (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b & a-b \end{vmatrix} \overset{[4]}{=}$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 0 & b-a & 0 \\ b-a & 0 & 0 \\ a-b & a-b & a-b \end{vmatrix} \overset{[5]}{=} (3a+b)(b-a)^3,$$

[1] - drugu, treću i četvrtu vrstu dodamo na prvu (koristimo osobinu determinanti [D5]);

[2] - koristeći osobinu [D3] determinanti;

[3] - drugu kolonu oduzimamo od druge, treće i četvrte (osobina determinanti [D5]);

[4] - razvijamo determinantu po prvoj vrsti (koristimo osobinu determinanti [D6]);

[5] - računamo po definiciji, tj. Sarusovim pravilom.

te dobijamo sledeću diskusiju:

(1) za $a \neq b \wedge b \neq -3a$ iz $D_S \neq 0$ sledi da je sistem jednoznačno rešiv, i u tom slučaju je $R_S = \{0,0,0,0\}$ (jer svaki homogen sistem ima bar jedno rešenje, a to je $\{0,0,\dots,0\}$);

(2) za $a = b \vee b = -3a$ će sistem biti neodređen tj. imaće beskonačno mnogo rešenja (homogen sistem ne može biti kontradiktoran), ali treba da vidimo koliko puta neodređen:

(2.1) za $a = b$ je

$\boxed{S \;\Leftrightarrow\; ax+ay+az+at=0}$

(npr. prvu jednačinu oduzmemo od ostalih), te dobijamo sledeće podslučajeve:

(2.1.1) za $a = b = 0$ je

$\boxed{S \;\Leftrightarrow\; 0=0}$

što znači da je on 4-puta neodređen, i tada dobijamo da je njegov skup rešenja $\mathcal{R}_S = \{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^4$;

(2.1.2) za $a = b \neq 0$ delenjem sa $a \neq 0$ dobijamo da je

$\boxed{S \;\Leftrightarrow\; ax+ay+az+at=0 \;\Leftrightarrow\; x+y+z+t=0}$

što znači da je on u ovom slučaju 3-puta neodređen, i skup rešenja mu je

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_S &= \{(-\beta-\gamma-\delta,\beta,\gamma,\delta) \mid \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\beta\cdot(-1,1,0,0)+\gamma\cdot(-1,0,1,0)+\delta\cdot(-1,0,0,1) \mid \beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

gde vidimo (pogledati poglavlje o vektorskim prostorima) da je $\mathcal{R}_s$ podprostor dimenzije 3 vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, i vidimo da je jedna baza tog podprostora skup $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ (može se pokazati teorema da skup rešenja *homogenog* sistema sa n promenljivih uvek čini podprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, i da je dimenzija tog podprostora jednaka stepenu neodređenosti sistema - vidi zadatak **??**);

(2.2) za $b=-3a$ uvrštavanjem dobijamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & ay & + & az & - & 3at & = & 0\\ ax & + & ay & - & 3az & + & at & = & 0\\ ax & - & 3ay & + & az & + & at & = & 0\\ -3ax & + & ay & + & az & + & at & = & 0 \end{array}} \overset{[6]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & ay & + & az & - & 3at & = & 0\\ & & & - & 4az & + & 4at & = & 0\\ & - & 4ay & & & + & 4at & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}} \overset{[7]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & + & az & = & 3at\\ & & ay & & & = & at\\ & & & & az & = & at \end{array}}$$

[6] - prve tri jednačine dodamo na četvrtu, a zatim prvu jednačinu oduzmemo od druge i treće;

[7] - drugu i treću jednačinu podelimo sa -4, zatim im zamenimo mesta, i na kraju promenljive koje se ne pojavljuju na glavnoj dijagonali prebacimo na desnu stranu;

(2.2.1) slučaj $a=0$ (i $b=-3a=0$) se poklapa sa slučajem (2.1.1);

(2.2.2) za slučaj $a\neq 0$ deljenjem sve tri jednačine sa $a\neq 0$ dobijamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3t\\ & & y & & & = & t\\ & & & & z & = & t \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z=t\\ y=t\\ x=3t-y-z=t \end{array}}$$

te je u ovom slučaju sistem 1 puta neodređen i skup rešenja mu je jednodimenzionalni vektorski prostor nad poljem realnih brojeva

$\mathcal{R}_S=\{(\delta,\delta,\delta,\delta)\mid \delta\in\mathbb{R}\}=\{\delta\cdot(1,1,1,1)\mid \delta\in\mathbb{R}\}$

tj. jednodimenzionalni potprostor prostora $\mathbb{R}^4$. ☑

Zadatak 9.12 *Nad poljem kompleksnih brojeva diskutovati sistem S po parametrima $a,b,c\in\mathbb{C}$:*

$$S: \quad \begin{array}{rcrcrcl} (a+b)x & + & by & & & = & a+b\\ ax & + & (a+b)y & + & bz & = & b\\ & & ay & + & (a+b)z & = & c \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

(1) Za $a=0$, u zavisnosti od b imamo sledeće slučajeve.

(1.1) Za $b\neq 0$ imamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccccc} bx & + & by & & & = & b \\ & & by & + & bz & = & b \\ & & & & bz & = & c \end{array}} \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ & & & & z & = & \frac{c}{b} \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = \frac{c}{b} \\ y = 1 - z = 1 - \frac{c}{b} = \frac{b-c}{b} \\ x = 1 - y = 1 - \frac{b-c}{b} = \frac{c}{b} \end{array}}$$

[1] - svaku jednačinu podelimo sa $b \neq 0$;

pa u ovom slučaju sistem ima jedinstveno rešenje.

(1.2) Za $b = 0$ sistem je ekvivalentan sa jednačinom $0 = c$ koja ima sledeće podslučajeve:

(1.2.1) za $c = 0$ sistem je ekvivalentan sa jednačinom $0 = 0$ čija su rešenja sve uređene trojke (x, y, z) kompleksnih brojeva (sistem je tri puta neodređen);

(1.2.2) za $c \neq 0$ sistem nema rešenja (kontradiktoran je).

(2) Za $a \neq 0$ dobijamo

$$S \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{ccccccc} ax & + & (a+b)y & + & bz & = & b \\ & & -\frac{a^2+ab+b^2}{a}y & - & \frac{b(a+b)}{a}z & = & \frac{a^2-b^2}{a} \\ & & ay & + & (a+b)z & = & c \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ccccccc} ax & + & (a+b)y & + & bz & = & b \\ & & ay & + & (a+b)z & = & c \\ & & & & \frac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2}z & = & \frac{a^3+\left(a^2+b^2\right)c+ab(c-b)}{a^2} \end{array}}$$

[2] - prva i druga jednačina zamene mesta, a zatim (novu) prvu jednačinu pomnoženu sa $-\dfrac{a+b}{a}$ (gde je $a \neq 0$) dodamo na drugu;

[3] - druga i treća jednačina zamene mesta, a zatim (novu) drugu jednačinu pomnoženu sa $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a}$ (gde je $a \neq 0$) dodamo na treću.

Vidimo da u ovom slučaju ($a \neq 0$) broj rešenja sistema još zavisi od koeficijenta $\dfrac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2}$, odnosno imamo sledeće podslučajeve:

(2.1) u slučaju

$$\frac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2}=0 \Leftrightarrow \left(a=-b \lor a^2=-b^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(a=-b \lor a=\sqrt{-b^2}\right) \Leftrightarrow (a=-b \lor a=\mathbb{i}b \lor a=-\mathbb{i}b)$$

broj rešenja sistema zavisi od broja $\dfrac{a^3+\left(a^2+b^2\right)c+ab(c-b)}{a^2}$, tako da:

(2.1.1) za $a=-b$ ($b=-a$) je sistem ekvivalentan sa

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} ax & & & - & az & = & -a \\ & & ay & & & = & c \\ & & & & 0 & = & c \end{array}}$$

te je sistem kontradiktoran za $c \neq 0$, a za $c=0$ je jedan puta neodređen;

(2.1.2) za $a=\mathbb{i}b$ odnosno $b=-\mathbb{i}a$ je sistem ekvivalentan sa

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & a(1-\mathbb{i})y & - & & & \mathbb{i}az & = & -ia \\ & & & & ay & + & a(1-\mathbb{i})z & = & c \\ & & & & & & 0 & = & \frac{2a^3-\mathbb{i}a^2c}{a^2} \end{array}}$$

te je sistem kontradiktoran za $2a^3-\mathbb{i}a^2c \neq 0$ (odnosno $c \neq -2a\mathbb{i}$), a za $c=-2a\mathbb{i}$ je jedan puta neodređen;

(2.1.3) za $a=-\mathbb{i}b$, odnosno $b=\mathbb{i}a$, sistem je ekvivalentan sa

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & a(1+\mathbb{i})y & + & & & \mathbb{i}az & = & ia \\ & & & & ay & + & a(1+\mathbb{i})z & = & c \\ & & & & & & 0 & = & \frac{2a^3+\mathbb{i}a^2c}{a^2} \end{array}}$$

te je sistem kontradiktoran za $c \neq 2a\mathbb{i}$), a za $c=2a\mathbb{i}$ je jedan puta neodređen;

(2.2) u slučaju $\dfrac{(a+b)\left(a^2+b^2\right)}{a^2} \neq 0 \Leftrightarrow b \notin \{-a, \mathbb{i}a, -\mathbb{i}a\}$ imamo da su svi elementi na glavnoj dijagonali različiti od 0, pa je sistem tada jednoznačno određen (ima tačno jedno rešenje). ☑

Zadatak 9.13 *Nad poljem $\mathbb{R}$ diskutovati sistem S po parametrima $a, b \in \mathbb{R}$.*

$$S: \begin{array}{rcrcl} \left(a^2-2a\right)x & + & y & = & 2 \\ \left(a^2-2a\right)x & - & (2a+3)y & = & -2b+2 \\ \left(a^3+2a^2-8a\right)x & - & (6a+5)y & = & 2a-6b+10 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:*** Gausovim postupkom svodimo sistem na trougaoni oblik.

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} \left(a^2-2a\right)x & + & y & = & 2 \\ \left(a^2-2a\right)x & - & (2a+3)y & = & -2b+2 \\ (a+4)\left(a^2-2a\right)x & - & (6a+5)y & = & 2a-6b+10 \end{array}} \overset{[1]}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} \left(a^2-2a\right)x & + & y & = & 2 \\ & & -(2a+4)y & = & -2b \\ & & -(7a+9)y & = & -6b+2 \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu oduzmemo od druge, i prvu jednačinu pomnoženu sa $-(a+4)$ dodamo na treću.

(1) U slučaju $a=-2$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} 8x & + & y & = & 2 \\ & & 0 & = & -2b \\ & & 5y & = & -6b+2 \end{array}}$$

Vidimo da je kontradiktoran za $b \neq 0$, a za $b=0$ je jedinstveno određen i njegovo rešenje je tada $(x,y)=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$.

(2) U slučaju $a \neq -2$ je

$$S \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcl} a(a-2)x & + & y & = & 2 \\ & & (a+2)y & = & b \\ & & 0 & = & \frac{ab-3b+2a+4}{a+2} \end{array}}$$

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa $\dfrac{7a+9}{a+2}$ (gde je $a \neq -2$) dodamo na treću, a zatim drugu jednačinu podelimo sa -2.

te sada dobijamo podslučajeve:

(2.1) za

$$\frac{ab-3b+2a+4}{a+2} \neq 0 \Leftrightarrow ab-3b+2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(a \neq 3 \wedge b \neq \frac{2a+4}{3-a}\right) \vee (a=3 \wedge 10 \neq 0)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\left(a \neq 3 \wedge b \neq \frac{2a+4}{3-a}\right) \vee a=3\right)$$

je sistem kontradiktoran;

(2.2) za $a \neq 3 \wedge b = \dfrac{2a+4}{3-a}$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} a(a-2)x & + & y & = & 2 \\ & & (a+2)y & = & \frac{2a+4}{3-a} \end{array}}$$

odakle vidimo da broj rešenja još zavisi od koeficijenta $a(a-2)$:

(2.2.1) za $a \notin \{0,2\}$ (dakle za $a \notin \{-2,0,2,3\} \wedge b = \dfrac{2a+4}{3-a}$) je sistem jednoznačno rešiv (deleći drugu jednačinu sa $a+2 \neq 0$ izračunavamo y, a zatim uvrštavajući tako dobijeno y u prvu jednačinu i deleći prvu jednačinu sa $a(a-2) \neq 0$ dobijamo x);

(2.2.2) za $a=0$ sistem je ekvivalentan sa $\left(y=2 \wedge 2y=\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \left(y=2 \wedge y=\frac{2}{3}\right)$, te je u ovom slučaju očigledno kontradiktoran;

(2.2.3) za $a=2$ sistem je ekvivalentan sa $(y=2 \wedge 4y=8)$ odnosno $(y=2)$ te je u ovom slučaju sistem jedan puta neodređen (skup rešenja mu je $\mathcal{R}_S = \{(\alpha,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$).

☑

Zadatak 9.14 *Nad poljem $\mathbb{Z}_5$ diskutovati po parametrima $a,b \in \mathbb{Z}_5$ i rešiti sledeće sisteme jednačina:*

$$S_1: \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 3 \end{array} \qquad S_2: \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ 3x & + & 3y & = & 3 \end{array}$$

$$S_3: \begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ 3x & + & 4y & = & 1 \end{array} \qquad S_4: \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & (a+2)z & = & 4 \\ ax & + & ay & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$S_5: \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 4y & + & \left(a^2+1\right)z & = & 3 \\ 3x & + & ay & + & \left(a^2+2\right)z & = & b \end{array}$$

➥ ***Rešenje:*** Algoritam za rešavanje i diskusiju sistema (svođenje na trougaoni oblik i izračunavanje rešenja metodom zamene unatrag) je isti kao i nad poljima realnih, kompleknih, racionalnih brojeva. Razlika je samo u računu sa koeficijentima, jer sada su oni elementi polja $\mathbb{Z}_5$, pa na njih primenjujemo operacije $+_5$ i $\cdot_5$ polja $\mathbb{Z}_5$.

(S_1) Ako prvu jednačinu pomnoženu sa $-\left(3 \cdot_5 2^{-1}\right) = -(3 \cdot_5 3) = -4 = 1$ dodamo drugoj jednačini, dobijamo ekvivalentni trougaoni oblik sitema (sa t^{-1} obeležavamo inverzni element elementa t u odnosu na operaciju $\cdot_5$, tj. t^{-1} je onaj element polja $\mathbb{Z}_5$ za koji važi $t \cdot_5 t^{-1} = 1$; sa $-t$ obeležavamo inverzni element elementa t u odnosu na operaciju $+_5$, tj. $-t$ je onaj element polja $\mathbb{Z}_5$ za koji važi $t +_5 (-t) = 0$; nadalje ćemo operacije $+_5$ i $\cdot_5$ svuda skraćeno obeležavati sa $+$ i $\cdot$ kao što je u formulaciji zadatka već i učinjeno):

$$S_1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ & & 0 & = & 2 \end{array}}$$

Vidimo da je sistem kontradiktoran, tj. skup rešenja mu je $\mathcal{R}_{S_1} = \emptyset$.

(S_2) Ako prvu jednačinu pomnoženu sa 1 dodamo drugoj jednačini, dobijamo ekvivalentni trougaoni oblik sitema:

$$S_2 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 4 \\ & & 4y & = & 2 \end{array}}$$

Vidimo da je sistem jednoznačno određen (ima jedinstveno rešenje), i rešenje dobijamo metodom zamene unatrag: ako drugu jednačinu pomnožimo sa $4^{-1} = 4$ dobijamo ekvivalentu jednačinu $4 \cdot 4 \cdot y = 4 \cdot 2$, odnosno za y dobijamo rešenje $y = 3$; uvrštavanjem ovog rešenja za promenljivu y u prvu jednačinu dobijamo

$$2x+3=4 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} 2x+3+2=4+2 \Leftrightarrow 2x=1 \overset{[2]}{\Leftrightarrow} x=3.$$

[1] - na levu i desnu stranu jednačine dodamo 2 (tj. prebacujemo 3 na desnu stranu jednakosti, odnosno „oduzimamo” sa obe strane 3);

[2] - množimo levu i desnu stranu jednačine sa $2^{-1} = 3$ (tj. „delimo” jednačinu sa 2).

Dakle, skup rešenja sistema je $\mathcal{R}_{S_2} = \{(3,3)\}$.

(S_3) Ponovo dodavanjem prve jednačine na drugu dobijamo:

$$S_3 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 4 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}} \;\Leftrightarrow\; 2x+y=4 \;\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\; 2x=4+4y \;\overset{[2]}{\Leftrightarrow}\; x=2+2y.$$

[1] - „prebacujemo” y na desnu stranu, tj. „oduzmemo” s obe strane y, tj. na obe strane „dodamo” $4y$;

[2] - množimo jednakost sa $2^{-1}=3$.

Vidimo da je sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{S_3} &= \{\,(2+2\alpha,\alpha) \mid \alpha\in\mathbb{Z}_5\} = \{\,\alpha\cdot(2,1)+(2,0) \mid \alpha\in\mathbb{Z}_5\} = \\ &= \{\,\alpha\cdot(2,1)+(2,0) \mid \alpha\in\{0,1,2,3,4\}\} = \{(2,0),(4,1),(1,2),(3,3),(0,4)\}. \end{aligned}$$

☞ Kako je $\mathbb{Z}_5$ konačan skup od 5 elemenata, svaki sistem nad $\mathbb{Z}_5$ ima konačan broj rešenja. Ako imamo $n\in\mathbb{N}$ „slobodnih” promenljivih (tj. n puta neodređen sistem), sistem će imati 5^n rešenja jer vrednosti n promenljivih biramo na proizvoljan način iz skupa koji ima n elemenata.

(S_4) Ako drugoj jednačini dodamo prvu jednačinu pomnoženu sa $-2^{-1}a=-3a=2a$, dobijamo ekvivalentni „trougaoni” oblik sistema:

$$S_4 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & (a+2)z & = & 4 \\ & & 3ay & + & \big(2a^2+4a+2\big)z & = & 2+3a \end{array}}$$

(1) Za $a\neq 0$ je sistem u trougaonom obliku u strogom smislu (svi koeficijenti na glavnoj dijagonali su različiti od nule), i vidimo da je 1 puta neodređen, odnosno:

$$\begin{aligned} S_4 \;\Leftrightarrow\;& \boxed{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 4-(a+2)z \\ & & 3ay & = & 2+3a-\big(2a^2+4a+2\big)z \end{array}} \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\;& \boxed{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 4+4(a+2)z \\ & & 3ay & = & 2+3a+4\big(2a^2+4a+2\big)z \end{array}} \;\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow\;& \boxed{\begin{array}{ccccc} x & + & 3y & = & 2+2(a+2)z \\ & & y & = & 4a^{-1}+1+\big(a+2+a^{-1}\big)z \end{array}} \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\;& \boxed{\begin{array}{ccl} y & = & 4a^{-1}+1+\big(a+2+a^{-1}\big)z \\ x & = & 2+2(a+2)z-3y = 2+2(a+2)z+2y = \\ & = & 2+2(a+2)z+2\Big(4a^{-1}+1+\big(a+2+a^{-1}\big)z\Big) \\ & = & 4+3a^{-1}+\big(3+4a+2a^{-1}\big)z \end{array}} \end{aligned}$$

[1] - drugu jednačinu „podelimo” sa $3a$ gde je $a\neq 0$, tj. pomnožimo sa $(3a)^{-1}=3^{-1}a^{-1}=2a^{-1}$, a prvu jednačinu „delimo” sa 2, tj. množimo sa $2^{-1}=3$.

Skup rešenja ovog sistema je tada

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S &= \Big\{\Big(4+3a^{-1}+\big(3+4a+2a^{-1}\big)\alpha,\, 4a^{-1}+1+\big(a+2+a^{-1}\big)\alpha,\, \alpha\Big) \;\Big|\; \alpha\in\mathbb{Z}_5\Big\} \\ &= \Big\{\big(4+3a^{-1},1+4a^{-1},0\big),\big(2+4a+a^{-1},3+a,1\big),\big(3a+2a^{-1},2a+a^{-1},2\big), \\ &\qquad \big(3+2a+4a^{-1},2+3a+2a^{-1},3\big),\big(1+a+a^{-1},4+4a+3a^{-1},4\big)\Big\}. \end{aligned}$$

(2) Za $a = 0$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcccccl} 2x &+& y &+& 2z &=& 4 \\ &&&& 2z &=& 2 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcccl} 2x &+& 2z &=& 4+4y \\ && 2z &=& 2 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcccl} x &+& z &=& 2+2y \\ && z &=& 1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} z = 1 \\ x = 2+2y-z = 2+2y+4z = 2+2y+4\cdot 1 = 1+2y \end{array}}$$

[2] - i prvu i drugu jednačinu pomnožimo sa 3.

Dakle, i u ovom slučaju je sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je $\mathcal{R}_S = \{(1+2\alpha, \alpha, 1) \mid \alpha \in \mathbb{Z}_5\} = \{(1,0,1),(3,1,1),(0,2,1),(2,3,1),(4,4,1)\}$.

(S_5) Svodimo sistem na trougaoni oblik:

$$S_5 \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcccccl} 2x &+& y &+& z &=& 4 \\ &&&& \left(a^2+2\right)z &=& 2 \\ && (a+1)y &+& \left(a^2+3\right)z &=& b+4 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcccccll} 2x &+& y &+& z &=& 4 & [J1] \\ && (a+1)y &+& \left(a^2+3\right)z &=& b+4 & [J2] \\ &&&& \left(a^2+2\right)z &=& 2 & [J3] \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu dodajemo na drugu i na treću;

[2] - druga i treća jednačina zamene mesta.

Nad poljem $\mathbb{Z}_5$ analiziramo za koje $a \in \mathbb{Z}_5$ su koeficijenti na dijagonali jednaki ili različiti od nule:

* $a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 = 4$;
* $a^2+2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = -2 = 3$ (gde je $a^2 = a\cdot a$), a kako je $0^2 = 0$, $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$ i $4^2 = 1$, sledi da jednačina $a^2 = 3$ nema rešenja u polju $\mathbb{Z}_5$, odnosno imamo da je $a^2+2 \neq 0$ za sve $a \in \mathbb{Z}_5$.

Tako dobijamo sledeću diskusiju.

(1) Za
$\left(a+1 \neq 0 \wedge a^2+2 \neq 0\right) \Leftrightarrow a \neq 4$
su svi koeficijenti na glavnoj dijagonali različiti od nule, pa je u tom slučaju sistem određen. Njegovo jedinstveno rešenje dobijamo zamenom unatrag:

$[J3] \Rightarrow z = 2\cdot\left(a^2+2\right)^{-1}$,

(pri čemu $\left(a^2+2\right)^{-1}$ postoji jer je $a^2+2 \neq 0$)

$$\begin{aligned} [J2] \;\Rightarrow\; & (a+1)y + 2\left(a^2+3\right)\left(a^2+2\right)^{-1} = b+4 \\ \Rightarrow\; & (a+1)y = b+4+3\left(a^2+3\right)\left(a^2+2\right)^{-1} \\ \Rightarrow\; & y = \left(b+4+3\left(a^2+3\right)\left(a^2+2\right)^{-1}\right)(a+1)^{-1}, \end{aligned}$$

(pri čemu $(a+1)^{-1}$ postoji jer je $a \neq 4$ tj. $a+1 \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
[J1] \;\Rightarrow\;& 2x+\left(b+4+3\left(a^2+3\right)\left(a^2+2\right)^{-1}\right)(a+1)^{-1}+2\left(a^2+2\right)^{-1}=4\\
\Rightarrow\;& 2x=4+4\left(b+4+3\left(a^2+3\right)\left(a^2+2\right)^{-1}\right)(a+1)^{-1}+3\left(a^2+2\right)^{-1}\\
\Rightarrow\;& x=2+2\left(b+4+3\left(a^2+3\right)\left(a^2+2\right)^{-1}\right)(a+1)^{-1}+4\left(a^2+2\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

(2) Za $a+1=0$ odnosno $a=4$ je

$$
S_5 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 4\\ & & & & 4z & = & b+4\\ & & & & 3z & = & 2 \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow}
$$

$$
\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 4\\ & & & & 4z & = & b+4\\ & & & & 0 & = & 3b+4 \end{array}}
$$

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na treću jednačinu.

(2.1) za $3b+4\neq 0 \;\Leftrightarrow\; 3b\neq 1 \;\Leftrightarrow\; b\neq 2$ je sistem kontradiktoran zbog treće jednačine;

(2.2) za $b=2$, množeći prvu jednačinu sa 3, množeći drugu jednačinu sa 4, i zamenom mesta promenljivih y i z dobijamo ekvivalentan sistem

$$
S_5 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{ccccccc} x & + & 3z & + & 3y & = & 2\\ & & z & & & = & 4b+1 \end{array}} \;\Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} z=4b+1\\ x=2+2z+2y=2+2(4b+1)+2y=4+3b+2y \end{array}}.
$$

Vidimo da je u ovom slučaju sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{S_5} &= \{\,(4+3b+2\alpha,\alpha,4b+1)\mid \alpha\in\mathbb{Z}_5\}\\
&= \{(4+3b,0,4b+1),(1+3b,1,4b+1),(3+3b,2,4b+1),\\
&\qquad (3b,3,4b+1),(2+3b,4,4b+1)\}.
\end{aligned}
$$

☑

Zadatak 9.15 *Diskutovati po a i b, i rešiti nad poljem $\mathbb{R}$:*

$$
S:\quad \begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & (a+1)y & - & (a+1)z & - & au & = & 1\\
ax & + & (a+1)y & + & az & - & 2u & = & 2\\
ax & + & (a+1)y & - & 2z & + & au & = & b\\
(a-1)x & & & + & 3(a+1)z & - & 4u & = & 3-b
\end{array}
$$

➥ ***Rešenje:***

$$
S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl}
x & + & (a+1)y & - & (a+1)z & - & au & = & 1\\
(a-1)x & & & + & (2a+1)z & + & (a-2)u & = & 1\\
(a-1)x & & & + & (a-1)z & + & 2au & = & b-1\\
(a-1)x & & & + & 3(a+1)z & - & 4u & = & 3-b
\end{array}} \Leftrightarrow
$$

$$
\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl}
(a+1)y & + & x & - & (a+1)z & - & au & = & 1\\
 & & (a-1)x & + & (2a+1)z & + & (a-2)u & = & 1\\
 & & & & -(a+2)z & + & (a+2)u & = & b-2\\
 & & & & (a-2)z & - & (a-2)u & = & 2-b
\end{array}} \Leftrightarrow
$$

$$\overset{[3]}{\Leftrightarrow}\ \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} (a+1)y & + & x & - & (a+1)z & - & au & = & 1 \\ & & (a-1)x & + & (2a+1)z & + & (a-2)u & = & 1 \\ & & & & -(a+2)z & + & (a+2)u & = & b-2 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}}$$

[1] - prva jednačina se oduzima od druge i treće;

[2] - prva i druga kolona zamene mesta, a zatim se druga jednačina oduzima od treće i četvrte;

[3] - treću jednačinu dodamo na četvrtu.

Diskusija:

(1) Za $a \notin \{-1, 1, -2\}$ i svako $b \in \mathbb{R}$ je sistem 1 puta neodređen, i zamenom unatrag dobijamo skup rešenja:

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(\tfrac{1-3a}{a-1}u + \tfrac{a+2-(2a+1)(2-b)}{(a-1)(a+2)}, 2\tfrac{a^2+a-2}{a^2-1}u + \tfrac{(3-b)a^2+2(2-b)a-2}{(a^2-1)(a+2)}, u + \tfrac{2-b}{a+2}, u \right) \;\middle|\; u \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2) Za $a = -1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & u & = & 1 \\ -2x & - & z & - & 3u & = & 1 \\ & - & z & + & u & = & b-2 \end{array}} \overset{[4]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & u & = & 1 \\ & - & z & - & u & = & 3 \\ & & & & 2u & = & b-5 \end{array}}$$

[4] - prvu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo drugoj, a zatim drugu jednačinu oduzmemo od treće.

Vidimo da je sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(\tfrac{7-b}{2}, y, -\tfrac{b+1}{2}, \tfrac{b-5}{2} \right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) Za $a = 1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2y & + & x & - & 2z & - & u & = & 1 \\ & & & & 3z & - & u & = & 1 \\ & & & - & 3z & + & 3u & = & b-2 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[5]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2z & - & u & = & 1-2y \\ & & 3z & - & u & = & 1 \\ & & & & 2u & = & b-1 \end{array}}$$

[5] - drugu jednačinu dodamo trećoj, a zatim promenljivu y prebacimo na desnu stranu jednakosti.

Vidimo da je sistem 1 puta neodređen, i skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(5\tfrac{b+1}{6} - 2y, y, \tfrac{b+1}{6}, \tfrac{b-1}{2} \right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) Za $a = -2$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} -y & + & x & + & z & + & 2u & = & 1 \\ & - & 3x & - & 3z & - & 4u & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & b-2 \end{array}}$$

(4.1) za $b \neq 2$ je sistem kontradiktoran (dakle $\mathcal{R}_S = \emptyset$);

(4.2) za $b=2$ je sistem 2 puta neodređen jer je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrrrrrrrr} -y & + & x & + & z & + & 2u & = & 1 \\ & - & 3x & - & 3z & - & 4u & = & 1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrrrl} y & - & x & = & z+2u-1 \\ & & x & = & -z-\frac{4}{3}u-\frac{1}{3} \end{array}}$$

i skup rešenja mu je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S &= \left\{ \left(-z-\tfrac{4}{3}u-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}u-\tfrac{4}{3}, z, u\right) \;\middle|\; z,u \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z(-1,0,1,0) + \left(-\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 1\right) + \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}, 0, 0\right) \;\middle|\; z,u \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

☑

Zadatak 9.16 *Diskutovati sistem po $a,b,c \in \mathbb{R}$:*

$$S: \begin{array}{rcrcrcccrcl} (a+b)x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ ax_1 & + & (a+b)x_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ ax_1 & + & ax_2 & + & (a+b)x_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & (a+b)x_n & = & c \end{array}$$

➥ ***Rešenje:*** Na osnovu zadatka **9.2** pod (a), sledi da je determinanta ovog sistema $D_S = (na+b)b^{n-1}$, pri čemu je $D_S \neq 0$ za $b \neq 0$ i $b \neq -na$, odakle dobijamo sledeće slučajeve.

(1) Za $b \neq 0$ i $b \neq -na$ je sistem jednoznačno određen.

(2) Za $b = 0$ su prvih $n-1$ jednačina iste, pa je sistem ekvivalentan sa

$$ax_1 + \dots + ax_n = a \quad \wedge \quad 0 = c - a,$$

pa u zavisnosti od $c-a$ imamo podslučajeve:

(2.1) za $c \neq a$ je sistem kontradiktoran;

(2.2) za $c = a$ je sistem ekvivalentan sa $ax_1 + \dots + ax_n = a$, te ovde imamo još dva podslučaja:

(2.2.1) za $a \neq 0$ je sistem ekvivalentan sa $x_1 + \dots + x_n = 0$, što znači da je $n-1$ puta neodređen ($x_2, x_3, \dots, x_n$ su proizvoljni, i $x_1 = -x_2 - \dots - x_n$);

(2.2.2) za $a = 0$ je sistem ekvivalentan sa $0 = 0$, što znači da je n puta neodređen (skup rešenja mu je ceo skup $\mathbb{R}^4$).

(3) Za $b = -na \wedge b \neq 0$ (slučaj $b = 0$ je već obrađen), pri čemu je tada i $a \neq 0$, dobijamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcccrcl} (a+b)x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ ax_1 & + & (a+b)x_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ ax_1 & + & ax_2 & + & (a+b)x_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & (a+b)x_n & = & c \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcccrcl} (1-n)ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ ax_1 & + & (1-n)ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ ax_1 & + & ax_2 & + & (1-n)ax_3 & + & \dots & + & ax_n & = & a \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & (1-n)ax_n & = & c \end{array}}$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcccrcl} (1-n)ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_{n-1} & = & a-ax_n \\ ax_1 & + & (1-n)ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & ax_{n-1} & = & a-ax_n \\ ax_1 & + & ax_2 & + & (1-n)ax_3 & + & \dots & + & ax_{n-1} & = & a-ax_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & = & \vdots \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & (1-n)ax_{n-1} & = & a-ax_n \\ & & & & & & & & 0 & = & c+(n-1)a \end{array}}$$

[1] - prvih $n-1$ jednačina dodamo na n-tu, a zatim prebacimo x_n na desnu stranu jednakosti.

U zavisnosti od $c+(n-1)a$ dobijamo 2 podslučaja:

(3.1) za $c \neq (1-n)a$ je sistem kontradiktoran;

(3.2) za $c = (1-n)a$ je sistem ekvivalentan sa prvih $n-1$ jednačina u poslednjem trougaonom obliku sistema, pri čemu je to sistem čija je determinanta (formata $n-1$, rešavamo je na isti način kao polaznu determinantu) $(-na)^{n-2} \cdot (-a) \neq 0$ (jer je $a \neq 0$), što znači da se promenljive $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ mogu izraziti preko x_n, a to znači da je sistem u ovom slučaju 1-puta neodređen. ☑

Zadatak 9.17 *Diskutovati po $m, n \in \mathbb{C}$ i rešiti sistem*

$$S: \quad \begin{array}{rcrcrcl} (m-1)x & + & \left(m^2-m-6\right)y & + & (m-3)z & = & 1 \\ (2m+1)x & + & \left(m^2-m-6\right)y & + & \left(m^2+2m-5\right)z & = & n+1 \\ (4m+2)x & + & 2\left(m^2-m-6\right)y & + & \left(m^2+3m-8\right)z & = & 2 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} \left(m^2-m-6\right)y & + & (2m+1)x & + & \left(m^2+2m-5\right)z & = & n+1 \\ & & (m+2)x & + & \left(m^2+m-2\right)z & = & n \\ & & & & \left(m^2+m-2\right)z & = & 2n \end{array}}$$

[1] - drugu jednačinu oduzmemo od prve, drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na treću, zatim promenljivama x i y zamenimo mesta, i zamenimo mesta prvoj i drugoj jednačini; na kraju još drugu i treću jednačinu pomnožimo sa -1.

Diskutujući vrednosti koeficijenata na glavnoj dijagonali dobijamo

- $m^2-m-6=0 \Leftrightarrow m_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+25}}{2} \Leftrightarrow (m=3 \vee m=-2)$,
- $m+2=0 \Leftrightarrow m=-2$,
- $m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow (m=1 \vee m=-2)$,

odakle sledi

(1) za $m \notin \{-2,1,3\}$ (svi koeficijenti na glavnoj dijagonali su različiti od nule) je sistem jednoznačno određen (za vežbu izračunati rešenja zamenom unatrag);

(2) za $m=-2$ uvrštavanjem dobijamo

$$S \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{rcrcl} -3x & - & 5z & = & n+1 \\ & & 0 & = & -n \\ & & 0 & = & 2n \end{array}} \;\overset{[2]}{\Leftrightarrow}\; \boxed{\begin{array}{rcrcl} -3x & - & 5z & = & n+1 \\ & & 0 & = & -n \end{array}}$$

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo trećoj.

te imamo

(2.1) za $n \neq 0$ sistem je kontradiktoran;
(2.2) za $n=0$ je sistem 2 puta neodređen i skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(-\tfrac{5}{3}z - \tfrac{1}{3}, y, z\right) \;\middle|\; y,z \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ y(0,1,0) + z\left(-\tfrac{5}{3},0,1\right) + \left(-\tfrac{1}{3},0,0\right) \;\middle|\; y,z \in \mathbb{R} \right\};$$

(3) za $m=1$ uvrštavanjem dobijamo

$$S \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} -6y & + & 3x & - & 2z & = & n+1 \\ & & 3x & & & = & -n \\ & & & & 0 & = & 2n \end{array}}$$

te imamo

(3.1) za $n \neq 0$ sistem je kontradiktoran;
(3.2) za $n=0$ je sistem 1 puta neodređen i skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(-\tfrac{n}{3}, -\tfrac{1}{3}z - \tfrac{2n+1}{3}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ z\left(0,-\tfrac{1}{3},1\right) + \left(-\tfrac{n}{3}, -\tfrac{2n+1}{3}, 0\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\};$$

(4) za $m=3$ uvrštavanjem dobijamo

$$S \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{lcrcl} 7x & + & 10z & = & n+1 \\ 5x & & & = & -n \\ & & 10z & = & 2n \end{array}} \;\overset{[3]}{\Leftrightarrow}\; \boxed{\begin{array}{lcrcl} 5x & & & = & -n \\ & & 10z & = & 2n \\ & & 0 & = & \tfrac{2}{5}n+1 \end{array}}$$

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa $-\dfrac{7}{5}$ dodamo prvoj, treću jednačinu oduzmemo od prve, i na kraju prvu jednačinu stavimo na treće mesto.

(4.1) za $n \neq -\frac{5}{2}$ ($\frac{2}{5}n+1 \neq 0$) sistem je kontradiktoran;

(4.2) za $n=-\frac{5}{2}$ ($\frac{2}{5}n+1=0$) je sistem 1 puta neodređen i rešenja su mu $y \in \mathbb{R}$, $z = \frac{1}{10}\cdot 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$, tj. skup rešenja mu je

$$\mathcal{R}_S = \left\{ \left(\tfrac{1}{2}, y, -\tfrac{1}{2}\right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y(0,1,0) + \left(\tfrac{1}{2},0,-\tfrac{1}{2}\right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

☑

Zadatak 9.18 *Diskutovati i rešiti sistem*

$$S: \begin{array}{rcrcrcrcl} a(a+1)x & + & y & - & z & + & au & = & 1 \\ a(a+1)x & + & ay & & & + & 2au & = & b \\ & & (a-1)y & + & (a-1)^2 z & + & 3au & = & c-1 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} a(a+1)x & + & ay & & & + & 2au & = & b \\ & & (1-a)y & - & z & - & au & = & 1-b \\ & & (a-1)y & + & (a-1)^2z & + & 3au & = & c-1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} a(a+1)x & + & ay & & & + & 2au & = & b \\ & & (1-a)y & - & z & - & au & = & 1-b \\ & & & + & a(a-2)z & + & 2au & = & c-b \end{array}}$$

[1] - prva i druga jednačina zamene mesta, a zatim prvu jednačinu oduzimamo od druge;

[2] - drugu jednačinu dodamo na treću.

(1) Za $a \notin \{-1,0,1,2\}$ su svi koeficijenti na glavnoj dijagonali različiti od 0, te je sistem 1-puta neodređen (za proizvoljno u, vrednosti promenljivih x,y,z su jednoznačno određene).

(2) Za $a = -1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} -y & & & - & 2u & = & b \\ 2y & - & z & + & u & = & 1-b \\ & & 3z & - & 2u & = & c-b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} -y & & & - & 2u & = & b \\ & - & z & - & 3u & = & 1+b \\ & & & - & 11u & = & 2b+c+3 \end{array}}$$

[3] - prvu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo na drugu, a zatim drugu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na treću.

Sistem je u ovom slučaju 1 puta neodređen (x uzima proizvoljnu vrednost, a ostale promenljive su jednoznačno određene).

(3) Za $a = 0$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & b \\ y & - & z & = & 1-b \\ & & 0 & = & c-b \end{array}}$$

te dobijamo podslučajeve

(3.1) Za $b \neq 0 \vee c \neq b$ (tj. $b \neq 0 \vee c \neq 0$) sistem je kontradiktoran.

(3.2) Za $b = 0 \wedge c = 0$ sistem je 3 puta neodređen (promenljive x, u i npr. z uzimaju proizvoljne vrednosti, a y je jednoznačno određeno).

(4) Za $a = 1$ je

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & & & + & 2u & = & b \\ & & & - & z & - & u & = & 1-b \\ & & & - & z & + & 2u & = & c-b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[4]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} y & & & + & 2u & = & b-2x \\ & - & z & - & u & = & 1-b \\ & & & & 3u & = & c-1 \end{array}}$$

[4] - drugu jednačinu oduzmemo od treće, a zatim x prebacimo na desnu stranu jednakosti.

Sistem je u ovom slučaju 1 puta neodređen (x uzima proizvoljnu vrednost, a ostale promenljive su jednoznačno određene).

(5) za $a = 2$ je

$$S \overset{[5]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{ccccccc} 6x & + & 2y & + & 4u & = & b \\ & - & y & - & 2u & = & 1-b+z \\ & & & & 4u & = & c-1 \end{array}}$$

[5] - promenljivu z prebacimo na desnu stranu jednakosti.

Sistem je u ovom slučaju 1 puta neodređen (z uzima proizvoljnu vrednost, a ostale promenljive su jednoznačno određene). ☑

Zadatak 9.19 *Nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ diskutovati i rešiti sistem*

$$S: \begin{array}{ccccccc} 2x & + & (a-1)y & - & 3az & = & 1 \\ -x & & & + & az & = & b \\ 3x & + & a^2y & - & az & = & b^2 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{cccccc} -x & & + & az & = & b \\ & (a-1)y & - & az & = & 1+2b \\ & a^2y & + & 2az & = & b^2+3b \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{cccccc} -x & + & az & & = & b \\ & - & az & + \quad (a-1)y & = & 1+2b \\ & & & \left(a^2+2a-2\right)y & = & b^2+7b+2 \end{array}}$$

[1] - drugu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo na prvu, i drugu jednačinu pomnoženu sa 3 dodamo na treću, a zatim zamenimo prvu i drugu jednačinu;

[2] - drugu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo na treću, a zatim zamenimo mesta promenljivima y i z.

Razmatrajući elemente na glavnoj dijagonali, uočimo da je

$$a^2+2a-2=0 \Leftrightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \notin \mathbb{Q},$$

odnosno da je $a^2+2a-2 \neq 0$ za sve $a \in \mathbb{Q}$. Stoga dobijamo sledeću diskusiju.

(1) Za $a \neq 0$ sistem je jedinstveno određen, i za svako $a, b \in \mathbb{Q}$ rešenja dobijamo zamenom unatrag:

$$y = \frac{b^2+7b+2}{a^2+2a-2} \in \mathbb{Q},$$

$$z = -\frac{1+2b}{a} + \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b^2+7b+2}{a^2+2a-2} \in \mathbb{Q},$$

$$x = -1-3b+(a-1) \cdot \frac{b^2+7b+2}{a^2+2a-2} \in \mathbb{Q}.$$

(2) Za $a = 0$ dobijamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} -x & = & b \\ -y & = & 1+2b \\ -2y & = & b^2+7b+2 \end{array}} \overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcl} -x & = & b \\ -y & = & 1+2b \\ 0 & = & b(b+3) \end{array}}$$

[3] - drugu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo trećoj.

te je

(2.1) za $b \neq 0 \wedge b \neq -3$ ($b(b+3) \neq 0$) sistem kontradiktoran;

(2.2) za $b = 0$, i isto tako i za $b = -3$ sistem je 1-puta neodređen, i rešenja su:
za $b = 0$: $\mathcal{R}_S = \{(0,-1,z) \mid z \in \mathbb{Q}\}$,
za $b = -3$: $\mathcal{R}_S = \{(3,5,z) \mid z \in \mathbb{Q}\}$. ☑

Zadatak 9.20 *Nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ diskutovati i rešiti sistem*

$$S: \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \mathrm{i}y & + & (1+\mathrm{i})z & = & b \\ 2\mathrm{i}x & + & a^2y & + & (2\mathrm{i}-4)z & = & (1+2\mathrm{i})b-\mathrm{i} \\ x & + & \left(a^2+2+\mathrm{i}\right)y & + & (\mathrm{i}-1)z & = & 4b-1 \end{array}$$

➥ ***Rešenje:***

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \mathrm{i}y & + & (1+\mathrm{i})z & = & b \\ & & \left(a^2+2\right)y & - & 2z & = & b-\mathrm{i} \\ & & \left(a^2+2\right)y & - & 2z & = & 3b-1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \mathrm{i}y & + & (1+\mathrm{i})z & = & b \\ & & \left(a^2+2\right)y & - & 2z & = & b-\mathrm{i} \\ & & & & 0 & = & 2b-1+\mathrm{i} \end{array}}$$

[1] - prvu jednačinu pomnoženu sa $-2\mathrm{i}$ dodamo na drugu, i prvu jednačinu oduzmemo od treće;

[2] - drugu jednačinu oduzmemo od treće.

(1) Za $b \neq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ (odnosno $2b-1+\mathrm{i} \neq 0$) sistem je kontradiktoran.

(2) Za $b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ dobijamo

$$S \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \mathrm{i}y & + & (1+\mathrm{i})z & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i} \\ & & \left(a^2+2\right)y & - & 2z & = & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i} \end{array}}$$

te u zavisnosti od vrednosti koeficijenta a^2+2 dobijamo sledeće podslučajeve:

(2.1) za $a^2+2 \neq 0$, odnosno $a \notin \left\{-\sqrt{2}\mathrm{i}, \sqrt{2}\mathrm{i}\right\}$, je sistem 1-puta neodređen, i zamenom unatrag dobijamo

$z = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$y = \frac{2}{a^2+2}z + \frac{b-\mathrm{i}}{a^2+2} = \frac{2}{a^2+2}\alpha + \frac{1}{2}\frac{1-3\mathrm{i}}{a^2+2},$$

$$x = -\mathrm{i}y-(1+\mathrm{i})z+b = -\frac{a^2(1+\mathrm{i})+4\mathrm{i}+2}{a^2+2}\alpha + \frac{1}{2}\frac{a^2(1-\mathrm{i})+5-\mathrm{i}}{a^2+2},$$

odnosno

$$\mathcal{R}_S = \left\{\alpha\left(-\tfrac{a^2(1+\mathrm{i})+4\mathrm{i}+2}{a^2+2}, \tfrac{2}{a^2+2}, 1\right) + \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{a^2(1-\mathrm{i})+5-\mathrm{i}}{a^2+2}, \tfrac{1}{2}\tfrac{1-3\mathrm{i}}{a^2+2}, 0\right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C}\right\};$$

(2.2) za $a = -\sqrt{2}\mathbb{i}$, kao i za $a = \sqrt{2}\mathbb{i}$, sistem je ekvivalentan sa (zamenimo mesta promenljivima y i z)

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} x & + & (1+\mathbb{i})z & + & \mathbb{i}y & = & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathbb{i} \\ & & -2z & & & = & \frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathbb{i} \end{array}}$$

i vidimo da je u ova dva slučaja sistem 1-puta neodređen, i rešenja su mu

$y = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$,

$z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\mathbb{i}$,

$x = -\mathbb{i}y - (1+\mathbb{i})z + b = -\mathbb{i}\alpha + \dfrac{3}{2} - \mathbb{i}$,

odnosno

$\mathcal{R}_S = \left\{ \alpha(-\mathbb{i},1,0) + \left(\frac{3}{2} - \mathbb{i}, 0, -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{i}\right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C} \right\}$. ☑

9.4 Inverzna matrica

Definicija 9.1 ***Kvadratna podmatrica*** *reda r matrice $A_{m\times n}$ je kvadratna matrica reda r koja se dobija kada u matrici $A_{m\times n}$ izbacimo proizvoljnih $m-r$ vrsta i $n-r$ kolona.*

Minor *reda r matrice A_{mn} je determinanta neke njene kvadratne podmatrice reda r.*

Definicija 9.2 ***Minor*** *M_{ij} elementa a_{ij} kvadratne matrice $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je determinanta matrice koja se dobija od matrice A izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone.* ***Kofaktor*** *A_{ij} elementa a_{ij} matrice A je $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.*

Definicija 9.3 ***Adjungovana matrica*** *kvadratne matrice $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ je matrica*

$$\mathrm{Adj}A = \left[A_{ij}\right]_{n\times n}^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

(gde su A_{ij} kofaktori matrice A).

Analogno pojmu transformacija ekvivalencije sistema linearnih jednačina, uvodimo pojam transformacija ekvivalencije matrica, i pojam ekvivalentih matrica. ***Transformacije ekvivalencija*** matrica su:

[EM1] množenje elemenata neke i-te vrste ili kolone matrice A skalarom $k \neq 0$;

[EM2] zamena mesta dvema vrstama ili kolonama;

[EM3] Dodavanje elementima neke j-te vrste (kolone) elemenata neke i-te vrste (kolone) pomnoženih skalarom k.

Definicija 9.4 *Matrica A je* ***ekvivalentna*** *sa matricom B, u oznaci $A \sim B$, ukoliko se matrica B može dobiti od matrice A primenom niza transformacija ekvivalencije.*

☞ U skupu svih matrica, relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije, tj. iz $A \sim B$ sledi $B \sim A$, i iz $A \sim B$ i $B \sim C$ sledi $A \sim C$.

Definicija 9.5 *Matrica A^{-1} je* ***inverzna matrica*** *matrice A ako je $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ za neku jediničnu matricu I odgovarajućeg formata.*

☞ Za neke matrice A i A' se može desiti da je npr. $A'A = I$ i $AA' \neq I$. U ovakvom slučaju A' nije inverzna matrica matrice A (već samo njena leva inverzna matrica). Može se desiti i da je $A'A = I$, a da proizvod AA' nije ni definisan.

Definicija 9.6 *Kvadratna matrica A je* ***regularna*** *ako je* $\det A \neq 0$.

Teorema 9.5 *Za matricu A postoji inverzna matrica A^{-1} ako i samo ako je A kvadratna matrica formata $n \times n$ i važi* $\det A \neq 0$ *(matrica A je regularna). U takvom slučaju je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \mathrm{Adj} A \tag{9.2}$$

Da bi se primenom formule (9.2) izračunala inverzna matrica kvadratne matrice A formata $n \in \mathbb{N}$, za $n > 3$ je potreban prilično veliki broj računskih operacija. U opštem slučaju, postoji efikasniji postupak za izračunavanje inverzne matrice. On je takođe zasnovan na Gausovom postupku eliminacije, odnosno na primeni transformacija ekvivalencije na kvadratne matrice. Neformalno ćemo ga zvati ***blok-šemom***, i sastoji se u sledećem:

1. formiramo tzv. ***blok-matricu*** $[A|I]$ gde je u levom bloku matrica A čiju inverznu matricu izračunavamo, a u desnom bloku je jedinična matrica I istog formata kao matrica A;
2. primenom transformacija ekvivalencije *na vrste* blok-matrice $[A|I]$ pravimo u levom bloku jediničnu matricu;
3. ako u levom bloku blok-matrice $[A|I]$ primenom transformacija ekvivalencije na vrste ne može da se napravi jedinična matrica, to znači da inverzna matrica A^{-1} ne postoji (odnosno da je $\det A = 0$);
4. ako smo u levom bloku blok-matrice $[A|I]$ primenom transformacija ekvivalencije na vrste napravili jediničnu matricu, to znači da je $\det A \neq 0$, i u desnom bloku blok-matrice $[A|I]$ je dobijena inverzna matrica A^{-1}.

Da bismo blok-šemom dobili ispravan rezultat, transformacije ekvivalencije primenjujemo *samo na vrste*.

Primer 9.2 *Izračunajmo inverznu matricu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$*, ukoliko postoji.*

<u>*Prvi način - blok-šemom:*</u>

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{[1]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[2]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

[1] - *prvu vrstu pomnoženu sa* -2 *dodajemo drugoj, a zatim prvu vrstu pomnoženu sa* -3 *dodajemo trećoj;*

[2] - *drugu vrstu oduzimamo od treće.*

Kako su u trećoj vrsti levog bloka poslednje matrice svi elementi jednaki nuli, u levom bloku ne možemo napraviti jediničnu matricu, te sledi da A^{-1} *ne postoji.*

Drugi način: *Kako je* $\det A = 0$, *sledi da inverzna matrica* A^{-1} *ne postoji.* ✔

Primer 9.3 *Izračunajmo inverznu matricu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, *ukoliko postoji.*

Prvi način - blok-šemom:

$$\mathbb{A} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{[1]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[2]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{[3]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[4]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{[5]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

[1] - *prvu vrstu pomnoženu sa* -2 *dodajemo drugoj, a zatim prvu vrstu pomnoženu sa* -3 *dodajemo trećoj;*

[2] - *drugu vrstu oduzimamo od treće;*

[3] - *treću vrstu oduzimamo od prve i druge;*

[4] - *drugu vrstu dodajemo na prvu;*

[5] - *drugu vrstu množimo sa* $\frac{1}{2}$.

Dakle, inverzna matrica matrice A je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, *što možemo i proveriti izračunavajući da je* $AA^{-1} = I$ *i* $A^{-1}A = I$.

Drugi način: *Kako je* $\det A = 2$, *sledi da inverzna matrica* A^{-1} *postoji, i primenom formule* (9.2) *dobijamo*

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Zadatak 9.21 *Izračunati inverzne matrice datih matrica (ukoliko postoje)*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

➥ ***Rešenje:*** Inverznu matricu možemo naći na dva načina, primenom formule (9.2), ili blok-šemom.

(A) Prvi način - primenom formule (9.2)

Kako je $\det A = 4$, matrice A ima inverznu matricu, i $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\mathrm{Adj}A$. Kofaktori $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ matrice A su redom $A_{11} = -3$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -8$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = 2$, $A_{23} = 4$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 0$, te je

$$\mathrm{Adj}A = \left[A_{ij}\right]^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

pa konačno dobijamo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Drugi način - blok-šemom

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{[1]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[2]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{[3]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[4]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{[5]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[6]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{[7]}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

[1] - dodavanje prve vrste pomnožene sa -2 drugoj vrsti;

[2] - dodavanje prve vrste pomnožene sa -3 trećoj vrsti;

[3] - zamena druge i treće vrste;

[4] - množenje druge vrste sa $-\frac{1}{4}$;

[5] - dodavanje treće vrste pomnožene sa $\frac{1}{2}$ drugoj vrsti;

[6] - dodavanje treće vrste prvoj vrsti;

[7] - oduzimanje druge vrste od prve.

Tako smo blok šemom ponovo dobili matricu $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(B) Prvi način - primenom formule (9.2)

Kako je $\det B = -1$, sledi da matrica B ima inverznu matricu, i $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}\operatorname{Adj} B$. Kofaktori $B_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ matrice B su redom $B_{11} = -22$, $B_{12} = 17$, $B_{13} = 1$, $B_{14} = -4$, $B_{21} = 6$, $B_{22} = -5$, $B_{23} = 0$, $B_{24} = -1$, $B_{31} = 26$, $B_{32} = -20$, $B_{33} = -2$, $B_{34} = 5$, $B_{41} = -17$, $B_{42} = 13$, $B_{43} = 1$, $B_{44} = -3$, pa je

$$\operatorname{Adj} B = \left[B_{ij}\right]^T = \begin{bmatrix} -22 & 6 & 26 & -17 \\ 17 & -5 & -20 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 5 & -3 \end{bmatrix},$$

te konačno dobijamo

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \operatorname{Adj} B = -1 \cdot \begin{bmatrix} -22 & 6 & 26 & -17 \\ 17 & -5 & -20 & 13 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & -1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Drugi način - blok-šemom

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[1]}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -10 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[2]}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[3]}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\overset{[4]}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]\sim$$

$$\overset{[5]}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & -15 & 4 & 20 & -12 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -22 & 5 & 30 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]\sim$$

$$\overset{[6]}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]\sim$$

$$\overset{[7]}{\sim}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -6 & -26 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -17 & 5 & 20 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

[1] - dodavanje prve vrste pomnožene sa -2 drugoj vrsti, oduzimanje prve od treće vrste, i oduzimanje prve od četvrte vrste;

[2] - oduzimanje druge vrste od treće, i dodavanje druge vrste pomnožene sa -2 četvrtoj vrsti;

[3] - dodavanje treće vrste pomnožene sa $-\frac{5}{3}$ četvrtoj vrsti;

[4] - množenje druge vrste sa -1, množenje treće vrste sa $\frac{1}{3}$, i množenje četvrte vrste sa 3;

[5] - dodavanje četvrte vrste pomnožene sa $-\frac{1}{3}$ trećoj vrsti, dodavanje četvrte vrste pomnožene sa -6 drugoj vrsti, i dodavanje četvrte vrste pomnožene sa -4 prvoj vrsti;

[6] - dodavanje treće vrste pomnožene sa -5 drugoj vrsti, i dodavanje treće vrste pomnožene sa -3 prvoj vrsti;

[7] - dodavanje druge vrste pomnožene sa -2 prvoj vrsti.

Tako smo blok šemom ponovo dobili matricu $A^{-1} = \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

(C) <u>Prvi način - primenom formule (9.2)</u>

Kako je $\det C = 0$, sledi da matrica C nema inverznu matricu.

<u>Drugi način - blok-šemom</u>

Primenom blok-šeme na matricu C bismo dobili

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\overset{[1]}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\sim$$

$$\overset{[2]}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

[1] - dodavanje prve vrste pomnožene sa -2 drugoj vrsti;

[2] - dodavanje prve vrste pomnožene sa -3 trećoj vrsti.

Kako smo u drugoj vrsti prvog bloka dobili sve nule, sledi da nikakvim elementarnim transformacijama ne možemo napraviti jediničnu matricu u levom bloku, čime se još jednom pokazalo da matrica C nema svoju inverznu matricu. ☑

Zadatak 9.22 *Ispitati koje od tvrđenja je tačno za bilo koje kvadratne, regularne matrice A, B i C reda n, i svaki skalar λ (gde je* $\mathbb{O}$ *nula-matrica reda n).*

(a) $(B+C)A = BA+CA$,

(b) $A+B = B+A$,

(c) $AB = BA$,

(d) $A+(B+C) = (A+B)+C$,

(e) $A(BC) = (AB)C$,

(f) $A-B = B-A$,

(g) $(AB)^2 = A^2B^2$,

(h) $AB = \mathbb{O} \;\Rightarrow\; (A = \mathbb{O} \vee B = \mathbb{O})$,

(i) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$,

(j) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(k) $AA^{-1} = A^{-1}A$,

(l) $\det(AB) = \det(A)+\det(B)$,

(m) $\det(AB) = \det(B)\det(A)$,

(n) $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$,

(o) $\det(\lambda A) = \lambda\det(A)$,

(p) $\det(\lambda A) = \lambda^n\det(A)$,

➥ ***Rešenje:***

(a) DA, množenje matrica je s obe strane distributivno u odnosu na sabiranje matrica, za sve matrice A, B i C odgovarajućeg formata.

(b) DA, sabiranje matrica je komutativna operacija, za sve matrice A i B odgovarajućeg formata.

(c) NE, množenje matrica u opštem slučaju nije komutativna operacija (vidi komentar na strani 194). Na primer, matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ su regularne ($\det A = -2 \neq 0$ i $\det B = -2 \neq 0$), pri čemu je $AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$ i $BA = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$.

(d) DA, sabiranje matrica je asocijativna operacija, za sve matrice A, B i C odgovarajućeg formata.

(e) DA, množenje matrica je asocijativna operacija, za sve matrice A, B i C odgovarajućeg formata.

(f) NE. Važi naime $A - B = -(B - A)$.

(g) NE jer množenje matrica u opštem slučaju nije komutativno, te je u opštem slučaju (koristimo asocijativnost množenja matrica)

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B \stackrel{?}{=} A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2,$$

gde na mestu znaka $\stackrel{?}{=}$ stoji $=$ ako je $AB = BA$, odnosno $\neq$ ako je $AB \neq BA$.

(h) DA, jer su A i B regularne matrice. Naime, za regularne kvadratne matrice A i B (tj. $\det A \neq 0$ i $\det B \neq 0$), je $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, odakle sledi da je $AB \neq \mathbb{O}$, te kako je leva strana implikacije netačna, implikacija u celini je tačna.

☞ Ako matrice A i B nisu regularne, implikacija je netačna. Na primer, za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbb{O}$ važi $AB = \mathbb{O}$.

(i) NE. Po teoremi je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, te bi jednakost $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ važila samo ako matrice A^{-1} i B^{-1} komutiraju (tj. $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$), što u opštem slučaju nije tačno.

(j) DA. Ovo je teorema.

(k) DA, po definiciji inverzne matrice je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

(l) NE. Na primer, za regularne matrice

$A = I$ i $B = I$ je $\det(AB) = \det I = 1 \neq 1 + 1 = \det(A) + \det(B)$.

(m) DA. Po teoremi je $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A$ (jer $\det A$ i $\det B$ su skalari).

(n) NE. Na primer, za regularne matrice $A = I$ i $B = -I$ formata 2 (ili bilo kojeg parnog formata) je

$\det(A + B) = \det \mathbb{O} = 0 \neq 1 + 1 = \det(A) + \det(B)$.

(o) NE. Na primer, za regularnu matricu $A = I$ formata 2 i $\lambda = 3$ je

$$\det(\lambda A) = \det(3I) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq \lambda \det(A) = 3 \det I = 3 \cdot 1 = 3.$$

(p) DA, što sledi iz definicije množenja matrice skalarom, i osobine determinanti [D3]. ☑

9.5 Rešavanje matričnih jednačina

Matrične jednačine rešavamo donekle slično kao i jednačine čije su nepoznate iz skupa npr. realnih brojeva, ali postoje i neke razlike. Moramo voditi računa o osobinama matričnih operacija, tj. moramo imati u vidu npr. da

- množenje matrica nije komutativna operacija, tako da pri množenju neke matrične jednakosti ili jednačine sa nekom matricom A, izraze s obe strane jednakosti množimo s leve ili s desne strane, tj. iz $A = B$ sledi $CA = CB$ kao i $AC = BC$, ali ne sledi $AC = CB$ niti $CA = BC$,
- inverzna matrica postoji samo za kvadratne, regularne matrice (dok za $x \in \mathbb{R}$ element $\frac{1}{x}$ postoji za sve $x \neq 0$),
- za matrice A i B iz $AB = \mathbb{O}$ ne sledi $A = \mathbb{O}$ ili $B = \mathbb{O}$ (kao u skupu realnih brojeva),
- matrične operacije su definisane samo za matrice odgovarajućeg formata, tako da i nepoynata matrica X u matričnoj jednačini mora biti odgovarajućeg formata (matrična jednačina po nepoznatoj matrici X može da nema rešenja već i zbog toga što ne postoji matrica X takvog formata da su sve operacije u matričnoj jednačini dobro definisane),

i tako dalje.

Zadatak 9.23 *Za matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, *rešiti po nepoznatoj* X *matričnu jednačinu* $AX + B = C - 2I$.

➥ ***Rešenje:*** Da bi matrica $C - 2I$ bila definisana, jedinična matrica I je formata 2.

$AX + B = C - 2I \;\Leftrightarrow\; AX + B - B = C - 2I - B \;\Leftrightarrow$
$\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\; AX + \mathbb{O} = C - 2I - B \;\Leftrightarrow\; AX = C - 2I - B \;\Leftrightarrow$
$\overset{[2]}{\Leftrightarrow}\; A^{-1}AX = A^{-1}(C - 2I - B) \;\Leftrightarrow\; IX = A^{-1}(C - 2I - B) \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}(C - 2I - B)$,

[1] - koristimo asocijativnost sabiranja matrica;

[2] - množimo jednakost sa A^{-1} s leve strane ukoliko A^{-1} postoji (i asocijativnost množenja matrica);

i pri tome je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

te tako konačno dobijamo

$$X = A^{-1}(C - 2I - B) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$ ☑

Zadatak 9.24 *Za matrice* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, *rešiti po nepoznatoj* X *matričnu jednačinu* $AX + B = CX + I$.

➥ ***Rešenje:***

$AX+B=CX+I \;\Leftrightarrow\; AX+B-CX-B=CX+I-CX-B \;\Leftrightarrow$
$\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\; AX-CX+\mathbb{O}=I-B+\mathbb{O} \;\Leftrightarrow\; AX-CX=I-B \;\overset{[2]}{\Leftrightarrow}\; (A-C)X=I-B \;\Leftrightarrow$
$\overset{[3]}{\Leftrightarrow}\; (A-C)^{-1}(A-C)X=(A-C)^{-1}(I-B) \;\Leftrightarrow\; IX=(A-C)^{-1}(I-B) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; X=(A-C)^{-1}(I-B),$

[1] - koristimo komutativnost i asocijativnost sabiranja matrica;

[2] - koristimo distributivnost množenja prema sabiranju matrica;

[3] - množimo jednakost sa $(A-C)^{-1}$ s leve strane ukoliko $(A-C)^{-1}$ postoji;

gde je I jedinična matrica formata 2, i pri tome je

$(A-C)^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$

te tako konačno dobijamo

$X=(A-C)^{-1}(I-B)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$ ☑

Glava 10

Slobodni vektori

Slobodni vektori su klase ekvivalencije na skupu uređenih parova tačaka prostora, u odnosu na relaciju ρ definisanu sa (vidi [RD05]).

$(A,B)\rho(C,D) \quad \Leftrightarrow \quad$ duž AB je paralelna, podudarna i isto orijentisana kao duž CD.

Kao glavnog pretstavnika, najčešće uzimamo vektor čija je početna tačka u koordinatnom početku. Vektor je određen svojim pravcem, smerom i intenzitetom. Dva vektora su jednaka ako imaju jednake pravce smerove i intenzitete.

Skup V slobodnih vektora sa poljem realnih brojeva i opearcijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom (realnim brojem) čini trodimenzionalni vektorski prostor izomorfan sa $\mathbb{R}^3$. Njegova standardna, ortonormirana baza je uređena trojka jediničnih vektora $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ koja čini desni trijedar. Zbog izomorfnizma sa $\mathbb{R}^3$, slobodni vektor $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ „poistovećujemo” sa $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$, tj. često pišemo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, pri čemu je tada $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ i $\vec{k}=(0,0,1)$.

Osnovne računske operacije sa vektorima

1. Intenzitet (moduo) vektora $\vec{a}$, u oznaci $\left|\vec{a}\right|$ je dužina vektora $\vec{a}$.
2. Proizvod skalara (realnog broja) α i vektora $\vec{a}$, u oznaci $\alpha\cdot\vec{a}$ je vektor istog pravca kao $\vec{a}$, istog smera kao $\vec{a}$ za pozitivan, odnosno suprotnog smera za negativan skalar α, i intenziteta $|\alpha|\cdot|a|$.
3. Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\cdot\vec{b}$ je skalar (realan broj) definisan sa
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right).$$
4. Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}$ je vektor čiji je
   - intenzitet $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$,
   - pravac ortogonalan na pravce vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$,
   - smer takav da uređena trojka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ čini desni trijedar.

5. Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ je skalar (realan broj) definisan sa
$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$
6. Projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, u oznaci $\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ je vektor koji se dobija ortogonalnom projekcijom vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ (on je istog pravca kao vektor $\vec{b}$, istog smera kao $\vec{b}$ ako je ugao između $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oštar, a suprotnog smera u odnosu na $\vec{b}$ ako je ugao između $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tup, a intenzitet mu je $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$). Dakle
$$\mathrm{Proj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\cdot\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\vec{b}.$$

Ako su vektori dati svojim koordinatama u bazi $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, tada intenzitet vektora, proizvod vektora skalarom, skalarni proizvod, vektorski proizvod, mešoviti proizvod, kao i ugao između vektora izračunavamo na sledeći način. Za vektore $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ i $\vec{c} = (c_1,c_2,c_3)$ imamo

1. intenzitet vektora $\vec{a}$:
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2};$$
2. proizvod skalara $\alpha\in\mathbb{R}$ i vektora $\vec{a}$:
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3);$$
3. skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$
4. vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1).$$
5. mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$:
$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$
6. ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (sledi iz definicije skalarnog proizvoda):
$$\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right).$$

☞ Uočimo da u trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora ne možemo govoriti o orijentaciji ugla između dva vektora.

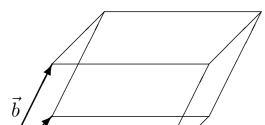
☞ Po definiciji smatramo da je nula-vektor $\vec{0}$ i paralelan sa svakim vektorom, i ortogonalan na svaki vektor.

Koristeći ove operacije sa vektorima, možemo poću njih izraziti neke važne uzajamne odnose između vektora i geometrijskih tela koje obrazuju.

1. Kod vektorskog proizvoda, intenzitet vektora $\vec{a}\times\vec{b}$ je površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

2. Kod mešovitog proizvoda, vrednost $\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$ pretstavlja zapreminu paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

3. Za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\vec{a}\perp\vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{a}\vec{b}=0$.
4. Za svaka dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ako i samo ako je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
5. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su koplanarni (leže u istoj ravni) ako i samo ako je $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0$.
6. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji skalar $k\in\mathbb{R}$ takav da je $\vec{a}=k\vec{b}$ ili $\vec{b}=k\vec{a}$.
7. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako
   $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha=0 \wedge \beta=0).$
8. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su koplanarni ako i samo ako postoje skalari $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.
9. Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su nekoplanarni ako i samo ako
   $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha=0 \wedge \beta=0 \wedge \gamma=0).$
10. Vektor $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ je jedinični vektor istog pravca i smera kao vektor $\vec{a}$.
11. Vektor $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ je simetralni vektor ugla kojeg obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jer su obojica istog, jediničnog intenziteta, i $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{a}$, a $\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{b}$.



Vektor $\left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a} + \left|\vec{a}\right| \cdot \vec{b}$ je takođe simetralni vektor ugla kojeg obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jer su obojica istog intenziteta $\left|\left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| = \left|\left|\vec{a}\right| \cdot \vec{b}\right|$, i $\left|\vec{b}\right| \cdot \vec{a}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{a}$, a $\left|\vec{a}\right| \cdot \vec{b}$ je istog pravca i smera kao vektor $\vec{b}$.

12. Vektori $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} + \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ i $\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} - \dfrac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$ su uzajamno ortogonalni, jer je

$$\left(\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} + \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right) \cdot \left(\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} - \frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|^2} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}$$

$$= \frac{\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|^2} - \frac{\left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^2} = 1 - 1 = 0.$$

Slede neke od važnih osobina operacija sa vektorima. Za sve vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, i sve skalare α i β važi

1. $\vec{a}\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$,
2. $\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$,
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$,
4. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
5. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
6. $\alpha\left(\vec{a}\vec{b}\right) = (\alpha\vec{a})\vec{b} = \vec{a}\left(\alpha\vec{b}\right)$,
7. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
8. $\alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\alpha\vec{b}\right)$,
9. $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
10. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
11. $\left|\alpha\vec{a}\right| = |\alpha| \cdot \left|\vec{a}\right|$.

Primer 10.1 *Dati su slobodni vektori*
$\vec{a} = (1,-3,2)$, $\vec{b} = (-2,-3,4)$, $\vec{c} = (1,1,1)$, $\vec{d} = (-2,6,-4)$, $\vec{e} = (-1,-6,6)$.

➥ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$,

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$,

$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

➥ $2\vec{a} = (2,-6,4)$, $-\vec{a} = (-1,3,-2)$.

➥ $\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 = 14.$

➥ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)+2\cdot 4 = 15,$

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1+(-3)\cdot 1+2\cdot 1 = 0,$ *odakle sledi da su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *ortogonalni,*

$\vec{a}\cdot\vec{d} = 1\cdot(-2)+(-3)\cdot 6+2\cdot(-4) = -28,$

➥ $\vec{d} = -2\cdot\vec{a}$, *odakle sledi da su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{d}$ *paralelni, suprotnog smera, i vektor* $\vec{d}$ *je* 2 *puta duži od vektora* $\vec{a}$,

➥ $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \arccos\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\right) = \arccos\left(\dfrac{15}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{29}}\right) = \arccos\left(\dfrac{15}{\sqrt{406}}\right),$

$\sphericalangle\left(\vec{b},\vec{c}\right) = \arccos\left(\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|}\right) = \arccos\left(\dfrac{(-2)\cdot 1+(-3)\cdot 1+4\cdot 1}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{87}}\right),$

(uglovi $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ *i* $\sphericalangle\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ *su oštri jer je* $\arccos x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *za* $x\in(0,1)$*).*

➥ $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-12+6)\vec{i}+(4-4)\vec{j}+(-3+6)\vec{k} = (-6,0,3),$

površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *je*
$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-6)^2+0^2+3^2} = \sqrt{45},$

$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3-2)\vec{i}+(2-1)\vec{j}+(1+3)\vec{k} = (-5,1,4),$

površina paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ *i* $\vec{c}$ *je*
$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-5)^2+1^2+4^2} = \sqrt{42}.$

➥ $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-12-4+6-6-4 = -23,$

zapremina paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *je* $\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = 23,$

$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -6 & 6 \end{vmatrix} = -18+12+24-6-36+24 = 0,$

zapremina paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *je* $\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right| = 0$, *odnosno, vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *su koplanarni.* ✔

Definicija 10.1 ***Linearna kombinacija vektora*** $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *je svaki izraz oblika* $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, *gde su* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *skalari (realni brojevi).*

Definicija 10.2 *Skup vektora $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je* **linearno nezavisan** *ukoliko je linearna kombinacija $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jednaka nuli samo kada su svi skalari jednaki nuli, tj. ako važi*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Ukoliko vektori skupa A nisu linearno nezavisni, tada kažemo da su **linearno zavisni**.

Teorema 10.1 *Skup vektora $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je linearno nezavisan ukoliko se ni jedan od vektora a_i ne može izraziti preko preostalih vektora, tj. vektora skupa $A \setminus \{a_i\}$. Dakle, linearno su nezavisni ako ne postoje skalari α_k takvi da je $a_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \alpha_k a_k$, ni za jedan od vektora a_i.*

Definicija 10.3 *Vektori skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ su* **generatorni** *za skup slobodnih vektora ako se svaki vektor $\vec{x}$ može izraziti kao njihova linearna kombinacija, tj. ako za svaki vektor $\vec{x}$ postoje skalari (realni brojevi) α_k takvi da je $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$.*

Definicija 10.4 *Skup vektora $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je* **baza** *skupa slobodnih vektora ukoliko je i linearno nezavisan, i generatoran u skupu slobodnih vektora.*

☞ Najvažnija baza slobodnih vektora je $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Zadatak 10.1 *U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, diskutovati generatornost i linearnu nezavisnost uređenog para vektora $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.*

➥ ***Rešenje:*** Dva vektora u trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora ne mogu biti generatorni za taj prostor.

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mogu a ne moraju biti linerno nezavisni, jer su nezavisni ako i samo ako su nekolinearni. ☑

Zadatak 10.2 *U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, diskutovati generatornost i linearnu nezavisnost uređene trojke vektora $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.*

➥ ***Rešenje:*** Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora i linerno nezavisni i generatorni ako i samo ako su nekoplanarni. ☑

Zadatak 10.3 *U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, diskutovati generatornost i linearnu nezavisnost uređene četvorke vektora $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)$.*

➥ ***Rešenje:*** Četiri vektora u trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora ne mogu biti linearno nezavisni, jer se bar jedan od njih može izraziti preko ostalih.

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ mogu a ne moraju biti generatorni za prostor slobodnih vektora, a generatorni su ako i samo ako su nekoplanarni. ☑

Zadatak 10.4 *U vektorskom prostoru svih slobodnih vektora, diskutovati generatornost i linearnu nezavisnost uređene trojke vektora* $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{0}\right)$.

➥ ***Rešenje:*** Uređena trojka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{0}\right)$ je linearno zavisna jer sadrži nula-vektor. Nula-vektor „ništa ne generiše" te sledi $\mathrm{L}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{0}\right) = \mathrm{L}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, odakle dobijamo da je $\dim\left(\mathrm{L}\left(\vec{a},\vec{b},\vec{0}\right)\right) = \dim\left(\mathrm{L}\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right) \leq 2$, te vektori $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, odnosno $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{0}\right)$ ne mogu da generišu trodimenzionalni prostor slobodnih vektora. ☑

Zadatak 10.5 *Koji od sledećih iskaza implicira linearnu zavisnost ili nezavisnost slobodnih vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*:*

(a) $\vec{a} \parallel \vec{b}$, (b) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, (c) $\vec{a} \perp \vec{b}$, (d) $\vec{a} \not\perp \vec{b}$, (e) $\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0}$.

➥ ***Rešenje:***

(a) Iz $\vec{a} \parallel \vec{b}$ sledi da je $\vec{a} = k\vec{b}$ ili $\vec{b} = k\vec{a}$ za neko $k \in \mathbb{R}$, odnosno da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni.

(b) Iz $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ sledi da je $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\vec{a} \neq k\vec{b}$ i $\vec{b} \neq k\vec{a}$ za svako $k \in \mathbb{R}$, te su tada vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni.

(c) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ne implicira ni zavisnost ni nezavisnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Naime, iz $\vec{a} \perp \vec{b}$ sledi da je ili bar jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak nula-vektoru, ili su $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ takvi da je $\vec{a} \neq k\vec{b}$ i $\vec{b} \neq k\vec{a}$ za svako $k \in \mathbb{R}$. U prvom slučaju su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni, a u drugom nezavisni.

(d) $\vec{a} \not\perp \vec{b}$ takođe ne implicira ni zavisnost ni nezavisnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Npr. $\vec{i} \not\perp 2\vec{i}$ i vektori $\vec{i}$ i $2\vec{i}$ su linearno zavisni (paralelni su), a s druge strane, za bilo koja dva vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\vec{b} \neq \vec{0}$ koji nisu ni paralelni ni ortogonalni važi $\vec{a} \not\perp \vec{b}$ i da su linearno nezavisni.

(e) Svaki skup vektora koji sadrži nula-vektor je linearno zavisan, te su u ovakvom slučaju $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno zavisni vektori. ☑

Zadatak 10.6 *Koji od navedenih iskaza implicira ortogonalnost vektora* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *i* $\vec{b} \neq \vec{0}$*:*

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}$, (b) $\vec{a} \times \vec{b} \nparallel \vec{a}$, (c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$,

(d) $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, (e) $\vec{a}\vec{b} = 0$, (f) $\vec{a}\vec{b} \neq 0$.

➥ ***Rešenje:***

(a) NE. S obzirom da je, po definiciji vektorskog proizvoda, vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ortogonalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jednakost $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}$ može da važi samo u slučaju kada je $\vec{a} = \vec{0}$, i tada bi bilo $\vec{a} \perp \vec{b}$, ali po uslovu zadatka imamo $\vec{a} \neq \vec{0}$.

(b) NE. Na primer, za vektore $\vec{a} = \vec{i}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ imamo $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{k} \nparallel \vec{a}$, a vektori $\vec{a} = \vec{i}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ nisu ortogonalni (zaklapaju ugao $\frac{\pi}{4}$).

(c) NE. Na primer, za vektore $\vec{a}=\vec{i}$ i $\vec{b}=2\vec{i}$ imamo $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\parallel\vec{b}$ i nisu ortogonalni jer ni jedna od njih nije nula-vektor, a pri tome je $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ jer je vektorski proizvod dva paralelna vektora uvek jednak nula-vektoru.

(d) NE. Na primer, za vektore $\vec{a}=\vec{i}$ i $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ imamo $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$ jer zaklapaju ugao $\frac{\pi}{4}$, a vektori $\vec{a}=\vec{i}$ i $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ nisu ortogonalni.

(e) DA, po definiciji skalarnog proizvoda (uključujući i slučaj kada je bar jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak nula-vektoru).

(f) NE. Na primer, vektori $\vec{a}=\vec{i}\neq\vec{0}$ i $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}\neq\vec{0}$ nisu ortogonalni, a važi

$$\vec{a}\vec{b}=\vec{i}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)=\left|\vec{i}\right|^2+\vec{i}\vec{j}=1+0\neq 0.$$

☑

Zadatak 10.7 *Koji od sledećih iskaza implicira nekoplanarnost trojke slobodnih vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$:*

(a) $\vec{a}\neq\vec{0}\ \wedge\ \vec{b}\neq\vec{0}\ \wedge\ \vec{c}\neq\vec{0}$,

(b) $\vec{a}\neq\vec{b}\ \wedge\ \vec{a}\neq\vec{c}\ \wedge\ \vec{b}\neq\vec{c}$,

(c) *nije* $\vec{a}\parallel\vec{b}\parallel\vec{c}$, *tj. nisu svi vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *istog pravca,*

(d) $\vec{a}\nparallel\vec{b}\ \wedge\ \vec{a}\nparallel\vec{c}\ \wedge\ \vec{b}\nparallel\vec{c}$, *tj. svi vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *su različitog pravca,*

(e) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq 0$,

(f) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$,

(g) *vektori* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *su linearno nezavisni.*

➥ ***Rešenje:***

(a) NE, posmatrajmo npr. vektore $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{i}$.

(b) NE, posmatrajmo npr. vektore $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=2\vec{i}$ i $\vec{c}=3\vec{i}$.

(c) NE, posmatrajmo npr. vektore $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$ i $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$ koji svi leže u xOy ravni.

(d) NE, posmatrajmo npr. vektore $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$ i $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$ koji svi leže u xOy ravni.

(e) DA, vidi o mešovitom vektorskom proizvodu $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ na strani 241.

(f) NE, posmatrajmo npr. vektore $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}=\vec{0}$.

(g) DA, jer ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ koplanarni, tada se jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija preostala dva.

☑

Zadatak 10.8 *Neka je $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ uređena trojka vektora takvih da su svaka dva nekolinearna. Diskutovati njihovu linearnu zavisnost i generatornost u prostoru slobodnih vektora.*

➥ ***Rešenje:*** Npr. za $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{k}$ imamo da su svaka dva od ovih vektora nekolinearna, pri čemu su oni i linearno nezavisni i generatorni, dok npr. za $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j}$ imamo da su svaka dva nekolinearna, ali su linearno zavisni i nisu generatorni za prostor slobodnih vektora. ☑

Zadatak 10.9 *Neka je $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ uređena trojka nekoplanarnih slobodnih vektora. Ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(a) *Trojka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ je uvek linearno nezavisna.*

(b) *Trojka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ je uvek linearno zavisna.*

(c) *Postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)$ linearno nezavisna.*

(d) *Postoji takav vektor $\vec{d}$ da je četvorka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)$ linearno zavisna.*

(e) *Za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)$ linearno nezavisna.*

(f) *Za svaki vektor $\vec{d}$ je četvorka vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)$ linearno zavisna.*

(g) *Svaki vektor $\vec{d}$ je linearna kombinacija uređene trojke vektora $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) DA, jer su nekoplanarni. Naime, npr. vektor $\vec{a}$ ne pripada ravni vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$, te se ne može izraziti kao njihova linearna kombinacija.

(b) NE, vidi pod (a).

(c) NE. U trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora, svaka 4 vektora su linearno zavisna.

(d) DA, vidi pod (c).

(e) NE, vidi pod (c).

(f) DA, vidi pod (c).

(g) DA, jer tri nezavisna vektora (vidi pod (a)) $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora čine bazu tog prostora. ☑

Zadatak 10.10 *Neka je $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ uređena trojka komplanarih slobodnih vektora. Diskutovati njihovu linearnu nezavisnost i generatornost u prostoru slobodnih vektora.*

➥ ***Rešenje:*** Ako su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ koplanarni, tada oni generišu ravan ili pravu kojoj pripadaju, te nisu generatorni za prostor slobodnih vektora, a nisu ni linearno nezavisni jer se jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostala dva. ☑

Zadatak 10.11 *Neka je $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ uređena trojka nekolinearnih slobodnih vektora. Diskutovati njihovu linearnu nezavisnost i generatornost u prostoru slobodnih vektora.*

➥ ***Rešenje:*** Npr. vektori $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{k}$ su nekolinearni, linearno su nezavisni i generišu prostor slobodnih vektora, dok su npr. $\vec{a} = \vec{b} = \vec{i}$ i $\vec{c} = \vec{j}$ nekolinearni, ali su linearno zavisni i ne generišu prostor slobodnih vektora. ☑

Zadatak 10.12 *Za date vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ diskutovati po $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ njihovu kolinearnost i ortogonalnost.*

(a) $\vec{a} = (\alpha, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (1, \alpha, \alpha)$.

(b) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, \alpha, \beta)$.

(c) $\vec{a} = (4, 2\alpha, \alpha)$, $\vec{b} = (1, \alpha, -3\alpha)$.

➥ ***Rešenje:***

(a) Iz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha, 1, \alpha) \cdot (1, \alpha, \alpha) = 2\alpha + \alpha^2 = \alpha(2 + \alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \{0, -2\}$$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni za $\alpha \in \{0, -2\}$.

Iz

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha(1-\alpha), \alpha(1-\alpha), (\alpha-1)(\alpha+1)) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (\alpha(1-\alpha) = 0 \ \wedge \ \alpha(1-\alpha) = 0 \ \wedge \ (\alpha-1)(\alpha+1) = 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha = 1$$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni za $\alpha = 1$.

(b) Iz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (1, \alpha, \beta) = 2\alpha + 3\beta + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}, \ \beta \in \mathbb{R}$$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni za $\alpha = -\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}$ i proizvoljno $\beta \in \mathbb{R}$.

Iz

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = (-3\alpha + 2\beta, -\beta + 3, \alpha - 2) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (-3\alpha + 2\beta = 0 \ \wedge \ -\beta + 3 = 0 \ \wedge \ \alpha - 2 = 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (\alpha = 2 \ \wedge \ \beta = 3)$$

sledi da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni za $\alpha = 2$ i $\beta = 3$.

(c) Iz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4, 2\alpha, 1) \cdot (1, \alpha, -3\alpha) = 2\alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} \notin \mathbb{R}$$

sledi da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu ortogonalni ni za jednu vrednost $\alpha \in \mathbb{R}$.

Iz

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha & -3\alpha \end{vmatrix} = (-\alpha(6\alpha+1), 12\alpha+1, 2\alpha) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (-\alpha(6\alpha+1) = 0 \ \wedge \ 12\alpha+1 = 0 \ \wedge \ 2\alpha = 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\alpha \in \left\{-\frac{1}{6}, 0\right\} \ \wedge \ \alpha = -\frac{1}{12} \ \wedge \ \alpha = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \emptyset$$

sledi da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu paralelni ni za jednu vrednost $\alpha \in \mathbb{R}$. ☑

Zadatak 10.13 *Neka je $\vec{r}_M$ vektor položaja tačke M, i $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \ell$. Izraziti vektor $\vec{r}_N$ položaja tačke N u zavisnosti od $\vec{r}_M$, $\vec{p}$ i ℓ, ako je vektor $\vec{p}$ istog pravca kao i vektor $\overrightarrow{MN}$, a suprotnog smera od vektora $\overrightarrow{MN}$.*

➥ ***Rešenje:***

$$\vec{r}_N = \vec{r}_M + \overrightarrow{MN} = \vec{r}_M + \left|\overrightarrow{MN}\right| \frac{\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \vec{r}_M + \ell \frac{\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|} = \vec{r}_M - \ell \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}.$$ ☑

Zadatak 10.14 *Neka je $ABCD$ paralelogram gde je BD njegova dijagonala, neka je S presek dijagonala paralelograma $ABCD$, neka je tačka T težište trougla ABC, i neka je tačka Q težište trougla ABS. Izraziti vektore $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{BT}$ i $\overrightarrow{DQ}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je S_1 sredina duži AB, S_2 sredina duži BC, a R sredina duži S_1B. Duž BS je težišna linija trougla ABC, te je $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS}$ i $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS_2}$. Presek dijagonala polovi dijagonale, te je $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$. Tako dobijamo

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS_2} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS_2}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{2}{3}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

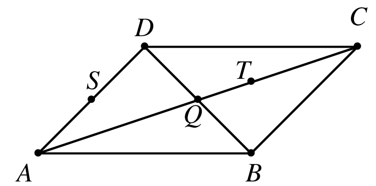
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DQ} &= \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SS_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{S_2B} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) + \frac{1}{3}\left(-\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}.\end{aligned}$$

☑

Zadatak 10.15 *Neka je $ABCD$ paralelogram sa dijagonalama AC i BD, neka je T težište trougla BCD, i neka je S sredina duži AD. Izraziti $\overrightarrow{TS}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je Q presek dijagonala AC i BD. Kako je $TQ = \frac{1}{3}CQ$ (težište trougla deli težišne linije u razmeri 1 : 2) i $CQ = AQ$ (presek dijagonala polovi dijagonale), sledi da je $TA = \frac{2}{3}CA$. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TS} &= \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \\ &= -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}.\end{aligned}$$

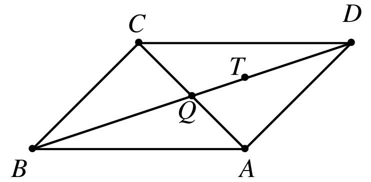


☑

Zadatak 10.16 *Neka je $ABCD$ paralelogram sa dijagonalama AC i BD, a tačka T težište trougla ACD. Izraziti vektor $\overrightarrow{AT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.*

➥ ***Rešenje:*** Kako je $BT = \frac{2}{3}BD$ (vidi zadatak **10.15**), sledi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \\ &= \vec{a} + \frac{2}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$

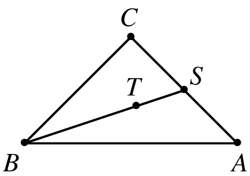


☑

Zadatak 10.17 *U zavisnosti od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_C$ izraziti težište T trougla ABC.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je S sredina duži AC. Kako težište trougla deli težišne linije u odnosu 2 : 1, dobijamo

$$\begin{aligned}\vec{r}_T &= \vec{r}_B + \overrightarrow{BT} = \vec{r}_B + \frac{2}{3}\overrightarrow{BS} = \vec{r}_B + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}\right) = \vec{r}_B + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \\ &= \vec{r}_B + \frac{2}{3}\left((\vec{r}_A - \vec{r}_B) + \frac{1}{2}\left(\vec{r}_C - \vec{r}_A\right)\right) = \vec{r}_B + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{r}_A - \vec{r}_B + \frac{1}{2}\vec{r}_C\right) = \frac{1}{3}\vec{r}_A + \frac{1}{3}\vec{r}_B + \frac{1}{3}\vec{r}_C.\end{aligned}$$

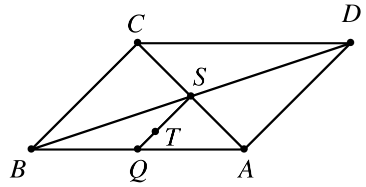


☑

Zadatak 10.18 *Ako je ABCD paralelogram, S presek dijagonala AC i BD i T težište trougla SAB, izraziti $\overrightarrow{DT}$ u zavisnosti od vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$.*

➥ ***Rešenje:*** Neka je Q sredina stranice AB paralelograma. Tada je SQ težišna linija trougla SAB, te je $\overrightarrow{ST} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SQ}$, i pri tome je $\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Tako dobijamo

$$\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \vec{a}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{BC} + \vec{a}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}.$$



☑

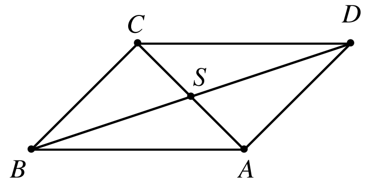
Zadatak 10.19 *Neka je je ABCD paralelogram, gde mu je BD dijagonala, a S presek dijagonala. U zavisnosti od $\vec{r}_S$, $\vec{r}_B$ i $\vec{r}_A$ izraziti vektore položaja tačaka C i D.*

➥ ***Rešenje:***

$\vec{r}_C = \vec{r}_A + \overrightarrow{AC} = \vec{r}_A + 2\overrightarrow{AS} = \vec{r}_A + 2\left(\vec{r}_S - \vec{r}_A\right) = 2\vec{r}_S - \vec{r}_A,$

i analogno

$\vec{r}_D = \vec{r}_B + \overrightarrow{BC} = \vec{r}_B + 2\overrightarrow{BS} = \vec{r}_B + 2\left(\vec{r}_S - \vec{r}_B\right) = 2\vec{r}_S - \vec{r}_B.$



☑

Zadatak 10.20 *Odrediti parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da za $\vec{a} = (1,1,1)$ i $\vec{b} = (0,2,0)$ vektori $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ i $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ budu*
(a) *paralelni,* (b) *ortogonalni.*

➥ ***Rešenje:***

$\vec{p} = \alpha(1,1,1) + 5(0,2,0) = (\alpha, \alpha + 10, \alpha),$

$\vec{q} = 3(1,1,1) - (0,2,0) = (3,1,3).$

(a) $\vec{p} \parallel \vec{q} \;\Leftrightarrow\; \vec{0} = \vec{p} \times \vec{q} = (30 + 2\alpha, 0, -30 - 2\alpha) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (30 + 2\alpha = 0 \wedge -30 - 2\alpha = 0) \;\Leftrightarrow\; \alpha = -15.$

(b) $\vec{p} \perp \vec{q} \;\Leftrightarrow\; 0 = \vec{p} \cdot \vec{q} = 7\alpha + 10 \;\Leftrightarrow\; \alpha = -\frac{10}{7}.$

☑

Zadatak 10.21 *Za koje sve vrednosti realnog parametra a su vektori* $\vec{x} = (a, 1-a, a)$, $\vec{y} = (2a, 2a-1, a+2)$ *i* $\vec{z} = (-2a, a, -a)$ *koplanarni (leže u istoj ravni)?*

➥ ***Rešenje:*** Od raznih potrebnih i dovoljnih uslova za koplanarnost vektora, ovde je najbolje koristiti da su vektori koplanarni ako i samo ako je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] = \begin{vmatrix} a & 1-a & a \\ 2a & 2a-1 & a+2 \\ -2a & a & -a \end{vmatrix} \overset{[1]}{=} \begin{vmatrix} -a & 1 & a \\ -4 & 3a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \overset{[2]}{=} -a \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -4 & 3a+1 \end{vmatrix}$$
$$= a\left(3a^2 + a - 4\right) = a(a-1)\left(a + \frac{4}{3}\right),$$

[1] - Treću kolonu dodamo na drugu, i treću kolonu pomnoženu sa -2 dodamo na prvu.

[2] - Razvijamo po trećoj vrsti.

te su vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$ i $\vec{z}$ koplanarni sa

$$[\vec{x},\vec{y},\vec{z}] == a(a-1)\left(a + \frac{4}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\{0, 1, -\frac{4}{3}\right\}.$$ ☑

Zadatak 10.22 *Izračunati visinu paralelopipeda određenog vektorima* $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$, $\vec{c} = (-1, 3, 5)$, *pri čemu je osnova paralelopipeda određena sa* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

➥ ***Rešenje:*** Obeležimo redom sa V, P, h zapreminu, površinu osnove i visinu paralelopipeda. Koristeći poznatu formulu za zapreminu paralelopipeda kao i geometrijsku interpretaciju mešovog i vektorskog proizvoda dobijamo

$$V = P \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{P} = \frac{\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|},$$

gde je

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = |(2,2,1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$$

te je $h = \dfrac{9}{3} = 3$. ☑

Zadatak 10.23 *Neka su* A_1, B_1 *i* C_1 *redom sredine stranica* $[BC]$, $[AC]$ *i* $[AB]$ *trougla* $\triangle ABC$. *Dokazati da je* $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

➥ ***Rešenje:*** Neka je $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ i $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, pri čemu je tada $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$. Sabirajući vektore

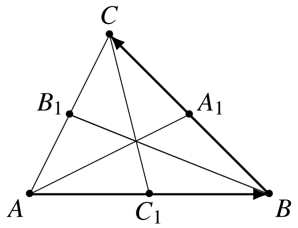
$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC_1}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$,

dobijamo

$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)\vec{b}=\vec{0}.$



☑

Zadatak 10.24 *Dati su u prostoru trougao $\triangle ABC$ i tačka O. Neka je T težište trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je*

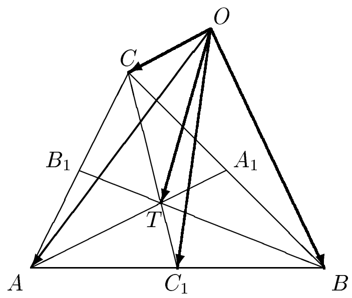
$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

➥ ***Rešenje:*** Koristeći zadatak **??** imamo da je

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{OT}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{A_1A}$,

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{OT}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}$,

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{OT}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{C_1C}$.



Sabirajući ove jednakosti dobijamo

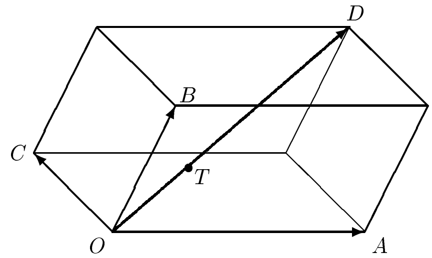
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OT}+\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{C_1C}\right)=3\overrightarrow{OT}+\vec{0}$,

odakle, delenjem sa 3, sledi tvrđenje. ☑

Zadatak 10.25 *Dat je paralelopiped određen vektorima $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, i neka je $\overrightarrow{OD}$ njegova telesna dijagonala. Dokazati da $\overrightarrow{OD}$ seče ravan trougla $\triangle ABC$ u težištu T trougla $\triangle ABC$, i da je $\left|\overrightarrow{OT}\right|:\left|\overrightarrow{OD}\right|=1:3$.*

➥ ***Rešenje:***

Na osnovu zadatka **10.24** je
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OT}$,
što znači da su vektori $\overrightarrow{OT}$ i $\overrightarrow{OD}$ istog pravca i smera, i vektor $\overrightarrow{OD}$ je 3 puta duži od vektora $\overrightarrow{OT}$, a iz toga slede oba tvrđenja zadatka.



☑

Zadatak 10.26 *Neka je T težište trougla $\triangle ABC$. Dokazati da je*

$$[AB]^2 + [AC]^2 + [BC]^2 = 3\Big([AT]^2 + [BT]^2 + [CT]^2\Big).$$

➥ ***Rešenje:*** Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Pri tome je tada $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Koristeći

$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \frac{2}{3}\Big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}\Big) = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{BT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = \frac{2}{3}\Big(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}\Big) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = \frac{2}{3}\Big(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1}\Big) = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$,

dobijamo

$$[AB]^2 + [AC]^2 + [BC]^2 = 3\Big([AT]^2 + [BT]^2 + [CT]^2\Big) \iff$$

$$\iff \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 3\left(\left|\overrightarrow{AT}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BT}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CT}\right|^2\right) \iff$$

$$\iff \vec{a}^2 + \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 + \vec{b}^2 = 3\left(\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right)^2\right) \iff$$

$$\iff \vec{a}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{b}^2 =$$
$$= 3\left(\frac{4}{9}\vec{a}^2 + \frac{4}{9}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{b}^2 - \frac{1}{9}\vec{a}^2 - \frac{2}{9}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{9}\vec{b}^2 + \frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{4}{9}\vec{a}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{b}^2\right) \iff$$

$$\iff 2\Big(\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2\Big) = 3\left(\frac{2}{9}\vec{a}^2 + \frac{2}{9}\vec{a}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{b}^2\right),$$

a poslednja jednakost je očigledno tačna, pa je tačna i njoj ekvivalentna polazna jednakost. ☑

Glava 11

Vektorski prostori

Definicija 11.1 *Uređena četvorka* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *se naziva* ***vektorski prostor nad poljem*** $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ *ako je* $+ : V^2 \to V$ *(binarna operacija skupa* V*),* $\cdot : F \times V \to V$*, i važe sledeće aksiome:*

V_1 : $(V, +)$ *je komutativna grupa.*

V_2 : $\forall \alpha \in F, \forall x, y \in V, \ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$

V_3 : $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V, \ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot y.$

V_4 : $\forall \alpha, \beta \in F, \forall x \in V, \ (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$

V_5 : $\forall x \in V, \ 1 \cdot x = x$*, gde je* 1 *neutralni element operacije* $\cdot$ *polja* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$.

✎ Operaciju $+ : V^2 \to V$ nazivamo ***sabiranjem vektora***, elemente polja $\mathbf{F}$ tj. skupa F nazivamo ***skalarima***, a operacija $\cdot : F \times V \to V$ je tzv. ***množenje vektora skalarom***.

✎ Neutralni element grupe $(V, +)$ nazivamo ***nula-vektorom*** i označavamo sa $\mathbb{O}$ ili $\vec{0}$.

☞ Uočimo da u vektorskom polju imamo 4 operacije:

- operacju $+$ sabiranja skalara iz polja $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$,
- operaciju $\cdot$ množenja skalara iz polja $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$,
- operaciju $+$ sabiranja vektora iz komutativne grupe $(V, +)$,
- operaciju $\cdot : F \times V \to V$ množenja vektora skalarom.

Definicija 11.2 *Uređena četvorka* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *je* ***potprostor*** *vektorskog prostora* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *ako je* $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$*, operacije* $+$ *i* $\cdot$ *iz* $\mathbf{V}_1$ *su restrikcije operacija* $+$ *i* $\cdot$ *iz* $\mathbf{V}$*, i* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *je vektorski prostor.*

☞ Potprostor je vektorski prostor nad istim poljem kao i polazni vektorski prostor.

☞ Nula-vektor vektorskog prostora je i nula-vektor svakog njegovog potprostora.

☞ Svaki vektorski prostor $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ ima bar dva, tzv. trivijalna potprostora. Naime, on je sam sebi potprostor, a takođe mu je potprostor i ***nula-prostor*** $(\{\mathbb{O}\}, \mathbf{F}, +, \cdot)$ čiji je jedini element nula-vektor.

☞ U skupu svih vektorskih prostora, relacija „biti potprostor" je relacija poretka. To znači i da ako je $\mathbf{V}_1$ potprostor od $\mathbf{V}_2$, a $\mathbf{V}_2$ potprostor od $\mathbf{V}_3$, tada je $\mathbf{V}_1$ potprostor od $\mathbf{V}_3$.

Teorema 11.1 *Ako je $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$, i ako je $\emptyset \neq W \subseteq V$, tada je $\mathbf{W} = (W, \mathbf{F}, +, \cdot)$ podprostor prostora $\mathbf{V}$ ako i samo ako za sve $\alpha, \beta \in F$ i sve $x, y \in W$ važi $\alpha x + \beta y \in W$.*

Neka je nadalje $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$.

Definicija 11.3 *Neka je $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F}$, neka je $n \in \mathbb{N}$, i $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uređena n-torka vektora iz prostora $\mathbf{V}$, i neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$ skalari iz polja $\mathbf{F}$. Vektor $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \in V$ se naziva* **linearna kombinacija** *n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

Definicija 11.4 *Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prostora $\mathbf{V}$ nad poljem $\mathbf{F}$ se naziva* **lineal** *n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, i označavamo ga sa $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dakle,*

$$\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

Teorema 11.2 *Lineal $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ iz vektorskog prostora $\mathbf{V}$ je potprostor prostora $\mathbf{V}$.*

Definicija 11.5 *Neka n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je* **linearno zavisna** *ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takvi da je bar jedan od njih različit od nule i*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n = \mathbb{O}$$

Neka n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je **linearno nezavisna** *ako nije linearno zavisna.*

Proizvoljna n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno zavisna ako i samo ako je bar jedan od njenih vektora linearna kombinacija preostalih. n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna ako i samo ako njena linearna kombinacija je nula vektor jedino kada su svi skalari jednaki nuli. n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisna ako i samo ako se nijedan od vektora te n-torke ne može izraziti kao linearna kombinacija preostalih.

✎ Za skup od n različitih vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se kaže da je linearno zavisan ili nezavisan ako je n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno zavisna odnosno nezavisna.

Definicija 11.6 *Uređena n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ iz vektorskog prostora $\mathbf{V}$* **generiše** *prostor $\mathbf{V}$, tj.* **generatorna je za** $\mathbf{V}$ *ako se svaki vektor iz V može predstaviti kao linearna kombinacija n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tj. ako je $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = V$.*

Definicija 11.7 *Za n-torku vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ iz vektorskog prostora $\mathbf{V}$ kažemo da je* **baza** *prostora $\mathbf{V}$ ako je n-torka B linearno nezavisna i generiše prostor $\mathbf{V}$.*

✎ Za skup od n različitih vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se kaže da je baza vektorskog prostora ako je n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza tog vektorskog prostora.

Teorema 11.3 *Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ je baza prostora $\mathbf{V}$ ako i samo ako se svaki vektor prostora $\mathbf{V}$ na jedinstven način može pretstaviti kao linearna kombinacija vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.*

Teorema 11.4 *Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ je baza prostora $\mathbf{V}$ ako i samo ako je ona maksimalna linearno nezavisna n-torka vektora u $\mathbf{V}$.*

Teorema 11.5 *Uređena n-torka vektora $B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ je baza prostora $\mathbf{V}$ ako i samo ako je ona minimalna generatorna n-torka vektora prostora $\mathbf{V}$.*

Proizvoljne dve baze $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ imaju isti broj vektora, tj. $n = m$, i broj n se naziva ***dimenzija vektorskog prostora*** $\mathbf{V}$. Pišemo $\dim V = n$.

✎ Ako za proizvoljnu bazu $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ i proizvoljan vektor $x \in V$ važi $x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, gde su skalari α_i jednoznačno određeni, tada je $x_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ tzv. ***prezentacija vektora*** x ***u bazi*** A.

☞ Nula-vektor „ništa ne generiše” osim samog nula vektora i nula-prostora, te za svaki skup vektora $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ važi $\mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n, \mathbb{O}) = \mathrm{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. S druge strane, po definiciji se lako proverava da je svaki skup vektora koji sadrži i nula-vektor, lenearno zavisan.

Slede neki najvažniji primeri vektorskih prostora, potprostora i njihovih baza.

Primer 11.1 *Osnovni primer vektorskog prostora je takozvani realan Euklidov prostor $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ uređenih n-torki realnih brojeva nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, gde su operacije sabiranja vektora $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i množenja vektora skalarom $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definisane sa $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$ i $\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$ (primetimo da su istim simbolima označene operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom s jedne strane, i sabiranja i množenja elemenata polja realnih brojeva, ali je iz konteksta uvek jasno kojoj se od tih različitih operacija radi; npr. ako znak + stoji između dva vektora, tj. elementa skupa $\mathbb{R}^n$, tada se radi o operaciji sabiranja vektora tj. uređenih n-torki, a ako znak + stoji između dva realna broja, tada se radi o operaciji sabiranja skalara tj. realnih brojeva). Operacija sabiranja vektora je definisana preko sabiranja komponenti vektora, a množenje vektora skalarom je definisana preko množenja komponenti tim skalarom pa lako sledi da je $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ vektorski prostor.*

(a) *Uređeni par $(\mathbb{R}^n, +)$ je komutativna grupa.*

  (a.1) *Zatvorenost operacije sabiranja vektora sledi iz zatvorenosti sabiranja realnih brojeva.*

  (a.2) *Asocijativnost operacije sabiranja vektora sledi iz asocijativnosti sabiranja realnih brojeva.*

(a.3) *Neutralni element za sabiranje vektora je nula-vektor* $\mathbb{O} = (0,\dots,0)$ *jer je broj* 0 *neutralni element za sabiranje realnih brojeva.*

(a.4) *Inverzni element vektora* $(a_1,\dots,a_n)$ *pri sabiranju vektora je „suprotni" vektor* $-(a_1,\dots,a_n) = (-a_1,\dots,-a_n)$ *jer je inverzni element broja* a_i *pri sabiranju realnih brojeva* $-a_i$.

(a.5) *Komutativnost operacije sabiranja vektora sledi iz komutativnosti sabiranja realnih brojeva.*

(b) $\forall\alpha \in \mathbb{R},\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$

sledi iz distributivnosti s leva množenja prema sabiranju realnih brojeva.

(c) $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$

sledi iz distributivnosti s desna množenja prema sabiranju realnih brojeva.

(d) $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\cdot\beta)\cdot x$

sledi iz asocijativnosti množenja realnih brojeva.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 1\cdot x = x$

jer je 1 *neutralni element za množenje realnih brojeva (komponenti vektora).*

Jedna, najvažnija baza ovog n-dimenzionalnog vektorskog prostora je takozvana **standardna baza** $E = (e_1,e_2,e_3,\dots,e_n)$, *gde je* $e_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,\dots,0,0),\dots,\ e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$.

Još jedna baza ovog prostora je npr. $B = (b_1,b_2,b_3,\dots,b_n)$, *gde je* $b_1 = (1,1,1,\dots,1,1)$, $b_2 = (0,1,1,\dots,1,1)$, $b_3 = (0,0,1,\dots,1,1),\dots,\ b_n = (0,0,0,\dots,0,1)$. ✔

Primer 11.2 *Slično kao i u prethodnom primeru se i za sledeće uređene četvorke dokazuje da su vektorski prostori.*

(1) $\mathbb{Q}^n = (\mathbb{Q}^n,\mathbb{Q},+,\cdot)$ *je n-dimenzionalan vektorski prostor sa „standardnom bazom"* $E = (e_1,e_2,e_3,\dots,e_n)$, *gde je* $e_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,\dots,0,0),\dots,\ e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$.

(2) $(\mathbb{R}^n,\mathbb{Q},+,\cdot)$ *je beskonačnodimenzionalan vektorski prostor. Vektorski prostor* $\mathbb{Q}^n$ *je njegov podprostor.*

(3) $\mathbb{C}^n = (\mathbb{C}^n,\mathbb{C},+,\cdot)$ *je n-dimenzionalan vektorski prostor sa „standardnom bazom"* $E = (e_1,e_2,e_3,\dots,e_n)$, *gde je* $e_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,\dots,0,0),\ \dots,\ e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$.

(4) $(\mathbb{C}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$ *je* $2n$*-dimenzionalan vektorski prostor sa „standardnom bazom"* $\tilde{E} = \left(\tilde{e}_1,\tilde{e}'_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}'_2,\dots\tilde{e}_n,\tilde{e}'_n\right)$, *gde je* $\tilde{e}_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$, $\tilde{e}'_1 = (\mathbb{i},0,0,\dots,0,0)$, $\tilde{e}_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$, $\tilde{e}'_2 = (0,\mathbb{i},0,\dots,0,0),\ \dots,\ \tilde{e}_n = (0,0,0,\dots,0,1)$, $\tilde{e}'_n = (0,0,0,\dots,0,\mathbb{i})$.

Vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ *je njegov podprostor.*

(5) $(\mathbb{C}^n,\mathbb{Q},+,\cdot)$ *je beskonačnodimenzionalan vektorski prostor.* $(\mathbb{R}^n,\mathbb{Q},+,\cdot)$ *i* $\mathbb{Q}^n$ *su njegovi podprostori.*

(6) *Neka je* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ *proizvoljno polje sa nulom* $\mathbb{0}$ *i jedinicom* $\mathbb{1}$, *i neka su operacije* $\oplus : F^n \times F^n \to F^n$ *i* $\odot : F \times F^n \to F^n$ *definisane sa*

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \oplus (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$,

$\alpha \odot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \ldots, \alpha \cdot a_n)$.

Uređena četvorka $\mathbf{F}^n = (F^n, \mathbf{F}, \oplus, \odot)$ *je n-dimenzionalni vektorski prostor. Njegovu „standardnu bazu" čini skup vektora* $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, *gde je*
$e_1 = (\mathbb{1}, \mathbb{0}, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \mathbb{0})$, $e_2 = (\mathbb{0}, \mathbb{1}, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \mathbb{0})$, ..., $e_n = (\mathbb{0}, \mathbb{0}, \mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \mathbb{1})$.
Vektorski prostori $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{Q}^n$ *su vektorski prostori ovog tipa.* ✔

Primer 11.3 *Slede primeri vektorskih prostora funkcija.*

(1) *Vektorski prostor svih realnih funkcija nad poljem realnih brojeva je uređena četvorka* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}, \oplus, \odot\right)$, *gde je* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *skup svih funkcija iz* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}$, *operacije sabiranja vektora (funkcija)* $\oplus$ *i množenja vektora (funkcija) skalarom* $\odot$ *su definisane na uobičajen način:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ (\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

za sve $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *i svako* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Sve aksiome se lako proveravaju, vidi zadatak* **6.27**.

(a) *Uređeni par* $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \oplus\right)$ *je Abelova grupa jer*

- $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \oplus g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,
- $\forall f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ (f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$,
- *neutralni element je funkcija* $\mathbb{0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *definisana sa* $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{0}(x) = 0$,
- *za svako* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *postoji inverzni element tj. funkcija* $\ominus f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *definisana sa* $\forall x \in \mathbb{R},\ (\ominus f)(x) = f(x)$,
- $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \oplus g = g \oplus f$.

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \alpha \odot (f \oplus g) = (\alpha \odot f) \oplus (\alpha \odot g)$.

(c) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ (\alpha + \beta) \odot f = (\alpha \odot f) \oplus (\beta \odot f)$.

(d) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \alpha \odot (\beta \odot f) = (\alpha \cdot \beta) \odot f$.

(e) $\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ 1 \odot f = f$.

Ovaj vektorski prostor je beskonačnodimenzionalan.

(2) *Skup neprekidnih realnih funkcija* $C(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \;\middle|\; f \text{ je neprekidna funkcija} \right\}$ *sa restrikcijama operacija iz primera* (1) *čini jedan beskonačnodimenzionalan potprostor prostora* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(3) *Skup realnih polinomskih funkcija sa restrikcijama operacija iz primera* (1) *čini takođe jedan beskonačnodimenzionalan potprostor prostora iz primera* (1) *i* (2), *i ovaj vektorski prostor je izomorfan sa vektorskim prostorom* $\mathbb{R}[x]$ *iz primera* **??** *pod* (1), *npr. preko izomorfizma koji svaki polinom iz* $\mathbb{R}[x]$ *preslikava u njegovu odgovarajuću polinomsku funkciju. Zbog toga poistovećujemo ova dva vektorska prostora. Analogno, vektorski prostor realnih polinomskih funkcija stepena ne većeg od n, koji je potprostor prostora polinomskih funkcija je izomorfan sa vektorskim prostorom* $\mathbb{R}_n[x]$ *iz primera* **??** *pod* (2).

(4) *Skup realnih nizova* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ *sa operacijama definisanim na isti način kao u ovom primeru pod* (1)*, čini jedan beskonačnodimenzionalan vektorski prostor. Ovaj je vektorski prostor izomorfan sa vektorskim prostorom svih polinoma nad poljem* $\mathbb{R}$ *iz primera* **??** *pod* (1)*, kao i sa vektorskim prostorm iz ovog primera pod* (3)*.*

(5) *Analogno se konstruiše i vektorski prostor kompleksnih funkcija* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *nad poljem kompleksnih brojeva, kao i vektorski prostor funkcija* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *nad poljem racionalnih brojeva, kao i vektorski prostor svih funkcija* $f : F \to F$ *nad proizvoljnim poljem* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$*.* ✔

Primer 11.4 *Za skup slobodnih vektora* V*, i operacije* $+$ *sabiranja slobodnih vektora i* $\cdot$ *množenja slobodnih vektora realnim brojem (vidi poglavlje o slobodnim vektorima), uređena četvorka* $\mathbf{V} = (V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva. Ovaj vektorski prostor je dimenzije* 3*, a njegova standardna, tzv. ortonormirana baza je* $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$*. Svaka dva vektora ove baze su uzajamno ortogonalna, i svaki je dužine* 1*. Vektorski prostor slobodnih vektora je izomorfan sa vektorskim prostorom* $\mathbb{R}^3$*, npr. preko izomorfizma* $\varphi : V \to \mathbb{R}^3$*,* $\varphi\left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}\right) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$*. Stoga ove vektorske prostore često poistovećujemo, i govorimo o* $\mathbb{R}^3$ *misleći na* $\mathbf{V}$*, i obratno.* ✔

Zadatak 11.1 *Ispitati koji od navedenih iskaza su tačni u proizvoljnom vektorskom prostoru* $(V, F, +, \cdot)$ *nad proizvoljnim poljem* F*.*

(1) $\forall x, y \in V,\ \forall \alpha \in F,\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(2) $\forall x, y, z \in V,\ (x + y) + z = x + (y + z)$.

(3) $\forall x, y, z \in V,\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(4) $\forall x \in V,\ x + x = x$.

(5) *Za svako* $x \in V$ *i svako* $\alpha \in F \setminus \{0\}$ *su vektori* x *i* $\alpha \cdot x$ *linearno nezavisni.*

(6) *Za svako* $x \in V$ *i svako* $\alpha \in F \setminus \{0\}$ *su vektori* x *i* $\alpha \cdot x$ *linearno zavisni.*

(7) *Za svaki vektor* $x \in V$ *je uređena* 4*-orka* $(\{\alpha x \mid \alpha \in F\}, F, +, \cdot)$ *potprostor prostora* $(V, F, +, \cdot)$*.*

(8) $\forall x \in V,\ 1 \cdot x = x$.

(9) $\forall x, y \in V,\ x + y = y + x$.

(10) $\forall x \in V,\ \forall \alpha, \beta \in F,\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(11) $\forall x \in V,\ \forall \alpha \in F,\ \exists y \in V,\ \alpha y = x$.

(12) $\forall x \in V,\ \forall \alpha \in F,\ (-\alpha)x = -(\alpha x)$.

(13) $\forall x \in V,\ 0 \cdot x = \mathbb{O}$.

➥ ***Rešenje:***

(1) DA, ovo je jedna od aksioma vektorskih prostora.

(2) DA, ovo je jedna od aksioma vektorskih prostora, jer je uređeni par $(V, +)$ komutativna grupa.

(3) NE, jer je $\cdot$ operacija množenja vektora skalarom, a ne množenja vektora (u vektorskom prostoru ne postoji množenje vektora).

(4) NE, jer je uređeni par $(V, +)$ proizvoljna komutativna grupa u kojoj zakon idempotentnosti ne važi.

(5) NE. Naime, za $\alpha \neq 0$ imamo $(-\alpha) \cdot x + 1 \cdot (\alpha \cdot x) = -(\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot x) = \mathbb{O}$, te su vektori x i $\alpha \cdot x$ po definiciji linearno zavisni.

(6) DA, dokazali smo pod (5).

(7) DA, jer je $(\{\alpha x \mid \alpha \in F\}, F, +, \cdot) = \mathrm{L}(x)$, a po teoremi 11.2 je vektorski prostor, tj. potprostor od $(V, F, +, \cdot)$.

(8) DA, ovo je jedna od aksioma vektorskih prostora.

(9) DA, ovo je jedna od aksioma vektorskih prostora, jer je uređeni par $(V, +)$ komutativna grupa.

(10) DA, ovo je jedna od aksioma vektorskih prostora.

(11) NE. Za $\alpha = 0$ i $x \neq \mathbb{O}$, imamo da za svako $y \in V$ je $\alpha y = \mathbb{O} \neq x$. Vidimo da je ovaj iskaz tačen samo za nula-prostor (čiji je jedini element nula-vektor).

(12) DA, ovo je jedna od teorema vektorskih prostora.

(13) DA, ovo je jedna od teorema vektorskih prostora. ☑

Zadatak 11.2 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$, ispitati linearnu zavisnost i generatornost sledećih skupova vektora.*

(1) $b_1 = (0,0,1)$, $b_2 = (0,1,0)$, $b_3 = (1,0,0)$.

(2) $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (0,-1,0)$.

(3) $b_1 = (0,0,1)$, $b_2 = (0,1,0)$, $b_3 = (1,0,0)$, $b_4 = (1,2,3)$.

(4) $b_1 = (0,0,2)$, $b_2 = (0,2,0)$, $b_3 = (-1,0,0)$, $b_4 = (1,2,3)$.

(5) $b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (1,0,0)$, $b_3 = (0,2,0)$, $b_4 = (0,0,3)$.

(6) $b_1 = (0,3,0)$.

(7) $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (2,2,2)$, $b_3 = (3,3,3)$.

(8) $b_1 = (1,2,3)$, $b_2 = (4,5,6)$, $b_3 = (7,8,9)$, $b_1 = (-3,5,-9)$.

(9) $b_1 = \mathbb{O} = (0,0,0)$.

(10) $b_1 = (0,0,3)$, $b_2 = \mathbb{O} = (0,0,0)$.

(11) $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (2,2,0)$, $b_3 = (3,0,0)$.

(12) $b_1 = (1,2,0)$, $b_2 = (1,1,0)$, $b_3 = (2,-1,1)$.

(13) $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (2,0,2)$.

(14) $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (2,2,2)$.

(15) $b_1 = (0,1,0)$, $b_2 = (0,2,0)$.

(16) $b_1 = (0,0,2)$, $b_2 = (0,0,0)$, $b_3 = (3,0,0)$.

➥ ***Rešenje:*** U svakom od ovih primera, posmatrajmo matricu B čije su kolone redom komponente zadanih vektora. Zadatak možemo rešiti ispitivanjem ranga matrice B i upoređivanjem sa brojem zadanih vektora i dimenzijom 3 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ (vidi komentar na strani **??**).

(1) $$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1: & b_2: & b_3: \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right| \end{array} = -1 \neq 0,$$

te sledi da je skup vektora $\{b_1, b_2, b_3\}$ i linearno nezavisan, i generatoran za prostor $\mathbb{R}^3$.

(2) Za skup vektora $b = \{b_1, b_2\}$ i matricu $B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} b_1: & b_2: \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$

je $\operatorname{rang} B = 2 = |b|$, te sledi da je skup vektora b linearno nezavisan, ali nije generatoran za prostor $\mathbb{R}^3$, jer 2 vektora ne mogu da gererišu 3-dimenzionalan prostor.

(3) Skup vektora $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ nije linearno nezavisan jer je $|b| = 4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3$ (uočimo da je npr $b_4 = 3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$). Generatoran za $\mathbb{R}^3$ jeste jer je $b \supseteq \{b_1, b_2, b_3\}$, a pod (1) smo videli da skup $\{b_1, b_2, b_3\}$ generiše $\mathbb{R}^3$.

(4) Iz istih razloga kao u (3) je skup $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ linearno zavisan i generatoran. Naime, i u ovom primeru $\{b_1, b_2, b_3\}$ generišu $\mathbb{R}^3$ jer je

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1: & b_2: & b_3: \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array}\right| \end{array} = 4 \neq 0.$$

(5) Iz istih razloga kao u (4) je skup $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ linearno zavisan i generatoran. Naime, i u ovom primeru $\{b_2, b_3, b_4\}$ generišu $\mathbb{R}^3$ jer je

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_2: & b_3: & b_4: \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right| \end{array} = 6 \neq 0.$$

(6) Kako skup $b = \{b_1\}$ ima za element samo jedan nenula-vektor, po definiciji se lako vidi da je on linearno nezavisan jer je $\alpha b_1 = \mathbb{O}$ samo za $\alpha = 0$. Nije generatoran za $\mathbb{R}^3$ jer je $\dim(\mathrm{L}(b_1)) = 1 \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(7) Kako je $b_2 = 2b_1$ i $b_3 = 3b_1$, tj. vektori b_2 i b_3 se mogu izraziti preko vektora b_1, sledi je skup $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ linearno zavisan, kao i da je $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) = \mathrm{L}(b_1)$, odakle sledi da je $\dim(\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)) = \dim(\mathrm{L}(b_1)) = 1 \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$, te skup b nije generatoran za $\mathbb{R}^3$.

(8) Skup $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ je linearno zavisan jer je $|b| = 4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Kako za matricu

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1: & b_2: & b_3: & b_4: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & 5 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -9 \end{bmatrix} \end{array} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \end{bmatrix} \overset{[3]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & -3 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & -22 & 0 \end{bmatrix}$$

iz trougaonog oblika sledi $\dim(\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3, b_4)) = \operatorname{rang} B = 3$, zaključujemo da je $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3, b_4) = \mathbb{R}^3$, te su vektori skupa b generatorni za $\mathbb{R}^3$.

[1] - Prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj, i prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodajemo trećoj.

[2] - Drugu vrstu pomnoženu sa -2 dodajemo trećoj.

[3] - Zamenjujemo treću i četvrtu kolonu.

(9) Nula-vektor generiše samo trivijalni nula-prostor, i svaki skup vektora koji sadrži nula-vektor je linearno zavisan, te je skup $\{\mathbb{O}\}$ linearno zavisan, i on pri tome ne generiše $\mathbb{R}^3$.

(10) Skup $b = \{b_1, b_2\}$ koji sadrži nula-vektor je linearno zavisan, i nije generatoran za $\mathbb{R}^3$ jer je $\dim(\mathrm{L}(b_1, b_2)) = \dim(\mathrm{L}(b_1)) = 1 < 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

(11) $$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1: & b_2: & b_3: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -6 \neq 0,$$

te sledi da je skup vektora $\{b_1, b_2, b_3\}$ i linearno nezavisan, i generatoran za prostor $\mathbb{R}^3$.

(12) Neka je $b = \{b_1, b_2, b_3\}$. Kako za matricu

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1: & b_2: & b_3: \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iz trougaonog oblika sledi $\dim(\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)) = \operatorname{rang} B = 3 = |\{b_1, b_2, b_3\}|$, zaključujemo da je $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$, te su vektori skupa b generatorni za $\mathbb{R}^3$, a takođe i linearno-nezavisni jer je rang matrice B jednak broju vektora u skupu b.

[1] - Prvu vrstu pomnoženu sa -2 dodajemo drugoj.

(13) Dva vektora ne mogu da generišu trodimenzionalan prostor $\mathbb{R}^3$. Vektori b_1 i b_2 su linearno nezavisni jer se ne mogu izraziti jedan preko drugog. Naime, očigledno, niti je $b_1 = \alpha b_2$ tj. $(1, 0, 0) = (2\alpha, 0, 2\alpha)$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$, niti je $b_2 = \alpha b_1$ tj. $(2, 0, 2) = (\alpha, 0, 0)$ za neko $\alpha \in \mathbb{R}$.

(14) Kako je $b_2 = 2 \cdot b_1$, sledi da su vektori b_1 i b_2 linearno zavisni, a ne generišu trodimenzionalan prostor $\mathbb{R}^3$ jer je $\dim(\mathrm{L}(b_1, b_2)) = \dim(\mathrm{L}(b_1)) = 1$.

(15) Kako je opet $b_2 = 2 \cdot b_1$, sledi da su vektori b_1 i b_2 linearno zavisni i ne generišu trodimenzionalan prostor $\mathbb{R}^3$.

(16) Skup $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ sadrži nula-vektor, te je on linearno zavisan, i pri tome je $\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3) = \mathrm{L}(b_1, b_3)$ jer nula-vektor „ništa ne generiše" osim samog nula-vektora. Kako je $\dim(\mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)) = \dim(\mathrm{L}(b_1, b_3)) \leq 2 < \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$, vektori b_1 i b_3 ne generišu $\mathbb{R}^3$. ☑

Zadatak 11.3 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$, ako je moguće, izraziti*

(1) *vektor $x = (-1,3,8)$ preko, odnosno kao linearnu kombinaciju vektora $a = (1,0,1)$ i $b = (-1,1,2)$,*

(2) *vektor $x = (-1,3,1)$ preko vektora $a = (1,0,1)$ i $b = (-1,1,2)$,*

(3) *vektor $x = (1,1,1)$ preko vektora $a = (1,0,1)$, $b = (-1,1,2)$ i $c = (-1,3,1)$,*

(4) *vektor $x = (1,1,1)$ preko vektora $a = (1,0,1)$, $b = (-1,1,2)$ i $c = (-1,3,8)$,*

(5) *vektor $x = (-2,4,10)$ preko vektora $a = (1,0,1)$, $b = (-1,1,2)$ i $c = (-1,3,8)$.*

➥ ***Rešenje:***

(1) $x = \alpha a + \beta b \;\Leftrightarrow\; (-1,3,8) = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha + 2\beta) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} -1 & = & \alpha & - & \beta \\ 3 & = & & & \beta \\ 8 & = & \alpha & + & 2\beta \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} -1 & = & \alpha & - & \beta \\ 3 & = & & & \beta \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \beta = 3 \\ \alpha = 2 \end{array}}$$

(prvu jednačinu smo oduzeli od treće, a zatim drugu pomnoženu sa -3 dodali trećoj). Dakle, $x = 2a + 3b$.

☞ Dobijeni rezultat nam govori da $x \in \mathrm{L}(a,b)$.

(2) $x = \alpha a + \beta b \;\Leftrightarrow\; (-1,3,8) = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha + 2\beta) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} -1 & = & \alpha & - & \beta \\ 3 & = & & & \beta \\ 1 & = & \alpha & + & 2\beta \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcr} -1 & = & \alpha & - & \beta \\ 3 & = & & & \beta \\ -7 & = & 0 & & \end{array}} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \emptyset$$

(prvu jednačinu smo oduzeli od treće, a zatim drugu pomnoženu sa -3 dodali trećoj). Dakle, gornji sistem jednačina po α i β nema rešenja, te vektor x ne može da se izrazi preko vektora a i b.

☞ Dobijeni rezultat nam govori da $x \notin \mathrm{L}(a,b)$.

(3) $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$\Leftrightarrow\; (1,1,1) = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) + \gamma(-1,3,1) = (\alpha - \beta - \gamma, \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta + \gamma)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & \alpha & - & \beta & - & \gamma \\ 1 & = & & & \beta & + & 3\gamma \\ 1 & = & \alpha & + & 2\beta & + & \gamma \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & \alpha & - & \beta & - & \gamma \\ 1 & = & & & \beta & + & 3\gamma \\ -3 & = & & & & - & 7\gamma \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \; (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

(prvu jednačinu smo oduzeli od treće, a zatim drugu pomnoženu sa -3 dodali trećoj). Dakle, $x = \frac{8}{7}a - \frac{2}{7}b + \frac{3}{7}c$.

☞ Dobili smo da se vektor x na jedinstven način pretstavlja preko vektora a, b i c jer vektori a, b i c čine jednu bazu prostora $\mathbb{R}^3$.

(4) $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$\Leftrightarrow$ $(1,1,1) = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) + \gamma(-1,3,8) = (\alpha - \beta - \gamma, \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta + 8\gamma)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & \alpha & - & \beta & - & \gamma \\ 1 & = & & & \beta & + & 3\gamma \\ 1 & = & \alpha & + & 2\beta & + & 8\gamma \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & \alpha & - & \beta & - & \gamma \\ 1 & = & & & \beta & + & 3\gamma \\ -3 & = & 0 & & & & \end{array}}$$

$\Leftrightarrow$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in \emptyset$

(prvu jednačinu smo oduzeli od treće, a zatim drugu pomnoženu sa -3 dodali trećoj). Dakle, gornji sistem jednačina po α, β i γ nema rešenja, te vektor x ne može da se izrazi preko vektora a, b i c.

☞ Dobijeni rezultat nam govori da $x \notin \mathrm{L}(a,b,c)$ i skup $\{a,b,c\}$ nije baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(5) $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$\Leftrightarrow$ $(1,1,1) = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) + \gamma(-1,3,8) = (\alpha - \beta - \gamma, \beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta + 8\gamma)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} -2 & = & \alpha & - & \beta & - & \gamma \\ 4 & = & & & \beta & + & 3\gamma \\ 10 & = & \alpha & + & 2\beta & + & 8\gamma \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} -2 & = & \alpha & - & \beta & - & \gamma \\ 4 & = & & & \beta & + & 3\gamma \end{array}}$$

$\Leftrightarrow$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(-2\gamma + 2, -3\gamma + 4, \gamma) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$

(prvu jednačinu smo oduzeli od treće, a zatim drugu pomnoženu sa -3 dodali trećoj). Dakle, gornji sistem jednačina po α, β i γ ima beskonačno mnogo rešenja, te je $x = (-2\gamma + 2)a + (-3\gamma + 4)b + \gamma c$ za svako $\gamma \in \mathbb{R}$.

☞ Dobijeni rezultat nam govori da $x \in \mathrm{L}(a,b,c)$ i da skup $\{a,b,c\}$ nije baza prostora $\mathbb{R}^3$ jer se preko vektora baze svaki vektor pretstavlja na jedinstven način, štđ ovde nije slučaj. ☑

Zadatak 11.4 *Neka su u vektorskom prostoru slobodnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljni vektori. Diskutovati linearnu zavisnost i generatornost skupa (trojke) vektora $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}\}$.*

➥ ***Rešenje:*** Vektorski prostor slobodnih vektora je izomorfan sa vektorskim prostorom $\mathbb{R}^3$, koji je dimenzije 3.

Skup vektora $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}\}$ sadrži nula-vektor te je linearno zavisan. Sledi takođe da je $\mathrm{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}) = \mathrm{L}(\vec{a}, \vec{b})$, te je $\dim(\mathrm{L}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{0})) = \dim(\mathrm{L}(\vec{a}, \vec{b})) \leq 2$. Dakle, skup vektora $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}\}$ ne može biti generator prostora slobodnih vektora. To znači da on ne može ni baza tog prostora. ☑

Zadatak 11.5 *Neka su u vektorskom prostoru slobodnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljni vektori. Diskutovati linearnu zavisnost i generatornost skupa (para) vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.*

➥ ***Rešenje:*** Dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ne mogu da generišu trodimenzionalan prostor slobodnih vektora, a mogu a ne moraju biti linearno nezavisni (nezavisni su ako i samo ako nisu paralelni, vidi poglavlje o slobodnim vektorima). ☑

Zadatak 11.6 *Neka su u vektorskom prostoru slobodnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori. Diskutovati linearnu zavisnost i generatornost skupa (trojke) vektora $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$.*

➥ ***Rešenje:*** Tri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ mogu a ne moraju da generišu trodimenzionalan prostor slobodnih vektora, i takođe mogu a ne moraju biti linearno nezavisni. Pri tome su nezavisni ako i samo ako su generatorni, i ako i samo ako su baza prostora slobodnih vektota, sve to u slučaju kada su nekoplanarni (vidi poglavlje o slobodnim vektorima). ☑

Zadatak 11.7 *Neka su u vektorskom prostoru slobodnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ proizvoljni vektori. Diskutovati linearnu zavisnost i generatornost skupa (uređene četvorke) vektora $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right\}$.*

➥ ***Rešenje:*** Četiri vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ u trodimenzionalnom prostoru slobodnih vektora su uvek linearno zavisni jer se bar jedan od njih može pretstaviti preko ostalih. Pri tome mogu a ne moraju biti linearno nezavisni, a jesu u slučaju kada su nekoplanarni (vidi poglavlje o slobodnim vektorima). ☑

Zadatak 11.8 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$, ispitati tj. diskutovati linearnu nezavisnost generatorne trojke vektora (a,b,c).*

➥ ***Rešenje:*** U dvodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^2$, tri vektora a, b i c su sigurno linearno zavisna (bez obzira da li su generatorni ili ne za prostor $\mathbb{R}^2$). ☑

Zadatak 11.9 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$, ispitati tj. diskutovati linearnu nezavisnost generatornog para vektora (a,b).*

➥ ***Rešenje:*** U dvodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^2$, dva generatorna vektora a i b su sigurno linearno nezavisna jer su i baza tog prostora (ako ne bi bili generatorni generatorni za prostor $\mathbb{R}^2$, tada bi bili linearno zavisni). ☑

Zadatak 11.10 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$, za generatornu trojku vektora (a,b,c) ispitati tj. diskutovati da li su linearno zavisni, i da li su baza prostora $\mathbb{R}^3$.*

➥ ***Rešenje:*** U trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$, tri generatorna vektora a, b i c su sigurno linearno nezavisna, pa i baza prostora $\mathbb{R}^3$. ☑

Zadatak 11.11 *Ispitati koji od sledećih podskupova $U \subseteq \mathbb{R}^3$ čine potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, i za one koji jesu, odrediti njihovu.*

(1) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y = z\right\}$.

(2) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sin x + \cos y = 0,\ z = x^2 + 1\right\}$.

(3) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - 3z = 0,\ 5y - z = 2,\ x + 7z = 0\right\}$.

(4) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 0\right\}$.

(5) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 0\right\}$.

(6) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -2x + z\right\}$.

(7) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y\right\}$.

(8) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y \vee x = -y\right\}$.

(9) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 - y^2 = 0\right\}$.

(10) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^3 = -y^3\right\}$.

(11) $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; xy = 0\right\}$.

➥ ***Rešenje:*** Ako je skup U zadan jednačinama tj. sistemom jednačina čije su promenljive komponente elemenata skupa U, tada je U potprostor prostora $\mathbb{R}^3$ ako i samo ako je zadan *sistemom linearnih, homogenih jednačina* (ili sistemom jednačina koje su ekvivalentne sa sistemom linearnih, homogenih jednačina), i u tom slučaju je dimenzija tog potprostora jednaka stepenu neodređenosti sistema jednačina.

(1) Skup V je opisan sistemom homogenih, linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

koji je 1 puta neodređen, te je U potprostor dimenzije 1.

(2) Jednačine koje opisuju skup U nisu linearne, te U nije potprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(3) Jednačine koje opisuju skup U jesu linearne ali nisu sve homogene, te U nije potprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(4) Jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ koja opisuje skup U nije linearna, ali je ekvivalentna sa $x = y = z = 0$, tj. ekvivalentna sa homogenim linearnim sistemom

$$\begin{array}{ccccl} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array}$$

te je $U = \{(0,0,0)\}$ nula prostor koji je dimenzije 0.

(5) Jednačina $x^2 + y^2 = 0$ koja opisuje skup U nije linearna, ali je ekvivalentna sa $x = y = 0$, $z \in \mathbb{R}$ tj. ekvivalentna sa homogenim linearnim sistemom

$$\begin{array}{cccl} x & & = & 0 \\ & y & = & 0 \end{array}$$

te je $U = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ u stvari z-osa, odnosno potprostor dimenzije 1.

(6) U pitanju je homogena linearna jednačina $x + 2x - z = 0$, odnosno homogeni, linearni sistem koji je 2 puta neodređen, te je U potprostor dimenzije 2.

(7) U pitanju je homogena linearna jednačina $x - y = 0$, odnosno homogeni, linearni sistem koji je 2 puta neodređen (po x, y, z), te je U potprostor dimenzije 2. Geometrijski, skup U je ravan koja sadrži z-osu.

(8) Skup U nije skup rešenja sistema linearnih, homogenih jednačina $x - y = 0$ i $x + y = 0$, već unija skupova rešenja jednačina $x - y = 0$ i $x + y = 0$ pojedinačno. Stoga imamo da npr. $(1, 1, 5) \in U$ (jer $(1, 1, 5)$ zadovoljava jednačinu $x - y = 0$), i $(1, -1, 3) \in U$ (jer $(1, -1, 3)$ zadovoljava jednačinu $x + y = 0$), ali $(1, 1, 5) + (1, -1, 3) = (2, 0, 8) \notin U$ (jer $(2, 0, 8)$ ne zadovoljava ni jednu od jednačina $x - y = 0$ i $x + y = 0$). Stoga U nije vektorski prostor, tj. nije potprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(9) Jednačina $x^2 - y^2 = 0$ je ekvivalentna sa $x = y \vee x - y = 0$, te ovde imamo isti skup kao pod (8), koji nije potprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(10) Jednačina $x^3 = -y^3$ je ekvivalentna sa $x = -y$, te je, kao i pod (7), u pitanju 2-dimenzionalni potprostor prostora $\mathbb{R}^3$.

(11) Iz istih razloga kao i pod (8), skup U nije potprostor od $\mathbb{R}^3$, jer je jednačina $xy = 0$ ekvivalentna sa $x = 0 \vee y = 0$. Na primer, tačke $(1, 0, 1)$ i $(0, 1, 1)$ pripadaju skupu U, dok tačka $(1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 2)$ ne pripada skupu U. ☑

Zadatak 11.12 *Neka je u k-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno nezavisna. Ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(a) $k < n$. (b) $k \le n$. (c) $k = n$. (d) $k > n$. (e) $k \ge n$.

➥ ***Rešenje:*** Tačan je samo iskaz pod (e). Npr. dva vektora u trodimenzionalnom prostoru mogu da budu nezavisna, što ujedno znači i da iskaci (a), (b) i (c) nisu tačni. Nije tačan ni iskaz pod (d) jer npr. tri vektora u trodimenzionalnom prostoru mogu da budu linearno nezavisni. ☑

Zadatak 11.13 *Neka je u k-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, n-torka vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno zavisna. Ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(a) $k < n$. (b) $k \le n$. (c) $k = n$. (d) $k > n$. (e) $k \ge n$.

➥ ***Rešenje:*** Ni jedan od ponuđenih iskaza nije tačan. Slede primeri u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ (dakle za $k = 3$).

(a) $n = 2$, $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (2, 0, 0)$.

(b) Isti primer kao pod (a).

(c) Isti primer kao pod (a).

(d) $n = 4$, $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1)$.

(e) Isti primer kao pod (d). ☑

Zadatak 11.14 *Neka je u k-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, n-torka vektora $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ generatorna za prostor V. Ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(a) $k < n$. (b) $k \le n$. (c) $k = n$. (d) $k > n$. (e) $k \ge n$.

➥ ***Rešenje:*** Tačan je samo iskaz pod (b) $k \le n$. Generatornih vektora mora biti bar kolika je dimenzija prostora V, jer je $\dim(\mathrm{L}(a_1, a_2, \dots, a_n)) \le n$. ☑

Zadatak 11.15 *Za sledeće skupove $\mathcal{R}_S$ i P dokazati da su potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu njihovu bazu.*

(a) *Neka je S skup rešenja homogenog sistema linearnih jednačina*

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}$$

(b) *Neka je P skup tačaka prave p čija je jednačina $p: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3}$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Iz trougaonog oblika sistema ćemo videti i da je $\mathcal{R}_S$ potprostor, i dobiti jednu njegovu bazu.

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 6y & + & 4z & = & 0 \\ & & 9y & + & 6z & = & 0 \end{array}} \overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}}$$

[1] - Prvu jednačinu pomnoženu sa 4 dodajemo drugoj i trećoj.

[2] - Drugu jednačinu delimo sa 2, a zatim je pomnoženu sa -3 dodajemo trećoj.

Vidimo da je sistem 1-puta neodređen, i zamenom unatrag dobijamo rešenja $z = t$, $y = -\dfrac{2}{3}t$, $x = \dfrac{2}{3}t$. Dakle, skup rešenja sistema je $\mathcal{R}_S = \left\{ \left(\frac{2}{3}t, -\frac{2}{3}t, t\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$. Kako je $\mathcal{R}_S = \left\{ t \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{L}\left(\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)\right)$, po teoremi 11.2 je $\mathcal{R}_S$ potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, i to jednodimenzionalan jer je skup $B = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)\right\}$ njegova baza ($\mathcal{R}_S$ je generisan skupom B, i skup kojeg čini samo jedan nenula vektor je očigledno linearno nezavisan).

(b) Parametarski oblik jednačine prave p (vidi poglavlje o analitičkoj geometriji) glasi $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{3} = t$, $t \in \mathbb{R}$, odnosno $x = 2t$, $y = -2t$, $z = 3t$, $t \in \mathbb{R}$, a vektorski $\vec{r} = (0,0,0) + t \cdot (2,-2,3) = (0,0,0) + t \cdot (2,-2,3)$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, dobili smo da je $P = \{t \cdot (2,-2,3) \mid \mathbb{R}\} = \mathrm{L}((2,-2,3))$, te kao i pod (a) zaključujemo da je P potprostor dimenzije 1 prostora $\mathbb{R}^3$, i da je $B = \{(2,-2,3)\}$ jedna njegova baza. Kako za vektor pravca $(2,-2,3)$ prave p važi $(2,-2,3) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$, sledi da se prava p poklapa sa pravom $\mathcal{R}_S$ iz (a). ☑

☞ Skup rešenja svakog homogenog, 1 puta neodređenog sistema linearnih jednačina sa 3 promenljive je potprostor dimenzije 1 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Svaka prava u $\mathbb{R}^3$ koja prolazi kroz koordinatni početak je potprostor dimenzije 1 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i to su jedini potprostori dimenzije 1 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ (ravan je „jednodimenzionalan” geometrijski objekat).

Zadatak 11.16 *Za sledeće skupove $\mathcal{R}_S$ i R dokazati da su potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i odrediti jednu njihovu bazu.*

(a) *Neka je S skup rešenja homogenog sistema linearnih jednačina*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 0 \\ 3x & + & 6y & + & 9z & = & 0 \end{array}$$

(b) *Neka je R skup tačaka ravni α čija je jednačina $\alpha : -x-2y-3z=0$.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Ako prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo drugoj, i pomnoženu sa -3 trećoj, dobijamo da je sistem S ekvivalentan sa prvom jednačinom $x+2y+3z=0$. Vidimo da je sistem 2-puta neodređen, i rešenja su mu $z=t$, $y=u$, $x=-2u-3t$. Dakle, skup rešenja homogenog sistema S je $\mathcal{R}_S = \{(-2u-3t,u,t) \mid u,t \in \mathbb{R}\}$. Kako je $\mathcal{R}_S = \{u\cdot(-2,1,0)+t\cdot(-3,0,1) \mid u,t\in\mathbb{R}\} = \mathrm{L}((-2,1,0),(-3,0,1))$, po teoremi 11.2 je $\mathcal{R}_S$ potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, i to dvodimenzionalan jer je skup $B=\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$ njegova baza ($\mathcal{R}_S$ je generisan skupom B, i linearno je nezavisan jer je npr. $\mathrm{rang}\left(\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$, vidi komentar na strani **??**).

(b) Kako je jednačina ravni α ekvivalentna sa sistemom S iz (a), sledi da je $R=\mathcal{R}_S$. Uočimo da za vektore baze B iz (a) važi

$$(-2,1,0)\times(-3,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,2,3),$$

gde je $(1,2,3)$ vektor normale ravni α. ☑

☞ Skup rešenja svakog homogenog, 2 puta neodređenog sistema linearnih jednačina sa 3 promenljive je potprostor dimenzije 2 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$.

Svaka ravan u $\mathbb{R}^3$ koja prolazi kroz koordinatni početak je potprostor dimenzije 2 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, i to su jedini potprostori dimenzije 2 vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ (ravan je „dvodimenzionalan” geometrijski objekat).

Zadatak 11.17 *Za skup $\mathcal{R}_S$ rešenja homogenog sistema S linearnih jednačina*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & - & t & + & u & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & 4z & + & 3t & - & 2u & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 2z & & & + & u & = & 0 \end{array}$$

dokazati da je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^5$, i odrediti jednu njegovu bazu.

➥ ***Rešenje:*** Iz trougaonog oblika sistema ćemo videti i da je $\mathcal{R}_S$ potprostor, i dobiti jednu njegovu bazu.

$$S \overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & - & t & + & u & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & + & 2t & - & u & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & + & 2t & - & u & = & 0 \end{array}}$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & - & t & + & u & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & + & 2t & - & u & = & 0 \end{array}}$$

[1] - Prvu jednačinu dodajemo drugoj, i prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodajemo trećoj.

[2] - Drugu jednačinu oduzimamo od treće.

Vidimo da je sistem 3-puta neodređen, i zamenom unatrag dobijamo rešenja $z=\alpha$, $t=\beta$, $u=\gamma$, $y=-2\alpha+2\beta-\gamma$, $x=-\beta$. Dakle, skup rešenja sistema S je

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_S &= \{(-\beta,-2\alpha+2\beta-\gamma,\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\} = \\ &= \{\alpha(0,-2,1,0,0)+\beta(-1,2,0,1,0)+\gamma(0,-1,0,0,1) \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\} = \\ &= \mathrm{L}((0,-2,1,0,0),(-1,2,0,1,0),(0,-1,0,0,1)).\end{aligned}$$

Po teoremi 11.2 imamo da je lineal $\mathcal{R}_S$ potprostor prostora $\mathbb{R}^5$, i to 3-dimenzionalan jer je skup $B=\{(0,-2,1,0,0),(-1,2,0,1,0),(0,-1,0,0,1)\}$ njegova baza. Naime, skup $\mathcal{R}_S$ je, kao lineal nad skupom vektora B, generisan skupom B, i linearno je nezavisan jer je npr. $\mathrm{rang}\left(\begin{bmatrix}0&-1&0\\-2&2&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=3$, vidi komentar na strani **??**). ☑

☞ Skup rešenja svakog homogenog, k-puta neodređenog sistema linearnih jednačina sa n promenljivih je potprostor dimenzije k vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 11.18 *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^4$ *su dati vektori*

$$a=(1,-1,-1,1),\quad b=(1,1,0,0),\quad c=(1,0,1,0).$$

(a) *Ispitati linearnu nezavisnost vektora a, b i c.*

(b) *Ispitati linearnu nezavisnost vektora a i b.*

➥ ***Rešenje:***

(a) Prvi način: Vektori a, b i c su linearno nezavisni ako i samo ako je linearna kombinacija $\alpha a+\beta b+\gamma c$ jednaka nula vektoru samo za $\alpha=\beta=\gamma=0$, tj. ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=0$ jedino rešenje jednačine $\alpha a+\beta b+\gamma c=(0,0,0,0)$.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=\alpha(1,-1,-1,1)+\beta(1,1,0,0)+\gamma(1,0,1,0)=(0,0,0,0)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (\alpha+\beta+\gamma,-\alpha+\beta,-\alpha+\gamma,\alpha)=(0,0,0,0)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \boxed{\begin{array}{rcccccl}\alpha&+&\beta&+&\gamma&=&0\\-\alpha&+&\beta&&&=&0\\-\alpha&&&+&\gamma&=&0\\\alpha&&&&&=&0\end{array}}\ \Leftrightarrow\ \boxed{\begin{array}{rcccccl}\alpha&+&\beta&+&\gamma&=&0\\-\alpha&+&\beta&&&=&0\\\alpha&&&&&=&0\\&&&&0&=&0\end{array}}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0).$$

Prema tome, vektori a, b i c su linearno nezavisni.

Drugi način: Vektori a, b i c su linearno nezavisni ako i samo ako generišu prostor iste dimenzije koliki je broj ovih vektora (dakle 3), tj. ako i samo ako je rang matrice čije su kolone (ili vrste) sastavljene od komponenti vektora a, b, c jednak sa 3 (vidi komentar na strani **??**). Kako je

$$\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

(u matrici smo zamenili drugu i treću kolonu, i dobili smo ekvivalentnu matricu u „trougaonom" obliku koja je očigledno ranga 3 jer su joj sve tri kolone linearno nezavisne, a rang matrice je jednak maskimalnom broju linearno nezavisnih kolona, pri čemu ekvivalentne matrice uvek imaju isti rang, tako da je i polazna matrica ranga 3), tr sledi da su vektori a, b, c linearno nezavisni.

(b) Svaki podskup linearno nezavisnog skupa vektora je linearno nezavisan, pa iz nezavisnosti vektora a, b i c sledi nezavisnost vektora a i b. ☑

Zadatak 11.19 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ su dati vektori $v_1 = \left(a^2, 1, a\right)$, $v_2 = (1, b, -1)$, $v_3 = (b, 1, -1)$. U zavisnosti od parametara $a, b \in \mathbb{R}$ diskutovati dimenziju podprostora W generisanog vektorima v_1, v_2 i v_3 (dakle, potprostora $W = \mathrm{L}(v_1, v_2, v_3)$).*

➥ ***Rešenje:*** Neka je $M = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \\ a & -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrica čije su kolone redom sastavljene od koordinata datih vektora. Dimenzija podprostora generisanog vektorima v_1, v_2 i v_3 jednaka je rangu matrice M, pa diskutujemo $\operatorname{rang}(M)$.

$$M \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} a(a+b) & 1-b & b \\ a+1 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} a(a+b) & 1-b & b \\ a^2+a+1+ab & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{[3]}{\sim} \begin{bmatrix} 1-b & a(a+b) & b \\ 0 & a^2+a+1+ab & b+1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[1] - Treća kolona se oduzima od druge, i treća kolona pomnožena sa a se dodaje na prvu.

[2] - Prva vrsta se dodaje na drugu.

[3] - Prva i druga kolona menjaju mesto.

Primetimo najpre da za $a = 0$ i svako $b \in \mathbb{R}$ važi $a^2 + a + 1 + ab \neq 0$, tj. imamo da je

$$a^2 + a + 1 + ab = 0 \Leftrightarrow \left(a \neq 0 \land b = -\frac{a^2+a+1}{a}\right).$$

Tako dobijamo sledeće slučajeve.

(a) Za

$$\left(b \neq 1 \land \left(a^2 + a + 1 + ab \neq 0\right)\right) \Leftrightarrow \left(b \neq 1 \land \left(a \neq 0 \land b \neq -\frac{a^2+a+1}{a}\right)\right)$$

je $\operatorname{rang}(M) = 3$, pa su u ovom slučaju vektori v_1, v_2 i v_3 linearno nezavisni, odnosno oni generišu prostor dimenzije 3, tj. prostor $W = \mathbb{R}^3$.

(b) Za $b = 1$ je

$$M \sim \begin{bmatrix} 0 & a(a+1) & 1 \\ 0 & a^2+2a+1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

te vidimo da je u ovom slučaju $\operatorname{rang}(M) = 1$ onda kada su svi elementi druge kolone jednaki nuli, a inače je $\operatorname{rang}(M) = 1$. Pošto je $a(a+1) = 0$ za $a \in \{0,-1\}$ i $a^2+2a+1 = 0$ za $a \in \{-1\}$, imamo sledeće podslučajeve.

(b.1) Za $(b = 1 \wedge a = -1)$ je $\operatorname{rang}(M) = 1$, pa u ovom slučaju dati vektori generišu jednodimenzionalan potprostor W prostora $\mathbb{R}^3$ (vektori tj. uređene trojke koje pripadaju tom potprostoru obrazuju pravu koja prolazi kroz koordinatni početak).

(b.2) Za $(b = 1 \wedge a \neq -1)$ je $\operatorname{rang}(M) = 2$, pa u ovom slučaju dati vektori generišu dvodimenzionalan potprostor W prostora $\mathbb{R}^3$ (vektori tj. uređene trojke koje pripadaju tom potprostoru obrazuju ravan koja prolazi kroz koordinatni početak).

(c) Za

$$a^2+a+1+ab = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(a \neq 0 \;\wedge\; b = -\frac{a^2+a+1}{a}\right)$$

je

$$M \sim \begin{bmatrix} a+2+\frac{1}{a} & -a-1 & -a-1-\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -a-\frac{1}{a} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} a+2+\frac{1}{a} & -a-1-\frac{1}{a} & -a-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1] - Treća vrsta pomnožena sa $-a-\frac{1}{a}$ je dodana drugoj vrsti, zatim treća i druga vrsta menjaju mesta, a zatim treća i druga kolona menjaju mesta.

Stoga dobijamo sledeće podslučajeve.

(c.1) Za

$$\left(\left(a \neq 0 \;\wedge\; b = -\frac{a^2+a+1}{a}\right) \wedge\; a \neq -1\right) \;\Leftrightarrow\; \left(a \notin \{0,-1\} \;\wedge\; b = -\frac{a^2+a+1}{a}\right)$$

je $\operatorname{rang}(M) = 2$, te dati vektori u ovom slučaju generišu dvodimenzionalan potprostor W prostora $\mathbb{R}^3$ (i pripadaju ravni koja prolazi kroz koordinatni početak).

(c.2) Za

$$\left(\left(a \neq 0 \;\wedge\; b = -\frac{a^2+a+1}{a}\right) \wedge\; a = -1\right) \;\Leftrightarrow\; (a = -1 \;\wedge\; b = 1)$$

je $\operatorname{rang}(M) = 1$, te dati vektori u ovom slučaju generišu jednodimenzionalan potprostor W prostora $\mathbb{R}^3$ (i pripadaju pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak). ☑

Zadatak 11.20 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ naći jednu bazu potprostora $\mathbf{V} = \mathrm{L}(A)$, gde je $A = \{a,b,c,d\}$, $a = (3,-5,2)$, $b = (-1,-3,2)$, $c = (5,1,-2)$, $d = (-9,1,2)$, a zatim taj skup dopuniti do baze prostora $\mathbb{R}^3$, ukoliko već nije $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$.*

➥ ***Rešenje:*** Očigledno A nije linearno nezavisan skup, jer od 4 vektora u 3-dimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$ se najmanje jedan može izraziti preko ostalih (imamo da je $\dim(\mathbf{V}) \leq \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$). Posmatrajmo matricu čije su kolone redom koordinate vektora iz A.

$$\begin{array}{cccc} a: & b: & c: & d: \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & -9 \\ -5 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{[1]} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -14 & -14 & 28 \\ 2 & 8 & 8 & -16 \end{bmatrix} \underset{\sim}{[2]} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -14 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1] - Zamenimo prvu i drugu kolonu, a zatim, prvu kolonu pomnoženu sa 3 dodamo drugoj, prvu kolonu pomnoženu sa 5 dodamo trećoj, i prvu kolonu pomnoženu sa -9 dodamo četvrtoj.

[2] - Drugu kolonu oduzmemo od treće, i drugu kolonu pomnoženu sa 2 dodamo četvrtoj.

Dobijamo da je $\dim(\mathbf{V}) = 2$, jer je posmatrana matrica ranga 2. Pri tome vidimo da su vektori a i b linearno nezavisni jer su odgovarajuće kolone u posmatranoj matrici linearno nezavisne, što sledi iz

$$\begin{array}{cc} a: & b: \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{[3]} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -14 & -3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

[3] - Drugu kolonu pomnoženu sa 3 dodamo prvoj.

Sledi da je $\mathbf{V} = \mathrm{L}(A) = \mathrm{L}(a,b) \subsetneq \mathbb{R}^3$, odnosno $B = \{a,b\} \subseteq A$ je jedna baza prostora $\mathbf{V}$. Dakle, bazu $B = \{a,b\}$ dvodimenzionalnog prostora $\mathbf{V}$ treba dopuniti tačno jednim vektorom do baze trodimenzionalnog prostora $\mathbb{R}^3$. Na osnovu teoreme o dopuni do baze, to sigurno može biti jedan od vektora neke poznate baze, npr. standardne baze $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ (vidi primer 11.1), te ćemo redom isprobati koji od vektora e_i može da predstavlja traženu dopunu. Može se dogoditi da to može da bude bilo koji od njih, ili samo neki od njih - ali bar jedan sigurno može. Skup $\{a,b,e_1\}$ je baza ako samo ako je to linearno nezavisan skup. Kako je

$$\begin{array}{ccc} a: & b: & e_1: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -5 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ ,}$$

sledi da skup $\{a,b,e_1\}$ jeste baza prostora $\mathbb{R}^3$. ☑

Zadatak 11.21 *Dat je skup* $A = \{a,b,c,d,e\}$, *gde su* $a = (1,-1,2,5)$, $b = (7,3,4,1)$, $c = (3,2,1,-2)$, $d = (1,4,-3,-12)$, $e = (-14,-6,,-8,-2)$ *vektori iz prostora* $\mathbb{R}^4$, *i neka je* $\mathbf{V} = (V,\mathbb{R},+,\cdot)$ *podprostor od* $\mathbb{R}^4$ *generisan vektorima skupa A, tj.* $V = \mathrm{L}A$. *Naći sve linearne zavisnosti skupa vektora A, naći jedan podskup od A koji je baza podprostora* $\mathbf{V}$, *a zatim u toj bazi izraziti preostale vektore skupa A. Da li vektori* $\mathbb{O} = (0,0,0,0)$, $x = (8,7,1,-11)$ *i* $y = (5,0,5,0)$ *pripadaju podprostoru* $\mathbf{V}$*?*

➥ ***Rešenje:*** Do linearnih zavisnosti i baze možemo doći analizirajući proizvoljnu linearnu kombinaciju vektora iz A.

$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\epsilon e=\mathbb{O}$

$\Leftrightarrow$ $(\alpha+7\beta+3\gamma+\delta-14\epsilon,\ -\alpha+3\beta+2\gamma+4\delta-6\epsilon,$
$2\alpha+4\beta+\gamma-3\delta-8\epsilon,\ 5\alpha+\beta-2\gamma-12\delta-2\epsilon)=$
$=(0,0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 7\beta & + & 3\gamma & + & \delta & - & 14\epsilon & = & 0\\ -\alpha & + & 3\beta & + & 2\gamma & + & 4\delta & - & 6\epsilon & = & 0\\ 2\alpha & + & 4\beta & + & \gamma & - & 3\delta & - & 8\epsilon & = & 0\\ 5\alpha & + & \beta & - & 2\gamma & - & 12\delta & - & 2\epsilon & = & 0 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 7\beta & + & 3\gamma & + & \delta & - & 14\epsilon & = & 0\\ & & 10\beta & + & 5\gamma & + & 5\delta & - & 20\epsilon & = & 0\\ & - & 10\beta & + & -5\gamma & - & 5\delta & + & 20\epsilon & = & 0\\ & - & 34\beta & - & -17\gamma & - & 17\delta & + & 68\epsilon & = & 0 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 7\beta & + & 3\gamma & + & \delta & - & 14\epsilon & = & 0\\ & & 2\beta & + & \gamma & + & \delta & - & 4\epsilon & = & 0 \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}\\ \gamma=-2\beta-\delta+4\epsilon\\ \alpha=-7\beta-3\gamma-\delta+14\epsilon=-7\beta-3(-2\beta-\delta+4\epsilon)-\delta+14\epsilon=-\beta+2\delta+2\epsilon \end{array}}$$

$\Leftrightarrow$ $(-\beta+2\delta+2\epsilon)a+\beta b+(-2\beta-\delta+4\epsilon)c+\delta d+\epsilon e=\mathbb{O}\ \wedge\ \beta,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $\beta(-a+b-2c)+\delta(2a-c+d)+\epsilon(2a+4c+e)=\mathbb{O}\ \wedge\ \beta,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $(-a+b-2c=\mathbb{O}\ \wedge\ 2a-c+d=\mathbb{O}\ \wedge\ 2a+4c+e=\mathbb{O})$

[1] - Prva jednačina dodana na drugu; prva jednačina pomnožena sa -2 dodana na treću; prva jednačina pomnožena sa -5 dodana na četvrtu.

[2] - Druga jednačina dodana na treću; druga jednačina pomnožena sa $\frac{34}{10}$ dodana na četvrtu; druga jednačina podeljena sa 5.

[3] - Uvrštavamo u polaznu jednačinu dobijene veze među skalarima.

[4] - Da bi navedena linearna akombinacija bila jednaka nula-vektoru za proizvoljne $\beta,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$, moraju svi vektori koji se množe skalarima β,δ,ϵ jednaki nula-vektoru.

Time smo dobili „sve" linearne zavisnosti vektora iz A, tj. svaka druga linearna zavisnost je posledica linearnih zavisnosti $-a+b-2c=\mathbb{O}$, $2a-c+d=\mathbb{O}$ i $2a+4c+e=\mathbb{O}$. Iz ovih zavisnosti dobijamo npr. $b=a+2c$, $d=-2a+c$ i $e=-2a-4c$, te vidimo da su a i c dovoljni da izgenerišu sve ostale vektore, i pri tome su a i c i linearno nezavisni jer ne postoji linearna zavisnost između samo ta 2 vektora. Naime, kada bi potojala, postojala bi neka jednakost oblika $\alpha a+\beta b=\mathbb{O}$ za neke $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Dakle, $B=\{a,c\}$ je jedna baza prostora $\mathbf{V}$, pri čemu smo već naveli reprezentacije vektora b, d i e u bazi B - iz $b=a+2c$, $d=-2a+c$ i $e=-2a-4c$ smo dobili $b=(1,2)_B$, $d=(-2,1)_B$, $e=(-2,-4)_B$.

Vektor $\mathbb{O}=(0,0,0,0)$ pripada svakom podprostoru od $\mathbb{R}^3$, pa i podprostoru $\mathbf{V}$.

Da li je $x=(8,7,1,-11)\in V$, i da li je $y=(5,0,5,0)\in V$? Vektor pripada nekom podprostoru ako i samo ako se može na jednistven način predstaviti u nekoj bazi tog podprostora, u ovom slučaju imamo bazu B. Iz

$x = (8,7,1,-11) \in V$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ x = \lambda a + \theta c$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ (8,7,1,-11) = \lambda(1,-1,2,5) + \theta(3,2,1,-2)$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ (8,7,1,-11) = (\lambda+3\theta, -\lambda+2\theta, 2\lambda+\theta, 5\lambda-2\theta)$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ (8 = \lambda+3\theta \ \wedge\ 7 = -\lambda+2\theta \ \wedge\ 1 = 2\lambda+\theta \ \wedge\ -11 = 5\lambda-2\theta)$
$\Leftrightarrow \ (\lambda = -1 \ \wedge\ \theta = 3).$

Sledi da je $x = -a + 3c = (-1,3)_B$, te je $x \in V$. Analogno, iz

$y = (5,0,5,0) \in V$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ y = \lambda a + \theta c$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ (5,0,5,0) = \lambda(1,-1,2,5) + \theta(3,2,1,-2)$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ (5,0,5,0) = (\lambda+3\theta, -\lambda+2\theta, 2\lambda+\theta, 5\lambda-2\theta)$
$\Leftrightarrow \ \exists \lambda,\theta \in \mathbb{R},\ (5 = \lambda+3\theta \ \wedge\ 0 = -\lambda+2\theta \ \wedge\ 5 = 2\lambda+\theta \ \wedge\ 0 = 5\lambda-2\theta)$
$\Leftrightarrow \ (\lambda,\theta) \in \emptyset,$

dobijamo da, kako je poslednji sistem jednačina kontradiktoran, y se ne može pretstaviti preko a i c, te sledi da $y \notin V$. ☑

Zadatak 11.22 *U vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^3$ *su dati skupovi vektora* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *i* $B = \{b_1, b_2, b_3\}$*, gde je*

$$a_1 = (1,2,3), \quad a_2 = (1,2,-1), \quad a_3 = (-1,-1,-1),$$
$$b_1 = (1,2,-3), \quad b_2 = (2,1,4), \quad b_3 = (1,1,1).$$

(a) *Dokazati da su* A *i* B *baze prostora* $\mathbb{R}^3$.

(b) *Vektor* $x \in \mathbb{R}^3$ *koji u bazi* A *ima prezentaciju* $x = (-2,2,1)_A$*, pretstaviti u bazi* B.

(c) *Vektor* $y \in \mathbb{R}^3$ *koji u standardnoj bazi* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ *(*$e_1 = (1,0,0)$*,* $e_2 = (0,1,0)$*,* $e_3 = (0,0,1)$*) ima prezentaciju* $y = (-4,12,8)_E$*, pretstaviti u bazi* A.

➥ ***Rešenje:*** U matričnom zapisu, vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ pišemo kao matricu kolonu $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

(a) Neka su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ matrice čije su kolone redom komponente vektora a_1, a_2 i a_3, odnosno b_1, b_2 i b_3. Kako je $\det A = 4 \neq 0$ i $\det B = -2 \neq 0$, sledi da su i A i B baze prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) S jedne strane je

$$\begin{aligned} x = (-2,2,1)_A &= -2a_1 + 2a_2 + a_3 = -2(1,2,3) + 2(1,2,-1) + (-1,-1,-1) \\ &= (-1,-1,-9), \end{aligned}$$

odnosno, u matričnom zapisu

$$x=(-2,2,1)_A=-2a_1+2a_2+a_3=-2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&2&-1\\3&-1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-9\end{bmatrix}.$$

Dakle, u matričnom zapisu, $[x]=A\cdot[x]_A$. S druge strane, tražimo prezentaciju $x=(\alpha,\beta,\gamma)_B$, odnosno skalare α,β i γ za koje važi

$$\begin{aligned}x&=(-1,-1,-9)=(\alpha,\beta,\gamma)_B=\alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3\\&=\alpha(1,2,-3)+\beta(2,1,4)+\gamma(1,1,1)\\&=(\alpha+2\beta+\gamma,2\alpha+\beta+\gamma,-3\alpha+4\beta+\gamma),\end{aligned}$$

odnosno, u matričnom zapisu

$$x=(-1,-1,-9)=(\alpha,\beta,\gamma)_B=\alpha b_1+\beta b_2+\gamma b_3$$
$$=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\-3&4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+2\beta+\gamma\\2\alpha+\beta+\gamma\\-3\alpha+4\beta+\gamma\end{bmatrix}.$$

Dakle, u matričnom zapisu je $[x]=B\cdot[x]_B$.

Rešavajući jednačinu

$$\begin{bmatrix}\alpha+2\beta+\gamma\\2\alpha+\beta+\gamma\\-3\alpha+4\beta+\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\9\end{bmatrix}\Leftrightarrow\boxed{\begin{array}{rcrcrcr}\alpha&+&2\beta&+&\gamma&=&-1\\2\alpha&+&\beta&+&\gamma&=&-1\\-3\alpha&+&4\beta&+&\gamma&=&-9\end{array}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\boxed{\begin{array}{rcrcrcr}\alpha&+&2\beta&+&\gamma&=&-1\\&-&3\beta&-&\gamma&=&1\\&&10\beta&+&4\gamma&=&-12\end{array}}\Leftrightarrow\boxed{\begin{array}{rcrcrcr}\alpha&+&2\beta&+&\gamma&=&-1\\&-&3\beta&-&\gamma&=&1\\&-&2\beta&&&=&-8\end{array}}$$

dobijamo $\beta=4$, $\gamma-13$ i $\alpha=4$, odnosno $x=(4,4,-13)_B$.

☞ Ovaj postupak možemo uopštiti, i dobiti formule u vektorskom i matričnom zapisu. Ako su A i B baze, a matrice A i B su formirane od vektora-kolona elemenata baza A i B, tada postoje inverzne matrice A^{-1} i B^{-1}, i tada reprezentacije x_A i x_B vektora x u bazama A i B nalazimo iz $A\cdot x_A=x=B\cdot x_B$. Množeći jednakost s leva matricom B^{-1} (koju možemo naći npr. blok-šemom) dobijamo

$$x_B=B^{-1}\cdot A\cdot x_A.$$

(c) Nalazeći npr. blok-šemom matricu A^{-1} dobijamo

$$y_A=A^{-1}\cdot E\cdot y_E=A^{-1}\cdot I\cdot y_E=A^{-1}\cdot y_E=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3&2&1\\-1&2&-1\\-8&4&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\12\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\5\\20\end{bmatrix}.$$ ☑

Zadatak 11.23 *Neka je* **V** *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^4$ *generisan skupom vektora* $A=\{a,b,c,d,e\}$, *gde je* $a=(1,-1,2,3)$, $b=(3,-2,4,6)$, $c=(15,-4,10,13)$, $d=(3,-3,2,7)$ *i* $e=(-3,4,-2,-9)$. *Odrediti dimenziju potprostora V, sve linearne zavisnosti (linearne kombinacije jednake nuli) skupa vektora A, i sve potskupove skupa A koji čine bazu podprostora* **V**. *Da li je skup* $\{c,d,e\}$ *baza potprostora* **V**?

➥ ***Rešenje:*** Linearne zavisnosti, tj. veze između datih vektora ćemo odrediti na sledeći način. Neka su $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari.

$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\epsilon e=\mathbb{O} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned}&(\alpha+3\beta+15\gamma+3\delta-3\varepsilon,\\ &-\alpha-2\beta-4\gamma-3\delta+4\varepsilon,\\ &2\alpha+4\beta+10\gamma+2\delta-2\varepsilon,\\ &3\alpha+6\beta+13\gamma+7\delta-9\varepsilon)=(0,0,0,0) \quad \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 3\beta & + & 15\gamma & + & 3\delta & - & 3\varepsilon & = & 0\\ -\alpha & - & 2\beta & - & 4\gamma & - & 3\delta & + & 4\varepsilon & = & 0\\ 2\alpha & + & 4\beta & + & 10\gamma & + & 2\delta & - & 2\varepsilon & = & 0\\ 3\alpha & + & 6\beta & + & 13\gamma & + & 7\delta & - & 9\varepsilon & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 3\beta & + & 15\gamma & + & 3\delta & - & 3\varepsilon & = & 0\\ & & \beta & + & 11\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0\\ & - & 2\beta & - & 20\gamma & - & 4\delta & + & 4\varepsilon & = & 0\\ & - & 3\beta & - & 32\gamma & - & 2\delta & & & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 3\beta & + & 15\gamma & + & 3\delta & - & 3\varepsilon & = & 0\\ & & \beta & + & 11\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0\\ & & & & 2\gamma & - & 4\delta & + & 6\varepsilon & = & 0\\ & & & & \gamma & - & 2\delta & + & 3\varepsilon & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[3]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha & + & 3\beta & + & 15\gamma & + & 3\delta & - & 3\varepsilon & = & 0\\ & & \beta & + & 11\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0\\ & & & & \gamma & - & 2\delta & + & 3\varepsilon & = & 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \alpha=33\delta-48\varepsilon\\ \beta=-22\delta+32\varepsilon\\ \gamma=2\delta-3\varepsilon\\ \delta,\varepsilon\in\mathbb{R} \end{array}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad (33\delta-48\varepsilon)a+(-22\delta+32\varepsilon)b+(2\delta-3\varepsilon)c+\delta d+\epsilon e=\mathbb{O} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (33a-22b+2c+d)\delta+(-48a+32b-3c+e)\varepsilon=\mathbb{O}.$

[1] - Prvu jednačinu dodamo na drugu, pomnoženu sa -2 dodamo na treću, i pomnoženu sa -3 dodamo na četvrtu.

[2] - Drugu jednačinu pomnoženu sa 2 dodamo na treću, i pomnoženu sa 3 dodamo na četvrtu.

[3] - Četvrtu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na treću.

Kako je $\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, odnosno skalari $\delta\in\mathbb{R}$ i $\varepsilon\in\mathbb{R}$ mogu biti proizvoljni, sledi da linearna kombinacija $(33a-22b+2c+d)\delta+(-48a+32b-3c+e)\varepsilon$ vektora $(33a-22b+2c+d)$ i $(-48a+32b-3c+e)$ je jednaka nula-vektoru za proizvoljne $\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$ ako i samo ako su oba vaktora $(33a-22b+2c+d)$ i $(-48a+32b-3c+e)$ jednaka nula-vektoru, te tako dobijamo linearne zavisnosti

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 33a & - & 22b & + & 2c & + & d & & & = & \mathbb{O}\\ -48a & + & 32b & - & 3c & & & + & e & = & \mathbb{O} \end{array}} \quad [\star]$$

Ovo su sve fundamentalne zavisnosti vektora a, b, c, d i e, tj. sve ostale su posledice, odnosno linearne kombinacije ove dve. To sledi iz samog postupka, jer su svi gore navedeni iskazi ekvivalentni. Iz sistema jednačina [$\star$] sledi da se d i e mogu izraziti preko a, b i c, što znači da su vektori a, b i c generatori prostora $\mathbf{V}$. Njihova nezavisnost

(nezavisnost vektora a, b i c) sledi iz činjenice da za $\delta = \varepsilon = 0$ dobijamo da mora biti i $\alpha = 33\delta - 48\varepsilon = 0$, $\beta = -22\delta + 32\varepsilon = 0$ i $\gamma = 2\delta - 3\varepsilon$, odnosno dobijamo da je $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dakle, $\{a,b,c\}$ je baza prostora $\mathbf{V}$, i pri tome je $\dim \mathbf{V} = 3$. Za, na primer, potskup $\{a,c,e\}$ proveravamo da li je baza prostora $\mathbf{V}$ tako što preostala dva vektora b i d posmatramo kao nepoznate u sistemu jednačina [$\star$], i računamo determinatu toga sistema, koja je u tom slučaju $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b: & d: \end{array} \\ \begin{vmatrix} -22 & 1 \\ 32 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -32 \neq 0$, što znači da je sistem [$\star$] rešiv po b i d, pa je zbog toga $\{a,c,e\}$ baza prostora $\mathbf{V}$. Na taj način se proverava za sve preostale tročlane podskupove da li su baze prostora $\mathbf{V}$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a: & b: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 33 & -22 \\ -48 & 32 \end{vmatrix} \end{array} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{c,d,e\} \text{ nije baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a: & c: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 33 & 2 \\ -48 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b,d,e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a: & d: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 33 & 1 \\ -48 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b,c,e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a: & e: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 33 & 0 \\ -48 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b,c,d\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b: & c: \end{array} \\ \begin{vmatrix} -22 & 2 \\ 32 & -3 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a,d,e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b: & d: \end{array} \\ \begin{vmatrix} -22 & 1 \\ 32 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a,c,e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} b: & e: \end{array} \\ \begin{vmatrix} -22 & 0 \\ 32 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a,c,d\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} c: & d: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a,b,e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} c: & e: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a,b,d\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} d: & e: \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a,b,c\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V}.$$

☑

☞ Za razliku od zadataka **??** i **??** u kojima su date linearne veze vektora o čijoj prirodi ne znamo ništa, a traže se baze i linearno nezavisni potskupovi datog skupa vektora, u ovom zadatku su dati vektori vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, a traže se sve njihove linearne zavisnosti.

Zadatak 11.24 *Neka je* $\mathbf{V}$ *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^4$*, generisan skupom vektora* $A = \{a,b,c,d,e\}$*. Naći sve linearne zavisnosti skupa vektora A, kao i sve potskupove skupa A koji su baze prostora* $\mathbf{V}$*, ako je* $a = (2,-1,3,1)$*,* $b = (1,0,-1,2)$*,* $c = (0,1,-5,3)$*,* $d = (1,1,-6,5)$*,* $e = (-1,-2,12,-10)$.

➥ ***Rešenje:*** Zadatak rešavamo na isti način kao i zadatak **11.23**. Neka su $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon \in \mathbb{R}$ proizvoljni skalari.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\epsilon e = \mathbb{O} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\alpha+\beta+\delta-\varepsilon,\ -\alpha+\gamma+\delta-2\varepsilon,\ 3\alpha-\beta-5\gamma-6\delta+12\varepsilon,\ \alpha+2\beta+3\gamma+5\delta-10\varepsilon) = (0,0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2\alpha & + & \beta & & & + & \delta & - & \varepsilon & = & 0\\ -\alpha & & & + & \gamma & + & \delta & - & 2\varepsilon & = & 0\\ 3\alpha & - & \beta & - & 5\gamma & - & 6\delta & + & 12\varepsilon & = & 0\\ \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & + & 5\delta & - & 10\varepsilon & = & 0 \end{array}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \beta & + & 2\alpha & & & + & \delta & - & \varepsilon & = & 0\\ & - & \alpha & + & \gamma & + & \delta & - & 2\varepsilon & = & 0\\ & & 5\alpha & - & 5\gamma & - & 5\delta & + & 11\varepsilon & = & 0\\ & - & 3\alpha & + & 3\gamma & + & 3\delta & - & 8\varepsilon & = & 0 \end{array}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} \beta & + & 2\alpha & & & + & \delta & - & \varepsilon & = & 0\\ & - & \alpha & + & \gamma & + & \delta & - & 2\varepsilon & = & 0\\ & & & & & & & & \varepsilon & = & 0\\ & & & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0 \end{array}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\varepsilon = 0 \quad \wedge \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} \beta & + & 2\alpha & & & + & \delta & = & 0\\ & - & \alpha & + & \gamma & + & \delta & = & 0 \end{array}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\varepsilon = 0 \quad \wedge \quad \begin{array}{l} \alpha = \gamma+\delta\\ \beta = -2\gamma-3\delta \end{array}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\gamma+\delta)a+(-2\gamma-3\delta)b+\gamma c+\delta d+0\cdot e = \mathbb{O} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-2b+c)\gamma+(a-3b+d)\delta = \mathbb{O} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} a & - & 2b & + & c & & & = & \mathbb{O}\\ a & - & 3b & & & + & d & = & \mathbb{O} \end{array}} \quad [\star].$$

[1] - Zamenimo prve dve kolone, prvu jednačinu dodamo na treću, i prvu jednačinu pomnoženu sa -2 dodamo na četvrtu.

[2] - Drugu jednačinu pomnoženu sa 5 dodamo na treću, i pomnoženu sa -3 dodamo na četvrtu.

Sve linearne zavisnosti vektora a, b, c, d i e su date jednačinama $[\star]$, i njihovim linearnim kombinacijama. Uočimo da u $[\star]$, pa onda ni u linearnim kombinacijama ove dve jednakosti, ne figuriše vektor e. To znači da on nije povezan sa vektorima a, b, c i d, odnosno da je nezavisan u odnosu na njih. Stoga je on element svake baze potprostora **V**. Iz sistema jednačina [$\star$] sledi da se c i d mogu izraziti preko a i b, što znači da su vektori a, b i e generatori prostora **V**. Nezavisnost vektora a i b sledi otud što za $\delta = \delta = 0$ dobijamo da mora biti i $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, odnosno dobijamo da je $\alpha a + \beta b = 0$ ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dakle, $\{a, b, e\}$ je baza prostora **V**, i pri tome je $\dim \mathbf{V} = 3$. Dalje, iz istih razloga kao u zadatku **11.23**, za neke $x, y \in \{a, b, c, d\}$ je skup $\{x, y, e\}$ baza potprostora **V** ako i samo ako je determinanta koeficijenata iz [$\star$] koji odgovaraju vektorima x i y različita od 0. Tako dobijamo

$$\begin{array}{cc} a: & b: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{c, d, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} a: & c: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b, d, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} a: & d: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{b, c, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} b: & c: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, d, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} b: & d: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, c, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V};$$

$$\begin{array}{cc} c: & d: \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{skup } \{a, b, e\} \text{ jeste baza prostora } \mathbf{V}.$$

☑

Zadatak 11.25 *Neka je* $\mathbf{V}_1$ *potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^4$ *generisan vektorima*

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), \quad b_1 = (1, -1, 1, -1), \quad c_1 = (1, 3, 1, 3),$$

a $\mathbf{V}_2$ *potprostor generisan vektorima*

$$a_2 = (1, 2, 0, 2), \quad b_2 = (1, 2, 1, 2), \quad c_2 = (3, 1, 3, 1).$$

Dakle, $V_1 = \mathrm{L}(a_1, b_1, c_1)$ *i* $V_2 = \mathrm{L}(a_2, b_2, c_2)$.

(a) *Izračunati dimenzije prostora* V_1 *i* V_2.

(b) *Ispitati da li je* V_1 *potprostor prostora* V_2.

➥ ***Rešenje:***

(a) Neka su M_1 i M_2 redom matrice čije su kolone redom komponente vektora a_1, b_1 i c_1, odnosno a_2, b_2 i c_2. Iz

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{[3]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \overset{[4]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix},$$

sledi da je $\dim \mathbf{V}_1 = \operatorname{rang} M_1 = 2$ i $\dim \mathbf{V}_2 = \operatorname{rang} M_2 = 3$ (gledano po broju nea-nuliranih kolona u trougaonom obliku).

[1] - Prvu kolonu oduzmemo od druge i treće.

[2] - Drugu kolonu dodamo na treću.

[3] - Prvu kolonu oduzmemo od druge, i pomnoženu sa -3 dodamo na treću.

[4] - Zamenimo drugu i treću kolonu.

(b) Kako je $\dim \mathbf{V}_1 = 2 \le \dim \mathbf{V}_2 = 3$, $\mathbf{V}_1$ može da bude potprostor od $\mathbf{V}_2$ (trodimenzionalni prostor $\mathbf{V}_2$ ne može da bude potprostor dvodimenzionalnog prostora $\mathbf{V}_1$). $\mathbf{V}_1$ je potprostor od $\mathbf{V}_2$ ako i samo ako je $V_1 \subseteq V_2$, tj. ako za svaki vektor $x \in V_1$ važi $x \in V_2$.

Kako je $\dim \mathbf{V}_2 = \dim \mathrm{L}(a_2, b_2, c_2) = 3 = |\{a_2, b_2, c_2\}|$, sledi da je $\{a_2, b_2, c_2\}$ jedna baza prostora $\mathbf{V}_2$. S druge strane, vektori a_1 i b_1 su linearno nezavisni jer se ne mogu izraziti jedan preko drugog. Naime, iz $a_1 = kb_1$ za neko $k \in \mathbb{R}$, odnosno $(1,1,1,1) = k(1,-1,1,-1) = (k,-k,k,-k)$ za neko $k \in \mathbb{R}$, dobijamo kontradiktoran sistem jednačina $1 = k$, $1 = -k$, $1 = k$, $1 = -k$ po $k \in \mathbb{R}$. Dva linearno nezavisna vektora $\{a_1, b_1\}$ u dvodimenzionalnom prostoru $\mathbf{V}_1$ su tada i baza tog prostora.

Dakle, $\{a_1, b_1\}$ je jedna baza prostora $\mathbf{V}_1$, a $\{a_2, b_2, c_2\}$ je jedna baza prostora $\mathbf{V}_2$. Stoga je $\mathbf{V}_1$ potprostor prostora $\mathbf{V}_2$ ako i samo ako je $a_1 \in V_2$ i $b_1 \in V_2$, odnosno ako i samo ako se svaki od vektora a_1 i b_1 može izraziti preko vektora a_2, b_2 i c_2. Iz

$$\begin{aligned}
& a_1 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & (1,1,1,1) = \alpha(1,2,0,2) + \beta(1,2,1,2) + \gamma(3,1,3,1) \\
& \qquad = (\alpha + \beta + 3\gamma, 2\alpha + 2\beta + \gamma, \beta + 3\gamma, 2\alpha + 2\beta + \gamma) \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ 2\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ 2\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 1 \end{array}} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ & & & & -5\gamma & = & -1 \end{array}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \gamma = \frac{1}{5} \\ \beta = \frac{2}{5} \\ \alpha = 0 \end{array}} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & a_1 = \frac{2}{5} b_2 + \frac{1}{5} c_2,
\end{aligned}$$

i s druge strane

$$\begin{aligned}
& b_1 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & (1,-1,1,-1) = \alpha(1,2,0,2) + \beta(1,2,1,2) + \gamma(3,1,3,1) \\
& \qquad = (\alpha + \beta + 3\gamma, 2\alpha + 2\beta + \gamma, \beta + 3\gamma, 2\alpha + 2\beta + \gamma) \quad \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ 2\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & -1 \\ & & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ 2\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & -1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & 3\gamma & = & 1 \\ & & & & -5\gamma & = & -3 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \gamma = \frac{3}{5} \\ \beta = -\frac{4}{5} \\ \alpha = 0 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ a_1 = -\frac{4}{5}b_2 + \frac{3}{5}c_2,$$

sledi $a_1 = \dfrac{2}{5}b_2 + \dfrac{1}{5}c_2 \in V_2$ i $b_1 = -\dfrac{4}{5}b_2 + \dfrac{3}{5}c_2 \in V_2$, te $\mathbf{V}_1$ jeste potprostor od $\mathbf{V}_2$. ☑

Zadatak 11.26 *U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ je data baza $B = (a,b,c,d)$ i ortonormirana baza $E = (e_1,e_2,e_3,e_4)$, gde je*

$$a = (0,1,1,1), \quad b = (-1,0,-1,1), \quad c = (1,-1,0,-1), \quad d = (1,1,1,0),$$
$$e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1).$$

Neka je $f = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 = (1,2,3,4)_E$ i $g = a + 2b + 3c + 4d = (1,2,3,4)_B$.

(a) *Odrediti koordinate vektora f u bazi B, i koordinate vektora g u bazi E.*

(b) *Odrediti dimenziju vektorskog prostora*

$$V = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; v = (x,y,z,u)_E = (x,y,z,u)_B \right\}.$$

➥ ***Rešenje:***

(a) Dakle, treba da izračunamo skalare, odnosno realne brojeve α, β, γ, δ takve da je $f = (\alpha,\beta,\gamma,\delta)_B = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$.

$$\begin{aligned} f &= e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 \\ &= (1,0,0,0) + (0,2,0,0) + (0,0,3,0) + (0,0,0,4) \\ &= (1,2,3,4) \\ &= \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d \\ &= (0,\alpha,\alpha,\alpha) + (-\beta,0,-\beta,\beta) + (\gamma,-\gamma,0,-\gamma) + (\delta,\delta,\delta,0) \\ &= (-\beta+\gamma+\delta, \alpha-\gamma+\delta, \alpha-\beta+\delta, \alpha+\beta-\gamma), \end{aligned}$$

te je

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & 1 \\ \alpha & & & - & \gamma & + & \delta & = & 2 \\ \alpha & - & \beta & & & + & \delta & = & 3 \\ \alpha & + & \beta & - & \gamma & & & = & 4 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow} \boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} \alpha & & & - & \gamma & + & \delta & = & 2 \\ & - & \beta & + & \gamma & & & = & 1 \\ & & \beta & & & - & \delta & = & 2 \\ & - & \beta & + & \gamma & + & \delta & = & 1 \end{array}} \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow}\ \boxed{\begin{array}{rrrrrrrrr} \alpha & & & - & \gamma & + & \delta & = & 2\\ & - & \beta & + & \gamma & & & = & 1\\ & & & & \gamma & - & \delta & = & 3\\ & & & & & & \delta & = & 0 \end{array}}$$

[1] - Prvu jednačinu prebacimo na poslednje mesto, a zatim prvu jednačinu oduzmemo od druge i treće.

[2] - Drugu jednačinu dodamo na treću, i oduzmemo od četvrte.

Zamenom unatrag dobijamo redom $\delta = 0$, $\gamma = 3$, $\beta = 2$ i $\alpha = 5$, odakle sledi da je $f = 5a + 2b + 3c = (5,2,3,0)_B$. Analogno, iz

$$\begin{aligned} g &= a + 2b + 3c + 4d\\ &= (0,1,1,1) + (-2,0,-2,2) + (3,-3,0,-3) + (4,4,4,0) = (5,2,3,0)\\ &= \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4\\ &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{aligned}$$

dobijamo da je $g = (5,2,3,0)_E$.

(b) Vektorski prostor V čine vektori koji su rešenja jednačine $(x,y,z,u)_E = (x,y,z,u)_B$ po $x,y,z,u \in \mathbb{R}$. Dobijamo

$$(x,y,z,u)_E = (x,y,z,u)_B \quad\Leftrightarrow\quad xe_1 + ye_2 + ze_3 + ue_4 = xa + yb + zc + ud \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (x,0,0,0) + (0,y,0,0) + (0,0,z,0) + (0,0,0,u) =$$
$$= (0,x,x,x) + (-y,0,-y,y) + (z,-z,0,-z) + (u,u,u,0) \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (x,y,z,u) = (-y+z+u, x-z+u, x-y+u, x+y-z) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & = & & - & y & + & z & + & u\\ y & = & x & & & - & z & + & u\\ z & = & x & - & y & & & + & u\\ u & = & x & + & y & - & z & & \end{array}}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & + & y & - & z & - & u & = & 0\\ -x & + & y & + & z & - & u & = & 0\\ -x & + & y & + & z & - & u & = & 0\\ -x & - & y & + & z & + & u & = & 0 \end{array}}\ \Leftrightarrow$$

$$\overset{[1]}{\Leftrightarrow}\ \boxed{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & + & y & - & z & - & u & = & 0\\ & & 2y & & & - & 2u & = & 0\\ & & 2y & & & - & 2u & = & 0 \end{array}}\ \Leftrightarrow$$

$$\overset{[2]}{\Leftrightarrow}\ \boxed{\begin{array}{rrrrrrrrr} x & + & y & - & z & - & u & = & 0\\ & & y & & & - & u & = & 0 \end{array}}\ \Leftrightarrow\ \boxed{\begin{array}{l} y = u \in \mathbb{R}\\ x = z \in \mathbb{R} \end{array}}.$$

[1] - Prvu jednačinu dodamo na preostale tri.

[1] - Drugu jednačinu dodamo na treću i podelimo sa 2.

Dakle, radi se o vektorskom prostoru

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \{x\cdot(1,0,1,0) + y\cdot(0,1,0,1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{L}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \end{aligned}$$

koji je dimenzije 2, i jedna baza mu je $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$. Naime, vektori $(1,0,1,0)$ i $(0,1,0,1)$ su očigledno linearno nezavisni jer se ne mogu izraziti jedan preko drugog, tj. ne postoji $k \in \mathbb{R}$ takvo da je $(1,0,1,0) = k\cdot(0,1,0,1)$ ili $(0,1,0,1) = k\cdot(1,0,1,0)$.

☑

Glava 12

Linearne transformacije

Kao i kod grupoida, grupa, prstena, polja i Bulovih algebri, homomorfizam između vektorskih prostora je funkcija preko koje se „slažu” odgovarajuće operacije, a izomorfizam je bijektivni homomorfizam. Homomorfizam vektorskih prostora se još naziva i ***linearna transformacija***.

Definicija 12.1 *Neka su* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +_1, \cdot_1)$ *i* $\mathbf{V}_2 = (V_2, \mathbf{F}, +_2, \cdot_2)$ *vektorski prostori nad istim poljem* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$. *Funkcija* $f : V_1 \to V_2$ *je* ***homomorfizam****, ili* ***linearna transformacija*** *iz vektorskog prostora* $\mathbf{V}_1$ *u vektorski prostor* $\mathbf{V}_2$ *ako za sve vektore* $x, y \in V_1$ *i svaki skalar* $\alpha \in F$ *važi*

(LT1) $f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$,

(LT2) $f(\alpha \cdot_1 x) = \alpha \cdot_2 f(x)$.

☞ Da bi funkcija $f : V_1 \to V_2$ bila linearna transformacija iz vektorskog prostora $\mathbf{V}_1$ u vektorski prostor $\mathbf{V}_2$, vektorski prostori $\mathbf{V}_1$ i $\mathbf{V}_2$ moraju biti nad istim poljem.

Teorema 12.1 *Neka su* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +_1, \cdot_1)$ *i* $\mathbf{V}_2 = (V_2, \mathbf{F}, +_2, \cdot_2)$ *vektorski prostori nad istim poljem* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$. *Funkcija* $f : V_1 \to V_2$ *je linearna transformacija iz vektorskog prostora* $\mathbf{V}_1$ *u vektorski prostor* $\mathbf{V}_2$ *ako za svaka dva vektora* $x, y \in V_1$ *i svaka dva skalara* $\alpha, \beta \in F$ *važi*

(LT) $f(\alpha \cdot_1 x +_1 \beta \cdot_1 y) = \alpha \cdot_2 f(x) +_2 \beta \cdot_2 f(y)$.

Teorema 12.2 *Svaka linearna transformacija* $f : V_1 \to V_2$ *preslikava nula-vektor prostora* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +_1, \cdot_1)$ *u nula-vektor prostora* $\mathbf{V}_2 = (V_2, \mathbf{F}, +_2, \cdot_2)$.

✎ Nadalje ćemo, kod linearnih transformacija $f : V_1 \to V_2$ iz vektorskog prostora $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +_1, \cdot_1)$ u vektorski prostor $\mathbf{V}_2 = (V_2, \mathbf{F}, +_2, \cdot_2)$, operacije $+_1$ i $+_2$ označavati istim simbolom $+$, a operacije $\cdot_1$ i $\cdot_2$ istim simbolom $\cdot$, što neće dovoditi do zabune jer će iz konteksta uvek biti jasno o kojoj se operaciji radi. Isto važi i za nula-vektore $\mathbb{O}_1$ i $\mathbb{O}_2$, tj. neutralne elemente operacija $\cdot_1$ i $\cdot_2$ sabiranja vektora u prostorima $\mathbf{V}_1$ i$\mathbf{V}_2$ redom.

Definicija 12.2

(a) ***Jezgro linearne transformacije*** *$f : V_1 \to V_2$, u oznaci* $\mathrm{Ker}(f)$, *je skup svih vektora iz $\mathbf{V}_1$ koji se preslikavaju u nula-vektor prostora $\mathbf{V}_2$, odnosno*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V_1 \mid f(x) = \mathbb{O}\}.$$

(b) ***Slika linearne transformacije*** *$f : V_1 \to V_2$, u oznaci* $\mathrm{Img}(f)$, *je skup svih vektora prostora $\mathbf{V}_2$ koji se dobijaju preslikavanjem vektora prostora $\mathbf{V}_1$, odnosno*

$$\mathrm{Img}(f) = \{y \in V_2 \mid x \in V_1,\ f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in V_1\}.$$

Teorema 12.3 *Za linearnu transformaciju $f : V_1 \to V_2$ važi da je njeno jezgro vektorski prostor, odnosno,* $(\mathrm{Ker}(f), \mathbf{F}, +_1, \cdot_1)$ *je potprostor prostora* $\mathbf{V}_1 = (V_1, \mathbf{F}, +_1, \cdot_1)$.

Teorema 12.4 *Za linearnu transformaciju $f : V_1 \to V_2$ važi da je skup njenih slika vektorski prostor, odnosno,* $(\mathrm{Img}(f), \mathbf{F}, +_2, \cdot_2)$ *je potprostor prostora* $\mathbf{V}_2 = (V_2, \mathbf{F}, +_2, \cdot_2)$.

Definicija 12.3 ***Rang linearne transformacije*** *$f : V_1 \to V_2$, u oznaci* $\mathrm{rang}(f)$, *je dimenzija potprostora slika, dakle* $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Img}(f))$.

Teorema 12.5 *Ako je $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbf{F}$ dimenzije $n \in \mathbb{N}$, tada je on izomorfan sa vektorskim prostorom $\mathbf{F}^n = (F^n, \mathbf{F}, +, \cdot)$ uređenih n-torki elemenata polja $\mathbf{F}$ sa standardno definisanim sabiranjem po komponentama i množenjem skalarom po komponentama (vidi primer* **11.2(6)***).*

☞ Tako je npr. svaki n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ izomorfan sa vektorskim prostorom $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, i najveći broj primera i zadataka u ovoj zbirci je upravo vezan za linearne transformacije iz vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ u vektorski prostor $\mathbb{R}^m$.

Teorema 12.6 *Neka je $\mathbf{F}$ proizvoljno polje. Preslikavanje $f : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$ je linearna transformacija ako i samo ako je f oblika*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (&\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ &\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ &\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n) \end{aligned} \tag{12.1}$$

odnosno u matričnom zapisu

$$[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gde su $\alpha_{ij} \in F$ neki elementi polja $\mathbf{F}$ (npr. realni brojevi).

Teorema 12.7 *Neka su V_1, V_2 i V_3 vektorski prostori nad istim poljem, i neka su funkcije $f : V_1 \to V_2$ i $g : V_2 \to V_3$ linearne transformacije. Tada je i $h = g \circ f : V_1 \to V_3$ linearna transformacija, i pri tome, ako su M_f i M_g matrice linearnih transformacija f i g redom, tada je $M_h = M_f \cdot M_g$ matrica linearne transformacije h.*

Dakle, svaka od m komponenti slike $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ linearne transformacije $f:\mathbf{F}^n\to\mathbf{F}^m$ mora biti oblika

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{12.2}$$

za neke elemente $c_1,c_2,\dots,c_n$ polja $\mathbf{F}$. ✎ Za linearnu transformaciju f i „skalare” $\alpha_{ij}\in F$ iz prethodne teoreme, matrica $M_f=\left[\alpha_{ij}\right]_{m\times n}$ je tzv. ***matrica linearne transformacije*** f u standardnoj bazi. Ako drugačije ne naglasimo, podrazumevamo da je matrica linearne transformacije zadana u odnosu na standardnu bazu.

Dakle, svaka linearna transformacija $f:\mathbf{F}^n\to\mathbf{F}^m$ se može „poistovetiti” tj. jednoznačno identifikovati sa njoj odgovarajućom matricom $M_f=\left[\alpha_{ij}\right]_{m\times n}$ nad poljem $\mathbf{F}$, takvom da za sve $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F^n$ i $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)\in F^m$ važi

$$f(x)=y \quad\Leftrightarrow\quad M_f\cdot[x]=[y]$$

gde su $[x]=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$ i $[y]=[y_1,y_2,\dots,y_n]^T$ matrice-kolone koje odgovaraju vektorima x i y.

Definicija 12.4 *Linearna transformacija (homomorfizam) f je* **regularna** *ako i samo ako je ona bijektivna, tj. ako i samo ako je izomorfizam.*

Definicija 12.5 *Linearna transformacija f je regularna ako i samo ako je njena matrica M_f kvadratna i regularna, odnosno* $\det M_f\neq 0$.

Teorema 12.8

(a) *Rang linearne transformacije $f:F^n\to F^m$ jednak je rangu njene matrice M_f, odnosno važi* $\dim(\operatorname{Img}(f))=\operatorname{rang}\left(M_f\right)$.

(b) *Ako su $f:F^n\to F^k$ i $g:F^k\to F^m$ linearne transformacije sa njima odgovarajućim matricama M_f i M_g, tada je $h=g\circ f:F^n\to F^m$ takođe linearna transformacija, a njena matrica M_h se može dobiti kao $M_h=M_g\cdot M_f$.*

Primer 12.1 *Neka je $\vec{x}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}=(x_1,x_2,x_3)$ proizvoljni vektor iz skupa svih slobodnih vektora $V\simeq\mathbb{R}^3$, neka je $\vec{m}=m_1\vec{i}+m_2\vec{j}+m_3\vec{k}=(m_1,m_2,m_3)$ neki dati slobodni vektor, i neka je $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ funkcija definisana sa $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{m}\cdot\vec{x}$. Funkcija $f(x_1,x_2,x_3)=\vec{m}\cdot\vec{x}=m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3$ je linearna transformacija jr je oblika* (**??**.1). *Za $(m_1,m_2,m_3)=(0,0,0)$ očigledno nije ni injektivna ni sirjektivna, i u tom slučaju je njena matrica $\left[\begin{array}{ccc}0&0&0\end{array}\right]$, i ona je ranga* 0. *Ako je $(m_1,m_2,m_3)\neq(0,0,0)$, njena matrica $M_f=\left[\begin{array}{ccc}m_1&m_2&m_3\end{array}\right]$ je ranga* 1, *te je* $\dim(\operatorname{Img}(f))=1=\dim(\mathbb{R})$, *odakle sledi da je* $\operatorname{Img}(f)=\mathbb{R}$, *te je linearna transformacija f sirjektivna. Kako je* $\dim(V)=3>\dim(\operatorname{Img}(f))=1$, *linearna transformacija f nije injektivna. Na primer, ako je $m_i=0$ za bar jedno i, recimo $m_1=0$, tada je $f(5,0,0)=f(8,0,0)=0$, a ako je $m_i\neq 0$ za sve i, tada je npr. $f(1,0,0)=f\left(0,\dfrac{m_1}{m_2},0\right)=m_1$.* ✔

Primer 12.2 *Neka je funkcija $\psi:\mathbb{R}^3\to V$ definisana sa $\psi(x_1,x_2,x_3)=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}$, gde su $\mathbb{R}^3=\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot\right)$ i $\mathbb{V}=(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ redom vektorski prostori svih uređenih trojki, i svih slobodnih vektora. Funkcija ψ jeste linearna transformacija jer je $\mathbb{V}$ izomorfan sa*

$\mathbb{R}^3$, *i funkcija* $\psi(x_1,x_2,x_3) = x_1\vec{i}+x_2\vec{j} = (x_1,0,0)+(0,x_2,0) = (x_1,x_2,0)$ *je oblika* (**??**.1). *Injektivna nije jer je npr.* $\psi(1,2,3) = \psi(1,2,4) = (1,2,0)$. *Nije ni sirjektivna jer npr. ne postoji* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *takav da je* $\psi(x_1,x_2,x_3) = (1,1,1)$. *Dakle, nije izomorfizam.* ✔

Primer 12.3 *Neka je* $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \in V$, *gde je V prostor slobodnih vektora, i neka je funkcija* $\varphi : V \to R^3$ *definisana sa* $\varphi\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_3\vec{k}\right) = (x_1,x_2,x_3)$, *tj.* $\varphi(\vec{x}) = \left(\vec{x}\vec{i},\vec{x}\vec{j},\vec{x}\vec{k}\right)$. *Funkcija* φ *jeste linearna transformacija jer je* $\mathbb{V}$ *izomorfan sa* $\mathbb{R}^3$, *i funkcija* φ *je oblika* (**??**.1). *Kako je prostor* $\mathbb{V}$ *izomorfan sa prostorom* $\mathbb{R}^3$, *možemo je smatrati identičkom funkcijom skupa* $\mathbb{R}^3$, *te je stoga bijektivna, a onda i izomorfizam.* ✔

Primer 12.4 *Neka je funkcija* $\psi : \mathbb{R}^3 \to V$ *definisana sa* $\psi(x_1,x_2,x_3) = x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_2\vec{j}$, *gde su* $\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R},+,\cdot\right)$ *i* $(V,\mathbb{R},+,\cdot)$ *redom vektorski prostori svih uređenih trojki realnih brojeva i svih slobodnih vektora. Funkcija* $\psi(x_1,x_2,x_3) = x_1\vec{i}+x_2\vec{j}+x_2\vec{j} = (x_1,x_2,x_2)$ *jeste linearna transformacija jer je oblika* (**??**.1). *Nije sirjektivna jer npr. ne postoji* $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ *takvo da je* $\psi(x_1,x_2,x_3) = (1,2,3)$ *(jer su druga i treća komponenta u* $\psi(x_1,x_2,x_3)$ *jednake, a kod* $(1,2,3) \in V$ *to nije slučaj). Funkcija* ψ *takođe nije ni injektivna jer je npr.* $\psi(1,2,3) = \psi(1,2,4) = (1,2,2)$. *Matrica ove linearne transformacije je* $M_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *i ona je ranga* 2, *te je* $\dim(\mathrm{Img}(\psi)) = 2$. ✔

Zadatak 12.1 *Ispitati koje su od navedenih funkcija linearne transformacije, i za one koje jesu, napisati njihove matrice:*

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 7x-5y$,

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (0,x)$,

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (0,0,\sin(x+y+z))$,

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+\cos(2)\cdot y$,

(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3+x^2+x$,

(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (0,0,0)$,

(7) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y,x)$,

(8) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y-z,2x+2y+z,x+2y+3z)$,

(9) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$,

(10) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y,x-y)$,

(11) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = \left(x^2+2y,x+2,0\right)$,

(12) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x,3x)$,

(13) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x,x-2z)$,

(14) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (2y,x-y,3x+y)$,

(15) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},x+y\right)$,

(16) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(\dfrac{x+2y}{3x-y}, 2x-3y\right).$

➥ ***Rešenje:*** Funkcija je linearna transformacija ako i samo ako je oblika (**??**.1).

(1) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 7 & -5 \end{bmatrix}$.

(2) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) NE.

(4) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 1 & \cos(2) \end{bmatrix}$.

(5) NE.

(6) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(7) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(8) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(9) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$.

(10) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(11) NE.

(12) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(13) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(14) DA, $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(15) NE.

(16) NE. ☑

Zadatak 12.2 *Ispitati za koje vrednosti parametara $a,b,c \in \mathbb{R}$ su navedene funkcije linearne transformacije, i za one koje jesu, naći odgovarajuću matricu i diskutovati njen rang.*

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(3^{ax+b}y - bz, \sin(a-b)y\right).$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = ((ax-bx)y, x+ab).$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = ((a-bx)y, x+ab)$.

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = ax+bxy+cy^3$.

(5) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (sin(b+\pi)x - y^a - z, a\cdot y)$.

(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = ax+bxy^a+cy$.

(7) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (z-bxy, 1+a^{x+a})$.

(8) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(a^3x+y^b, bx^2-z\right)$.

(9) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (ax+b, x+a, 2^c x+y)$.

(10) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (ax+b, x+a, 2^c+y)$.

(11) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(ax+y^b, bx-z\right)$.

(12) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(ax+y^b, (b+1)x-y\right)$.

(13) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(z-bxy, e^{ax+by}-1\right)$.

➥ ***Rešenje:*** Funkcija je linearna transformacija ako i samo ako je oblika (**??**.1), odnosno svaka komponenta slike $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je oblika (**??**.2), te s obzirom na to vršimo diskusiju po parametrima.

(1) U prvoj komponenti $3^{ax+b}y - bz$ slike, 3^{ax+b} mora biti konstanta, što je tačno za $a = 0$. U drugoj komponenti $\sin(a-b)y$ je $\sin(a-b)$ konstanta za sve a i b. Dakle, f je linearna transformacija za $a = 0$, i tada je $f(x,y,z) = \left(3^b y - bz, \sin(-b)y\right)$. Pri tome, matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 3^b & -b \\ 0 & \sin(-b) & 0 \end{bmatrix}$. Za $b = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je matrica $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & k\pi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ranga 1, a za $b \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je matrica $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -b \\ 0 & \sin(-b) & 0 \end{bmatrix}$ ranga 2.

(2) Iz prve komponente $(ax-bx)y = (a-b)xy$ sledi $a = b$, a iz druge $a = 0$ ili $b = 0$, te je f linearna transformacija za $a = b = 0$. Matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (0,x)$ je $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 1.

(3) Iz prve komponente $(a-bx)y = ay - bxy$ sledi $b = 0$, a iz druge $a = 0$ ili $b = 0$, te je f linearna transformacija za $b = 0$. Matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = ((y,x))$ je $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 2.

(4) f je linearna transformacija za $b = c = 0$, i tada je $f(x,y) = ax$. Matrica linearne transformacije f je $M_f = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 0 za $a = 0$, a ranga 1 za $a \neq 0$.

(5) Na osnovu prve komponente $sin(b+\pi)x - y^a - z$ sledi $a = 1$, a druga komponenta jeste oblika (**??**.2) za svako $a \in \mathbb{R}$. Matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (sin(b+\pi)x - y - z, y)$ je $M_f = \begin{bmatrix} sin(b+\pi) & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 2 za sve $b \in \mathbb{R}$.

(6) f je linearna transformacija za $b = 0 \vee a = 0$.

U slučaju $b = 0$, matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = ax+cy$ je $M_f = \begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix}$, i ona je ranga 0 za $a = c = 0$, a ranga 1 za $a \neq 0 \vee c \neq 0$.

U slučaju $a = 0$, matrica linearne transformacije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = bx+cy$ je $M_f = \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix}$, i ona je ranga 0 za $b = c = 0$, a ranga 1 za $b \neq 0 \vee c \neq 0$.

(7) Druga komponenta $1 + a^{x+a}$ je funkcija definisana samo za $a > 0$, ali nije oblika (**??**.2) ni za koje $a \in \mathbb{R}$, te f nije linearna transformacija ni za koje $a, b \in \mathbb{R}$.

(8) Prva komponenta $a^3x + y^b$ je oblika (**??**.2) za $b = 1$, a druga komponenta $bx^2 - z$ za $b = 0$, te f nije linearna transformacija ni za koje $a, b \in \mathbb{R}$.

(9) Prva komponenta $ax + b$ slike je oblika (**??**.2) za $b = 0$, druga $x + a$ za $a = 0$, a treća $2^c x + y$ je oblika (**??**.2) za sve $c \in \mathbb{R}$, te je f linearna transformacija ako i samo ako je $a = b = 0$, i tada je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (0, x, 2^c x + y)$. Matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2^c & 1 \end{bmatrix}$ koja je ranga 2 za sve $c \in \mathbb{R}$.

(10) Kako je $2^c > 0$ za sve $c \in \mathbb{R}$, funkcija f nije linearna transformacija ni za koje $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(11) Druga komponenta $bx - z$ slike je oblika (**??**.2) za sve $b \in \mathbb{R}$, a prva $ax + y^b$ za $b = 1$. Dakle, f je linearna transformacija za $b = 1$ i $a \in \mathbb{R}$, i tada je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (ax + y, x - z)$. Njena matrica je $M_f = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 2 za sve $a \in \mathbb{R}$.

(12) Druga komponenta $(b+1)x - y + \sin(cx)$ slike je oblika (**??**.2) za sve $b \in \mathbb{R}$ i $c = 0$, a prva $a^2x + y^{b^2}$ za sve $a \in \mathbb{R}$ i $b^2 = 1$, odnosno $b \in \{-1, 1\}$. Dakle, f je linearna transformacija za $a \in \mathbb{R}$, $b \in \{-1, 1\}$ i $c = 0$.

Za $b = -1$ i $c = 0$ je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \big(a^2x + y, -y\big)$. Matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 1 za $a = 0$, a ranga 2 za sve $a \neq 0$.

Za $b = 1$ i $c = 0$ je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \big(a^2x + y, 2x - y\big)$. Matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ a^2+2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 2 za sve $a \in \mathbb{R}$ jer je $a^2 + 2 \neq 0$.

(13) Druga komponenta $e^{ax+by} - 1$ je oblika (**??**.2) smo ako je $e^{ax+by} - 1 \equiv 1$ odnosno $ax + by \equiv 0$, a to je samo za $a = b = 0$. U tom slučaju je takođe i prva komponenta $z - bxy = z$ oblika (**??**.2), tako da je f linearna transformacija ako i samo ako je $a = b = 0$. Tada je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (z, 0)$, matrica ove linearne transformacije je $M_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, i ona je ranga 1.

☑

Zadatak 12.3 *U zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ diskutovati kada je data linearna transformacija f injektivna, kada je sirjektivna, i kada je izomorfizam.*

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (ax+3y+z, -3x+ay)$.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(e^a x + \sin(a)y + z, \left(a^2-1\right)x + (a+1)y\right)$.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (ax+2y, 2x+ay)$.

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y) = (x-2y, 0, 2x+ay, 3x+(a-2)y)$.

➥ ***Rešenje:*** Neka je M_f matrica linearne transformacije f.

Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je sirjektivna ako i samo ako je $n \geq m$ i pri tome je $\mathrm{Img}(f) = \mathbb{R}^m$, odnosno ako i samo ako je $\dim(\mathrm{Img} f) = m \leq n$, odnosno ako i samo ako je $\mathrm{rang}\left(M_f\right) = m \leq n$.

Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je injektivna ako i samo ako je $n \leq m$ i pri tome je $\dim(\mathrm{Img} f) = n \leq m$, odnosno ako i samo ako je $\mathrm{rang}\left(M_f\right) = n \leq m$.

Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je izomorfizam (bijektivna linearna transformacija) ako i samo ako je $n = m$, pri čemu je njena matrica M_f kvadratna matrica ranga $n = m$, odnosno ako i samo ako je $\det\left(M_f\right) \neq 0$.

(1) Linearna transformacija f nije injektivna jer je $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3 > 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$. Zbog toga nije ni izomorfizam. Kako je njena matrica $M_f = \begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ -3 & a & 0 \end{bmatrix}$ ranga $2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$ za sve $a \in \mathbb{R}^2$, sledi da je f sirjektivna za sve $a \in \mathbb{R}^2$.

(2) Linearna transformacija f nije injektivna jer je $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3 > 2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$. Zbog toga nije ni izomorfizam ni za koju vrednost $a \in \mathbb{R}$. Kako je njena matrica $M_f = \begin{bmatrix} e^a & \sin(a) & 1 \\ a^2-1 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$ ranga $2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$ za $a \neq -1$, sledi da je f sirjektivna za $a \neq -1$. Za $a = -1$ je matrica $M_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} & \sin(-1) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ranga $1 < \dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$, te za $a = -1$ linearna transformacija f nije sirjektivna.

(3) Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sa matricom $M_f = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$ je i injektivna i sirjektivna i izomorfizam ako i samo ako je $\det\left(M_f\right) \neq 0$. Kako je

$$\det\left(M_f\right) = a^2 - 4 = (a+2)(a-2) \neq 0,$$

za $a \notin \{-2,2\}$, sledi da je f izomorfizam za $a \notin \{-2,2\}$, dok za $a \in \{-2,2\}$ linearna transformacija f nije izomorfizam, pri čemu nije ni injektivna ni sirjektivna.

(4) Linearna transformacija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ nije sirjektivna ni za koje $a \in \mathbb{R}$ jer je $\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2 < 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$. Zbog toga nije ni izomorfizam ni za koju vrednost $a \in \mathbb{R}$. Njena matrica je

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 2 & a \\ 3 & a-2 \end{bmatrix} \overset{[1]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & a \\ 3 & a-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{[2]}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a+4 \\ 3 & a+4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1] - Drugu vrstu prebacujemo na mesto poslednje vrste.

[2] - Prvu kolonu pomnoženu sa 2 dodajemo drugoj.

Za $a \neq -4$ je matrica $M_f \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a+4 \\ 3 & a+4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ranga $2 = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)$, te je za $a \neq -4$ linearna transformacija f injektivna. Za $a = -4$ je matrica $M_f \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ranga $1 < \dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2$, te za $a = -4$ linearna transformacija f nije injektivna. ☑

Zadatak 12.4 *Neka je $f : V \to W$ linearna transformacija prostora V u prostor W. Ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(1) *V i W su vektorski prostori nad istim poljem.*

(2) *Funkcija f je bijektivna.*

(3) *Prostori V i W su izomorfni.*

(4) $\dim(V) \geq \dim(W)$.

(5) *$f(V)$ je potprostor prostora W.*

(6) $f(x) = \vec{0} \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

(7) *Ako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno nezavisna n-torka vektora u V, tada je i n-torka vektora $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ linearno nezavisna u W.*

(8) *Ako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ linearno zavisna n-torka vektora u V, tada je i n-torka vektora $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ linearno zavisna u W.*

(9) *Ako su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektori iz V koji generišu vektorski prostor V, tada i vektori $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ generišu prostor W.*

(10) *Ako je $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza prostora V, tada je i $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ baza prostora W.*

➥ ***Rešenje:***

(1) DA, naravno.

(2) NE, u opštem slučaju.

(3) NE u opštem slučaju. Samo ako je linearna transformacija f bijektivna, odnosno izomorfizam.

(4) NE. U opštem slučaju, može da važi bilo koji odnos između $\dim(V)$ i $\dim(W)$.

(5) DA, to je teorema.

(6) NE. Naime, implikacija $x = \vec{0} \Rightarrow f(x) = \vec{0}$, odnosno $f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$, jeste tačna (teorema), ali $f(x) = \vec{0} \Rightarrow x = \vec{0}$ ne važi. Linearna transformacija f može i vektore $x \neq \vec{0}$ prostora V da preslikava u nula-vektor $\vec{0}$ prostora W. Npr. $f : V \to W$, $f(x) = \vec{0}$, $x \in V$ čak sve vektore prostora V preslikava u nula-vektor prostora W (matrica takve linearne transformacije f je nula-matrica).

(7) NE u opštem slučaju. Ovo je tačno samo ako je f injektivna linearna transformacija, odnosno ako za njenu matricu M_f važi $\text{rang}\left(M_f\right) = \dim(V)$.

(8) DA. Ako su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ linearno zavisni u V, tada se neki od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostalih, npr. $a_1 = \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ za neke skalare $\alpha_2, \ldots, a_n$ iz polja nad kojim su i prostor V i prostor W. Ali, kako je f linearna transformacija, tada važi

$$f(a_1) = f(\alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_2 f(a_2) + \ldots + \alpha_n f(a_n),$$

te je vektor $f(a_1)$ izražen kao linearna kombinacija vektora $f(a_2), \ldots, f(a_n)$ u W, što znači da su $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$ linearno zavisni vektori u W.

(9) NE. Na primer, za $f : V \to W$, $f(x) = \vec{0}$, $x \in V$ (gde je W proizvoljan ne-nula prostor) i proizvoljne vektore $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koji generišu prostor V, važi da skup $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) = \left(\vec{0}\right)$ ne generiše W. Ili na primer, ako je $\dim(W) > n$, tada $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ očigledno ne generišu W.

(10) NE u opštem slučaju. Ovo je tačno samo ako je $\dim(V) = \dim(W)$, i pri tome je f bijektivna linearna transformacija, tj. izomorfizam. ☑

Zadatak 12.5 *Ako je linearna transformacija $f : V \to W$ izomorfizam, ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(1) *Funkcija f je bijektivna.*

(2) *V i W su vektorski prostori nad istim poljem.*

(3) $V = W$.

(4) $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(5) *$f(V)$ je potprostor prostora W.*

(6) *Postoji funkcija f^{-1}, i ona je izomorfizam prostora W u prostor V.*

(7) *Za svaku bazu $(v_1, ..., v_n)$ prostora V, n-torka vektora $(f(v_1), ..., f(v_n))$ je baza prostora W.*

(8) *Za svaku linearno zavisnu n-torku vektora $(v_1, ..., v_n)$ prostora V, n-torka vektora $(f(v_1), ..., f(v_n))$ je linearno zavisna u prostoru W.*

(9) $x = \vec{0} \Leftrightarrow f(x) = \vec{0}$.

➥ ***Rešenje:***

(1) DA, naravno.

(2) DA, to je tačno za svaku linearnu transformaciju.

(3) NE. Izomorfne vektorske prostore možemo smatrati u suštini jednakim sa stanovišta vektorskih prostora, ali formalno, i sa nekih drugih aspekata su skupovi V i W ipak različiti.

(4) DA. U stvari, kako je f izomorfizam, važi čak i $\dim(V) = \dim(W)$.

(5) DA, i to je tačno za svaku linearnu transformaciju.

(6) DA, to je teorema.

(7) DA, to je teorema.

(8) DA, i to je tačno za svaku linearnu transformaciju, pa i za izomorfizam (vidi zadatak **12.4**).

(9) DA. Implikacija $x = \vec{0} \Rightarrow f(x) = \vec{0}$ je tačna za svaku linearnu transformaciju (vidi zadatak **12.4**), a za izomorfizam, kao bijektivnu funkciju, je tačna i obrnuta implikacija. ☑

Zadatak 12.6 *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linearna transformacija, i neka je $x, y \in \mathbb{R}$. Ispitati tačnost sledećih iskaza.*

(1) $f(0) = 0$.

(2) $f(0) = 1$.

(3) $f(1) = 1$.

(4) $x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

(5) $f(x) = ax$, *za neko* $a \in \mathbb{R}$.

(6) $f(-x) = -x$.

(7) $f(xy) = xf(y)$.

(8) $f(xy) = f(x)f(y)$.

(9) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(10) $f(x+y) = x + f(y)$.

➥ ***Rešenje:*** U ovom primeru je skup skalara $\mathbb{R}$ jednak skupu vektora $\mathbb{R}$, te iz konteksta zavisi kada je koja od promenljivih x i y skalar, a kada vektor.

(1) DA, ovo je teorema, svaka linearna transformacija preslikava nula-vektor u nula-vektor.

(2) Ne, jer je $f(0) = 0 \neq 1$.

(3) NE, npr. za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(4) DA, svaka linearna transformacija preslikava nula-vektor u nula-vektor.

(5) DA, to sledi iz (**??**.1).

(6) NE, npr. za linearnu transformaciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(7) DA. U ovom kontekstu je x skalar a y vektor, te iz definicije linearne transformacije sledi tačnost ovog iskaza.

(8) NE. Važi $f(xy) = xf(y)$ (gde bi x bio skalar a y vektor), pri čemu ne mora biti $f(x) = x$.

(9) DA, po definiciji linearne transformacije (gde su x i y vektori).

(10) NE. Važi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (gde su x i y vektori), pri čemu ne mora biti $f(x) = x$. ☑

Zadatak 12.7 *Za date funkcije ispitati da li su linearne transformacije, i za one koje jesu, naći jezgro, sliku, rang i matricu linearne transformacije.*

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(x^2 + 2y + z, 3x - y\right)$.

(2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ g(x,y) = (3x + 2y, x + 2y - 1, x)$.

(3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ h(x,y) = (\sin(2x + 4y), x - 3y, 0)$.

(4) $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ p(x,y,z) = \left(x - y + 2z, x - 3z, e^{x^2 - xz}\right)$.

(5) $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ t(x,y) = (2x + 4y, x + 2y, -x - 2y)$.

(6) $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ s(x,y,z) = (2x + 4z, 3x + 2y - z, 5x + 2y + 3z)$.

➥ ***Rešenje:*** Od navedenih funkcija, linearne transformacije su samo t i s jer su one i samo one oblika (**??**.1).

(1) Po definiciji, f nije linearna transformacija jer je npr.

$f((1,1,1) + (1,1,1)) = f(2,2,2) = (10,4)$,

$f(1,1,1) + f(1,1,1) = (4,2) + (4,2) = (8,4)$,

dakle $f((1,1,1) + (1,1,1)) \neq f(1,1,1) + f(1,1,1)$.

(2) Funkcija g takođe nije linearna transformacija ni na osnovu teoreme 12.2 jer je $g(0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0)$.

(3) Po definiciji, h nije linearna transformacija jer je npr.

$h((-2,0) + (1,2)) = h(-1,2) = (\sin 6, -7, 0)$,

$$\begin{aligned} h(-2,0) + f(1,2) &= (\sin(-4), -2, 0) + (\sin(10), -5, 0) \\ &= (\sin(-4) + \sin(10), -7, 0), \end{aligned}$$

dakle $h((-2,0) + (1,2)) \neq h(-2,0) + h(1,2)$, jer je $\sin 6 \neq \sin(-4) + \sin(10)$.

(4) Po definiciji, p nije linearna transformacija jer je npr.

$p(2(1,2,3)) = f(2,4,6) = \left(10, -16, e^{-8}\right)$,

$2p(1,2,3) = 2\left(5, -8, e^{-2}\right) = \left(10, -16, 2e^{-2}\right)$,

dakle $p(2(1,2,3)) \neq 2p(1,2,3)$, jer je $e^{-8} \neq 2e^{-2}$.

(5) Po definiciji, t je linearna transformacija jer

$$
\begin{aligned}
&t(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)) = t(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)\\
&= (2(\alpha x_1+\beta x_2)+4(\alpha y_1+\beta y_2),\\
&\quad (\alpha x_1+\beta x_2)+2(\alpha y_1+\beta y_2),\\
&\quad -(\alpha x_1+\beta x_2)-2(\alpha y_1+\beta y_2))\\
&= (2\alpha x_1+2\beta x_2+4\alpha y_1+4\beta y_2,\\
&\quad \alpha x_1+\beta x_2+2\alpha y_1+2\beta y_2,\\
&\quad -\alpha x_1-\beta x_2-2\alpha y_1-2\beta y_2),
\end{aligned}
$$

a s druge strane je

$$
\begin{aligned}
&\alpha t(x_1,y_1)+\beta t(x_2,y_2)\\
&= \alpha(2x_1+4y_1, x_1+2y_1, -x_1-2y_1)+\beta(2x_2+4y_2, x_2+2y_2, -x_2-2y_2)\\
&= (2\alpha x_1+2\beta x_2+4\alpha y_1+4\beta y_2,\\
&\quad \alpha x_1+\beta x_2+2\alpha y_1+2\beta y_2,\\
&\quad -\alpha x_1-\beta x_2-2\alpha y_1-2\beta y_2).
\end{aligned}
$$

Dakle, za sve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ i svako $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$t(\alpha(x_1,y_1)+\beta(x_2,y_2)) = \alpha t(x_1,y_1)+\beta t(x_2,y_2),$$

te po definiciji sledi da t jeste linearna transformacija.

Nađimo $\mathrm{Img}(t) = \{(2x+4y, x+2y, -x-2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. Kako vektori $e_1^{(2)} = (1,0)$ i $e_2^{(2)} = (0,1)$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^2$, i kako je $\mathrm{Img}(t) = t\left(\mathbb{R}^2\right)$ potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, sledi da su vektori

$$
\begin{aligned}
&a_1^{(3)} = t\left(e_1^{(2)}\right) = (2+0, 1+0, -1-0) = (2,1,-1),\\
&a_2^{(3)} = t\left(e_2^{(2)}\right) = (0+4, 0+2, 0-2) = (4,2,-2),
\end{aligned}
$$

generatori podprostora $\mathrm{Img}(t)$ (ne moraju biti baza, oni čine bazu samo ako su još i linearno nezavisni). Pošto je $-2\cdot a_1^{(3)} + 1\cdot a_2^{(3)} = \mathbb{O}$, sledi da su vektori $a_1^{(3)}$ i $a_2^{(3)}$ linearno zavisni, pa će samo npr. $\left\{a_1^{(3)}\right\}$ biti baza jednodimenzionalnog podprostora $\mathrm{Img}(t)$, i preko tog vektora možemo onda izraziti svaki vektor iz skupa iz skupa $\mathrm{Img}(t)$. Naime

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Img}(t) &= \{(2x+4y, x+2y, -x-2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x(2,1,-1)+y(4,2,-2) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x(2,1,-1)+2y(2,1,-1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{(x+2y)(2,1,-1) \mid x,y \in \mathbb{R}\}\\
&= \{z(2,1,-1) \mid z \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Pošto je $\mathrm{Img}(t)$ jednodimenzionalan potprostor, sledi da je $\mathrm{rang}(t) = 1$, a to se može utvrditi i izračunavanjem ranga odgovarajuće matrice ove linearne transformacije. Matricu $M_t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix}$ linearne transformacije t dobijamo tako što uzmemo proizvoljna dva vektora v_1 i v_2 koji čine bazu prostora $\mathbb{R}^2$, dakle proizvoljna dva linearno nezavisna vektora jer je $\mathbb{R}^2$ prostor dimenzije 2, i rešimo po M_t sistem matričnih jednačina

$$M_t \cdot v_1^T = t(v_1)^T \quad \wedge \quad M_t \cdot v_2^T = t(v_2)^T,$$

odnosno njemu ekvivalentni sistem linearnih jednačina. Za računanje je najjednostavnije uzeti vektore standardne baze $e_1^{(2)}$ i $e_2^{(2)}$ (a rezultat je isti za bilo koje vektore koji čine bazu - proveriti za vežbu):

$$\left(M_t \cdot e_1^{(2)} = t\left(e_1^{(2)}\right) \wedge M_t \cdot e_2^{(2)} = t\left(e_2^{(2)}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc} 1\cdot\alpha_{11} & + & 0\cdot\alpha_{12} & = & 2 \\ 1\cdot\alpha_{21} & + & 0\cdot\alpha_{22} & = & 1 \\ 1\cdot\alpha_{31} & + & 0\cdot\alpha_{32} & = & -1 \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{ccccc} 0\cdot\alpha_{11} & + & 1\cdot\alpha_{12} & = & 4 \\ 0\cdot\alpha_{21} & + & 1\cdot\alpha_{22} & = & 2 \\ 0\cdot\alpha_{31} & + & 1\cdot\alpha_{32} & = & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha_{11} = 2 \wedge \alpha_{21} = 1 \wedge \alpha_{31} = -1 \wedge \alpha_{12} = 4 \wedge \alpha_{22} = 2 \wedge \alpha_{32} = -2)$$

$$\Leftrightarrow \quad M_t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ako prvu kolonu matrice M_t pomnoženu sa -2 dodamo drugoj koloni, dobijamo ekvivalentnu matricu koja u drugoj koloni ima sve nule, tj. dobijamo matricu u kojoj postoji najviše jedna linearno nezavisna kolona, odakle sledi da je $\operatorname{rang}(M_t) = \operatorname{rang}(t) = 1$.

Nađimo $\operatorname{Ker}(t) \subseteq \mathbb{R}^2$. Za $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ važi

$$(x,y) \in \operatorname{Ker}(t) \quad \Leftrightarrow \quad t(x,y) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x+4y, x+2y, -x-2y) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x+4y = 0 \wedge x+2y = 0 \wedge -x-2y = 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x+2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y.$$

Dakle, $\operatorname{Ker}(t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = -2y\right\} = \{\alpha(-2,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, te je $\operatorname{Ker}(t)$ jednodimenzionalan podprostor prostora $\mathbb{R}^2$ pri čemu je $\{(-2,1)\}$ jedna njegova baza.

(6) Analogno kao za t, i za s možemo i po definiciji dokayati da je linearna transformacija. Njena matrica je $M_s = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Nađimo $\operatorname{Ker}(s) \subseteq \mathbb{R}^3$. Za $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ važi

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(s) \quad \Leftrightarrow \quad s(x,y,z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x+4z, 3x+2y-z, 5x+2y+3z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & 4z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} 2x & & & + & 4z & = & 0 \\ -2x & & & - & 4z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 0 \\ 5x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z = \alpha \in \mathbb{R} \\ x = -2\alpha \\ y = -\frac{5}{2}(-2\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{7}{2}\alpha \end{array}.$$

Dakle, $\operatorname{Ker}(t)=\left\{\left(-2\alpha,\frac{7}{2}\alpha,\alpha\right)\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\alpha\left(-2,\frac{7}{2},1\right)\;\middle|\;\alpha\in\mathbb{R}\right\}$, te je $\operatorname{Ker}(t)$ jednodimenzionalan podprostor prostora $\mathbb{R}^3$ pri čemu je $\left\{\left(-2,\frac{7}{2},1\right)\right\}$ jedna njegova baza.

Kako je

$$M_s=\begin{bmatrix}2&0&4\\3&2&-1\\5&2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&0&4\\-2&0&-4\\5&2&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&0&-4\\5&2&3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}5&2&3\\-2&0&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&5&3\\0&-2&-4\\0&0&0\end{bmatrix},$$

sledi da je $\dim(\operatorname{Img}(s))=\operatorname{rang}(s)=\operatorname{rang}(M_s)=2$, te je $\operatorname{Img}(s)$ dvodimenzionalan potprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Nađimo jednu njegovu bazu koja se sastoji od 2 vektora. Kako je npr. $s(1,0,0)=(2,3,5)$ i $s(0,1,0)=(0,2,2)$, a vektori $a=(2,3,5)$ i $b=(0,2,2)$ su linearno nezavisni jer je $\operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix}2&3&5\\0&2&2\end{bmatrix}\right)=2$, sledi da je $\{a,b\}$ jedna baza potprostora $\operatorname{Img}(s)$. ☑

Zadatak 12.8 *Neka su $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ i $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ funkcije definisane na sledeći način:*

* $f(x,y,z)=(2,-3,1)\times(x,y,z)+(x,y,z)\times(3,0,-1)$,
* *g je projekcija tačke prostora $\mathbb{R}^3$ na xOy ravan (prostor $\mathbb{R}^2$),*
* $h(x,y)=(2x-6y,x+y,3x+5y)$.

Dokazati da je funkcija $T=h\circ g\circ f$ linearna transformacija, i odrediti njenu matricu.

➥ ***Rešenje:*** Zadatak ćemo rešiti primenom teoreme 12.7. Da je svaka od posmatranih funkcija linearna transformacija, sledi iz (**??**.1), jer se svaka funkcija može predstaviti u odgovarajućem matričnom zapisu.

(1) Za funkciju $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ imamo

$$f(x,y,z)=(2,-3,1)\times(x,y,z)+(x,y,z)\times(3,0,-1)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&1\\x&y&z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x&y&z\\3&0&1\end{vmatrix}$$
$$=(-y-3z,x-2z,3x+2y)+(y,-x+3z,-3y)=(-3z,z,3x-y).$$

U matričnom zapisu

$$f(x,y,z)=\begin{bmatrix}-3z\\z\\3x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-3\\0&0&1\\3&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A_f\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$

gde je A_f matrica linearne transformacije f.

(2) Za funkciju $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ je $g(x,y,z)=(x,y)$. U matričnom zapisu

$$g(x,y,z)=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=A_g\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$

gde je A_g matrica linearne transformacije g.

(3) Funkcija $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $h(x,y)=(2x-6y,x+y,3x+5y)$, matričnom zapisu

$$h(x,y)=\begin{bmatrix}2x-6y\\x+y\\3x+5y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-6\\1&1\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A_h\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix},$$

gde je A_h matrica linearne transformacije h.

Funkcija $T=h\circ g\circ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ je dobro definisana jer je $\mathcal{K}(f)\subseteq\mathcal{D}(g)$ i $\mathcal{K}(g)\subseteq\mathcal{D}(h)$, a na osnovu teoreme 12.7 je funkcija T linearna transformacija, i njena matrica je

$$\begin{aligned}A_T=A_{h\circ g\circ f}=A_h\cdot A_g\cdot A_f&=\begin{bmatrix}2&-6\\1&1\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&-3\\0&0&1\\3&-1&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2&-6\\1&1\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&-3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-12\\0&0&-2\\0&0&-4\end{bmatrix},\end{aligned}$$

te je $T(x,y,z)=(-12z,-2z,-4z)$.

<u>Komentar 1:</u> Vidimo da je $\operatorname{rang}(A_T)=1$, što znači da je $\dim\left(T\left(\mathbb{R}^3\right)\right)=1$, odnosno $T\left(\mathbb{R}^3\right)$ je potprostor dimenzije 1 prostora $\mathbb{R}^3$, dakle prava u $\mathbb{R}^3$ koja prolazi kroz koordinatni početak. Tačnije, iz $T(x,y,z)=(-12z,-2z,-4z)=-2(6z,z,2z)$ vidimo da je koeficijent pravca pomenute prave vektor $(6,1,2)$.

<u>Komentar 2:</u> Kako je $\operatorname{rang}\left(A_f\right)=2$, što znači da je $\dim\left(f\left(\mathbb{R}^3\right)\right)=2$, odnosno $f\left(\mathbb{R}^3\right)$ je potprostor dimenzije 2 prostora $\mathbb{R}^3$, dakle ravan u $\mathbb{R}^3$ koja prolazi kroz koordinatni početak. Tačnije, imamo

$$\begin{aligned}f\left(\mathbb{R}^3\right)&=\{(-3z,z,3x-y)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}\}\\&=\{x(0,0,3)+y(0,0,-1)+z(-3,1,0)\mid(x,y,z)\in\mathbb{R}\}\\&=\mathrm{L}((0,0,3),(0,0,-1),(-3,1,0))\\&=\mathrm{L}((0,0,-1),(-3,1,0)),\end{aligned}$$

jer su vektori $(0,0,3)$ i $(0,0,-1)$ kolinearni, odnosno linearno zavisni, a $(-3,1,0)$ je linearno nezavisan u odnosu na njih. To znači da je $f\left(\mathbb{R}^3\right)$ ravan koja prolazi kroz koordinatni početak i sadrži nekolinearne vektore $(0,0,-1)$ i $(-3,1,0)$, te mu je vektor normale $(0,0,-1)\times(-3,1,0)=(1,3,0)$. Dakle, skup $f\left(\mathbb{R}^3\right)$ je ravan čija je jednačina $x+3y=0$. ☑

Dodatak A

Matematička indukcija, nizovi, kombinatorika, važni identiteti

A.1 Princip matematičke indukcije

Principom matematičke indukcije dokazujemo tvrđenja oblika $\forall n \in \mathbb{N},\ F(n)$. To mogu biti jednakosti, nejednakosti, kao i bilo koji iskazi u kojima figuriše prirodan broj n.

Teorema A.1 *Iskaz $\forall n \in \mathbb{N},\ F(n)$ je tačan*[1] *ako i samo ako*

1. *iskaz $F(1)$ je tačan,*
2. *tačna je implikacija $F(k) \Rightarrow F(k+1)$ za svako $k \in \mathbb{N}$.*

Neki iskazi važe ne za svako $n \in \mathbb{N}$, već počevši od nekog prirodnog broja m. U tom slučaju umesto 1. dokazujemo

1'. iskaz $F(m)$ je tačan.

Pri dokazivanju iskaza $F(k+1)$, kod nekih iskaza nije dovoljno koristiti induktivnu pretpostavku $F(k)$, već je potrebno pretpostaviti i tačnost iskaza $F(k-1), F(k-2), \ldots$. Stoga možemo koristiti sledeći opštiji, ekvivalentan sa A.1 princip matematičke indukcije.

Teorema A.2 *Iskaz $\forall n \in \mathbb{N},\ F(n)$ je tačan ako i samo ako*

1". *iskazi $F(1), F(2), \ldots, F(m)$ su tačni*[2]*,*

2". *za svako $k \in \mathbb{N}$ je tačna je implikacija*

$$(F(1) \wedge F(2) \wedge \ldots \wedge F(k)) \Rightarrow F(k+1).$$

[1] Odnosno, $\forall n \in \mathbb{N},\ F(n)$ je teorema.

[2] Gde je m prirodan broj koji možemo sami odabrati po potrebi.

Primer A.1 *Dokažimo, primenom principa matematičke indukcije, da je za svako $n \in \mathbb{N}$ broj $3^{2n} - 1$ deljiv sa 8, tj. dokažimo da je tačan iskaz*

$$F(n): \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ 3^{2n} - 1 = 8m.$$

- *Za $n = 1$ je $3^2 - 1 = 8 \cdot 1$, tj. iskaz $F(1)$ je tačan;*
- *pretpostavimo da je tačan iskaz $[*] : F(k)$, tj. da je $3^{2k} - 1 = 8m$ za neko $m \in \mathbb{Z}$;*
- *dokazujemo da je iskaz $F(k+1)$ tačan:*

  $3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2k} \cdot 8 + 3^{2k} - 1 \overset{[*]}{=} 3^{2k} \cdot 8 + 8m = 8\big(3^{2k} + m\big),$

  gde je $m' = 3^{2k} + m \in \mathbb{Z}$. ✔

Primer A.2 *Dokažimo matematičkom indukcijom da za svako $n \in \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ važi*

$$F(n): \quad 2^n > n^2.$$

U dokazu ćemo koristiti sledeće pomoćno tvrđenje: za svaki prirodan broj $k \geq 5$ važi

$$G(n): \quad 2^k > 2k + 1.$$

Dokaz tvrđenja $G(k)$ izvodimo matematičkom indukcijom:

- *za $n = 5$ je $2^5 = 32 > 11 = 2 \cdot 5 + 1$;*
- *pretpostavimo da je tačno $G(k)$;*
- *za $k + 1$ je*

  $2^{k+1} = 2(k+1) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^k = 2k + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^k + 2^k = (2k+1) + 2,$

  jer je, s jedne strane, na osnovu induktivne pretpostavke $2^k > 2k + 1$, a s druge strane je očigledno tačno $2^k > 2$ za svako $k > 5$.

Sledi dokaz tvrđenja $F(n)$ matematičkom indukcijom:

- *za $n = 5$ je $2^5 = 32 > 25 = 5^2$;*
- *pretpostavimo da je tačno $F(k)$;*
- *za $n = k + 1$ je*

  $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k \overset{\mathrm{F(k)}}{>} 2^k + k^2 \overset{\mathrm{G(k)}}{>} 2k + 1 + k^2 = (k+1)^2.$ ✔

Primer A.3 *Dokažimo primenom principa matematičke indukcije da se svaki prirodan broj $n \neq 1$ može napisati u obliku proizvoda prostih brojeva. Označimo sa $F(n)$ iskaz „*broj *n* se može napisati u obliku proizvoda prostih brojeva*".*

- *Iskaz $F(n)$ je očigledno tačan za $n = 2$.*
- *Pretpostavimo da je iskaz $F(n)$ tačan za sve $k \leq n$.*
- *Dokazujemo da je iskaz $F(n+1)$ tačan. Ako je $n + 1$ prost broj, tvrđenje važi. Ako $n + 1$ nije prost broj, tada se on može predstaviti u obliku $n + 1 = a \cdot b$, gde su prirodni brojevi a i b manji od $n + 1$, te na osnovu induktivne pretpostavke važi $F(a)$ i $F(b)$, te iz $n + 1 = a \cdot b$ sledi da važi i $F(n+1)$.* ✔

A.2 Aritmetički i geometrijski niz

➢ Aritmetički niz: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

$d = a_{i+1} - a_i, \quad a_n = a_1 + (n-1)d,$

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_{n-i} + a_{n+i}}{2}.$

Zbir prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d). \tag{1.1}$$

➢ Geometrijski niz: $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

$\pm 1 \neq q = \frac{b_{i+1}}{b_i}, \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_i \cdot q^{n-j},$

$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_{n-i} \cdot b_{n+i}.$

Zbir prvih n članova geometrijskog niza:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \tag{1.2}$$

Zbir svih članova geometrijskog niza:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} b_i = b_1 \frac{1}{1 - q}. \tag{1.3}$$

A.3 Neki važni identiteti

✯ Binomni obrazac[3]:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.4}$$

[3] Važi za elemente a i b proizvoljnog komutativnog prstena i prirodan broj n - vidi [RD05].

Dodatak B

Podstrukture, homomorfizmi i izomorfizmi

Definicija B.1 *Neka je*

$$\mathcal{A} = \left(A, *, \circ, \ldots, \overline{\ }, \tilde{\ }, \ldots, k, c \ldots\right)$$

neka algebarska struktura (grupoid / grupa / Bulova algebra / prsten / polje / ...), gde su[1]

A	-	*neprazan skup (tzv. nosač strukture $\mathcal{A}$),*
$*, \circ, \ldots$	-	*binarne operacije skupa A,*
$\overline{\ }, \tilde{\ }, \ldots$	-	*unarne operacije skupa A,*
$k, c \ldots$	-	*konstante (nularne operacije), tj. fiksni elementi skupa A.*

Ako je $\emptyset \neq A_1 \subseteq A$, ako su $*_1, \circ_1, \ldots, \overline{\ }^{1}, \tilde{\ }^{1}, \ldots$ restrikcije operacija $*, \circ, \ldots, \overline{\ }, \tilde{\ }, \ldots$ skupa A na skup A_1, i ukoliko je $\mathcal{A}_1 = \left(A_1, *_1, \circ_1, \ldots, \overline{\ }^{1}, \tilde{\ }^{1}, \ldots, k, c \ldots\right)$ algebarska struktura istog tipa kao $\mathcal{A}$, tada kažemo da je $\mathcal{A}_1$ **podstruktura** *odgovarajućeg tipa strukture $\mathcal{A}$ (***podgrupoid / podgrupa / podalgebra / podprsten / podpolje** */ ...).*

ℹ Konstante podstrukture $\mathcal{A}_1$ su jednake odgovarajućim konstantama strukture $\mathcal{A}$.

ℹ Kod grupoida i Bulovih algebri, da bi struktura $\mathcal{A}_1$ bila podgrupoid / podalgebra grupoida / Bulove algebre $\mathcal{A}$, dovoljno je da su sve operacije, uključujući i konstante kao nularne operacije, zaista zatvorene na skupu A_1 (teorema). Kod npr. grupa to nije slučaj - naime, ako je $\mathcal{A} = (A, *)$ grupa i ako je operacija $*$ zatvorena na nepraznom skupu $A_1 \subseteq A$, struktura $\mathcal{A}_1 = (A_1, *_1)$ ne mora biti grupa. Isto važi i za prstene i polja (vidi primer B.1).

ℹ Neki autori, u duhu definicije B.1, i grupu definišu kao uređenu trojku $(A, *, ', e)$ kod koje je $A \neq 0$, $e \in A$, $*$ je asocijativna binarna operacija skupa A, $'$ je unarna operacija skupa A, i za svako $x \in A$ je $x * x' = x' * x = e$.

ℹ Ako je $\mathcal{A} = (A, *)$ grupa sa neutralnim elementom e, tada svaka njegova podgrupa $\mathcal{A}_1 = (A_1, *)$ sadrži element e koji je neutralni element i u podgrupi. Međutim, ako je

[1]Postoje i algebarske strukture sa ternarnim,...,n-arnim operacijama.

$\mathcal{A} = (A,*)$ grupoid sa neutralnim elementom e, i ako je $\mathcal{A}_1 = (A_1,*)$ njegov pogrupoid, tada, u opštem slučaju ne mora biti $e \in A_1$, već postoje primeri u kojima podrupoid $\mathcal{A}_1 = (A_1,*)$ uopšte nema neutralni element, a s druge strane postoje i primeri u kojima podrupoid $\mathcal{A}_1 = (A_1,*)$ ima neutralni element $e_1 \neq e$ - vidi zadatak **6.32**.

Primer B.1

- ✩ *Uređeni par* $(\mathbb{R},+)$ *je grupa, operacija* $+$ *je zatvorena na skupu* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$*, ali* $(\mathbb{N},+)$ *nije grupa.*
- ✩ *Uređena trojka* $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ *je prsten, operacije* $+$ *i* $\cdot$ *su zatvorene na skupu* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$*, ali* $(\mathbb{N},+,\cdot)$ *nije prsten.*
- ✩ *Uređena trojka* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *je polje, operacije* $+$ *i* $\cdot$ *su zatvorene na skupu* $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$*, ali* $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ *nije polje.* ✔

Definicija B.2 *Neka je* $\mathbb{A}$ *skup svih grupoida / grupa / Bulovih algebri / prstena / polja / ..., i neka je binarna relacija* $\trianglelefteq$ *skupa* $\mathbb{A}$ *definisana na sledeći način: za* $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2 \in \mathbb{A}$ *je* $\mathcal{A}_1 \trianglelefteq \mathcal{A}_2$ *ako i samo ako je* $\mathcal{A}_1$ *podgrupoid / podgrupa / podalgebra / podprsten / podpolje / ... od* $\mathcal{A}_2$*.*

Teorema B.1 *Binarna relacija* $\trianglelefteq$ *skupa* $\mathbb{A}$ *iz definicije* **B.2** *je relacija poretka.*

Definicija B.3 *Neka su*

$$\mathcal{A}_1 = \left(A_1, *_1, \circ_1, \ldots_1, \overset{-1}{\ }, \overset{\sim 1}{\ }, \ldots, k_1, c_1 \ldots\right),$$
$$\mathcal{A}_2 = \left(A_2, *_2, \circ_2, \ldots_2, \overset{-2}{\ }, \overset{\sim 2}{\ }, \ldots, k_2, c_2 \ldots\right),$$

dve algebarske strukture istog tipa (grupoidi / grupe / Bulove algebre / prsteni / polja / ...), gde su

A_1, A_2	-	*skupovi nosači struktura* $\mathcal{A}_1$ *i* $\mathcal{A}_2$*,*
$*_1, \circ_1, \ldots$	-	*binarne operacije skupa* A_1*,*
$*_2, \circ_2, \ldots$	-	*binarne operacije skupa* A_2*,*
$\overset{-1}{\ }, \overset{\sim 1}{\ }, \ldots,$	-	*unarne operacije skupa* A_1*,*
$\overset{-2}{\ }, \overset{\sim 2}{\ }, \ldots,$	-	*unarne operacije skupa* A_2*,*
$k_1, c_1 \ldots$	-	*konstante skupa* A_1*,*
$k_2, c_2 \ldots$	-	*konstante skupa* A_2*.*

Neka je $\varphi : A_1 \to A_2$ *funkcija sa osobinama*

1. $\forall x,y \in A_1, \quad \varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y),$

   $\forall x,y \in A_1, \quad \varphi(x \circ_1 y) = \varphi(x) \circ_2 \varphi(y),$

   $\vdots$

2. $\forall x \in A_1, \quad \varphi\left(\overline{x}^1\right) = \overline{\varphi(x)}^2,$

   $\forall x \in A_1, \quad \varphi\left(\tilde{x}^1\right) = \widetilde{\varphi(x)}^2,$

   $\vdots$

3. $\varphi(k_1) = k_2, \quad \varphi(c_1) = c_2, \quad \ldots$

Tada kažemo da je φ **homomorfizam** *iz strukture $\mathcal{A}_1$ u strukturu $\mathcal{A}_2$.*

Ako je homomorfizam φ bijektivna funkcija, tada kažemo da je φ **izomorfizam** *iz strukture $\mathcal{A}_1$ u strukturu $\mathcal{A}_2$.*

🛈 Ako su $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ strukture istog tipa, tada može da postoji više homomorfizama i izomorfizama iz $\mathcal{A}_1$ u $\mathcal{A}_2$.

🛈 Izomorfizam iz $\mathcal{A}_1$ u $\mathcal{A}_2$ „prenosi" sve osobine strukture $\mathcal{A}_1$ u strukturu $\mathcal{A}_2$, tj. ako je $\varphi : A_1 \to A_2$ izomorfizam, tada neka osobina (tvrđenje) važi u strukturi $\mathcal{A}_1$ ako i samo ako važi u strukturi $\mathcal{A}_2$. Drugim rečima, ako je $\varphi : A_1 \to A_2$ izomorfizam, tada su strukture $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ „jednake" sa stanovišta teorije tih struktura[2] jer u njima važe iste zakonitosti. Možemo reći da se tada strukture $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ razlikuju samo u oznakama elemenata i operacija. Ako su operacije struktura $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ zadane Kejlijevim tablicama, to znači da u Kejlijevim tablicama strukture $\mathcal{A}_1$, zamenom elemenata $x \in A_1$ elementima $\varphi(x) \in A_2$ dobijamo[3] Kejlijeve tablice strukture $\mathcal{A}_2$.

🛈 Kako izomorfizam iz $\mathcal{A}_1$ u $\mathcal{A}_2$ „prenosi" sve osobine strukture $\mathcal{A}_1$ u strukturu $\mathcal{A}_2$ (i obratno), izomorfizam se u matematici tipično koristi na sledeći način. Ako su nam nepoznate neke ili sve osobine strukture $\mathcal{A}_1$, a uočimo da postoji izomorfizam $\varphi : A_1 \to A_2$, gde su nam dobro poznate osobine strukture $\mathcal{A}_2$, tada možemo konstatovati da iste osobine važe i za strukturu $\mathcal{A}_1$.

Definicija B.4 *Neka je $\mathbb{A}$ skup svih grupoida / grupa / Bulovih algebri / prstena / polja / ..., i neka je binarna relacija $\cong$ skupa $\mathbb{A}$ definisana na sledeći način: za $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{A}$ je $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$ ako i samo ako postoji izomorfizam $\varphi : A_1 \to A_2$.*

Teorema B.2 *Binarna relacija $\cong$ skupa $\mathbb{A}$ iz definicije* **B.4** *je relacija ekvivalencije.*

Za dokaz prethodne teoreme pogledajte zadatak **??**.

🛈 S obzirom na to da je relacija $\cong$ simetrična, često kažemo da „su strukture $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ izomorfne", jer je $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$ ako i samo ako je $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_1$.

[2]Sa drugih stanovišta mogu biti sasvim različite, počevši od prirode elemenata skupova A_1 i A_2 (npr. elementi skupa A_1 mogu biti brojevi, a elementi skupa A_2 vektori).

[3]Uz eventualnu promenu redosleda elemenata u graničnim vrstama i kolonama.

Indeks

Bibliografija

[RD05] R. Doroslovački, *Elementi opšte i linearne algebre*, IGT, 2005.

[ZbiDN09] R. Doroslovački, Lj. Nedović, *Zbirka zadataka iz diskretne matematike*, IGT, 2009.

[TestZbiDN11] Rade Doroslovački, Ljubo Nedović, *TESTOVI iz Diskretne matematike i linearne algebre*, Novi Sad, 2011.