Prezime, ime, br. indeksa: ____________________

PREDISPITNE OBAVEZE

- $\big(x^2-3x-1\big)(x+3)=$ ____________________
- Zaokružiti sve korene polinoma $x^4+x^3-8x^2-12x$: $0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad -3 \quad 3$
- Za kompleksne brojeve $z=1-i$ i $w=-2+i$ je

  $zw=$ ________, $|z|=$ ________, $\overline{z}=$ ________,

  $\arg z=$ ________, $R_e(z)=$ ________, $I_m(z)=$ ________.
- Za matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ je

  $\det A=$ $\qquad\qquad$ $A+B=$
- Napisati skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 2\\ 2x & - & 5y & = & 2\end{array}$

  $\mathcal{R}=$
- Za vektore $\vec{a}=(1,2,2)$ i $\vec{b}=(1,2,1)$ je

  $\vec{a}-\vec{b}=$ ____________, $|\vec{a}|=$ ____________, $3\vec{a}=$ ____________
- Napisati matricu M_f linearne transformacije
  $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x-5y+2z$: $\quad M_f=$

TEST

- Svodljiv polinom sa koeficijentima iz polja $\mathbb{R}$ *može* biti stepena:

  1) 1 **2)** 2 **3)** 3 **4)** 4 **5)** 5 **6)** bilo kojeg stepena $n\in\mathbb{N}$ **7)** ništa od prethodno navedenog
- Pri delenju polinoma $p(x)=x^4+3x^3+2x^2-3x+1$ polinomom $q(x)=x^3+x^2+1$ se dobija količnik ____________________ i ostatak ____________________
- Za kompleksne brojeve $z=-2-2i$ i $w=-4+3i$ je

  $z+w=$ ________, $zw=$ ________, $\dfrac{z}{w}=$ ________,

  $|z|=$ ________, $\overline{w}=$ ________, $\arg z=$ ________.
- Za matrice $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$ je

  $\det A=$ $\qquad$ $A^{-1}=$ $\qquad$ $AB=$ $\qquad$ $2A-3B=$
- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2\\ 2x & - & 6y & + & z & = & 1\end{array}$ je

  1) određen **2)** kontradiktoran **3)** 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen

- Napisati skup rešenja sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -3 \\ x & - & 4y & = & 5 \end{array}$

  $\mathcal{R} =$

- Za vektore $\vec{a} = (-2, 2, -1)$, $\vec{b} = (-3, 1, -2)$ i $\vec{c} = (0, -1, -2)$ je

  $1\vec{a} =$ ____________________, $|\vec{a}| =$ ____________________,

  $\vec{a} + \vec{b} =$ ____________________, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____________________,

  $\vec{a} \times \vec{b} =$ ____________________, $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] =$ ____________________

- Zaokružiti baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3 = \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\right)$:

  1) $\{(1,0,0,0),(2,0,0,0),(3,0,0,0),(4,0,0,0)\}$ **2)** $\{(1,0,0),(2,0,0),(3,0,0)\}$

  3) $\{(1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\}$ **4)** $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ **5)** $\{(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,1)\}$

  6) $\{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)\}$ **7)** $\{(2,2,2),(0,2,2),(0,0,2),(0,0,0)\}$

- Slobodni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni (normalni) ako i samo ako:

  1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ **3)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno nezavisni **4)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni

  5) $Lin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ je potprostor prostora slobodnih vektora **6)** $\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{a} = k\vec{b}$ ili $\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{b} = k\vec{a}$

  7) $\vec{a} = \vec{0} \lor \vec{b} = \vec{0}$ **8)** ništa od prethodno navedenog

- Zaokružiti linearne transformacije:

  1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (0, 0)$

  2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \left(\sqrt{x - y + 2z}, 0, \sqrt{-x + y + 2z}\right)$

  3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (5x - 3y + z, 0)$

  4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (\ln(3) \cdot x - y, x - y, -x + y)$

  5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, x)$

ZADACI

1. Faktorisati polinom $p(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 40x + 60$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

2. Diskutovati po $a, b \in \mathbb{R}$ i rešiti po $x, y, z \in \mathbb{R}$ sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b^2 \\ x & + & ay & + & az & = & 1 \end{array}$$

3. Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, -4)$, i neka je linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{b}$.

   (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni.

   (b) Odrediti $f(x, y, z)$, i napisati matricu linearne transformacije f.

REŠENJA:

1. Kandidati za racionalne korene polinoma P su ±1, ±2, ±3, ±5, ±4, ±6, ±10, ±15, ±12, ±20, ±30, ±60. Njihovom proverom dobijamo

	1	-1	-3	7	-40	60
1	1	0	-3	4	-36	24
-1	1	-2	-1	8	-48	12
2	1	1	-1	5	-30	$\boxed{0}$
2	1	3	5	15	$\boxed{0}$	
2	1	5	15	45		
-2	1	1	3	9		
-3	1	0	5	$\boxed{0}$		

odakle redom sledi

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)\big(x^4+x^3-x^2+5x-30\big) = (x-2)^2\big(x^3+3x^2+5x+15\big) \\ &= (x-2)^2(x+3)\big(x^2+5\big) \\ &= (x-2)^2(x+3)\big(x-\sqrt{5}i\big)\big(x+\sqrt{5}i\big), \end{aligned}$$

gde su poslednja dva izraza redom faktorizacije polinoma p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

2. Nakon što prvu jednačinu oduzmemo od druge i treće, a zatim drugu oduzmemo od treće, dobijamo ekvivalentan sistem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & (a-1)y & & & = & b^2-1 \\ & & & & (a-1)z & = & 1-b^2 \end{array},$$

odakle sledi

(1) za $a \neq 1$ je sistem određen, i skup rešenja je $R_S = \left\{\left(1, \dfrac{1-b^2}{a-1}, \dfrac{b^2-1}{a-1}\right)\right\}$;

(2) za $a = 1$ je sistem ekvivalentan sa

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b^2-1 \end{array},$$

te imamo podslučajeve:

(2.1) za $b =\notin \{-1,1\}$ je sistem kontradiktoran ($R_S = \emptyset$);

(2.2) za $b \in \{-1,1\}$ je sistem ekvivalentan sa $x+y+z=1$, te je 2 puta neodređen i skup rešenja mu je $R_S = \{(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

3. (a) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni jer je $\vec{b} = -2\vec{a}$.

(b) $\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y+z, -2x+z, -x-y),$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{v} \times (-2\vec{a}) = -2(\vec{v} \times \vec{a}) \\ &= (-4y-2z, 4x-2z, 2x+2y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (2y+z, -2x+z, -x-y) + (-4y-2z, 4x-2z, 2x+2y) \\ &= (-2y-z, 2x-z, x+y), \end{aligned}$$

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$