SIIT - MATEMATIKA 1 **KOLOKVIJUM 2**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **12.01.2016**

PREDISPITNE OBAVEZE

- Za polinom $p(x)=x(x-1)^3(x^2+3)^2(x-7)^3$ napisati sve njegove realne korene: ______________ kompleksne korene: ______________
- Za kompleksne brojeve $z=-4+3i$ i $w=-1-i$ je
  $z+2w=$ ________, $|z|=$ ________, $\overline{z}=$ ________,
  $zw=$ ________, $R_e(z)=$ ________, $I_m(z)=$ ________.
- Za matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ je (napisati crtu ako ne postoji)

  $A^T=$ $\det B=$ $A+B=$

- Napisati skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr}2x & - & 5y & = & 5\\ x & - & 2y & = & -2\end{array}$

  $\mathcal{R}=$
- Za vektore $\vec{a}=(-3,1,-3)$ i $\vec{b}=(-1,-2,-3)$ je

  $2\vec{a}-\vec{b}=$ ____________, $|\vec{a}|=$ ____________, $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ____________
- Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija
  $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y)=(-x+2y,3x-2y,-3y)$: $M_f=$

  $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ g(x,y,z)=(2y,3x+5y-7z)$: $M_g=$

TEST

- Svodljiv polinom sa koeficijentima iz polja $\mathbb{R}$ *može* biti stepena:
  1) 1 **2)** 2 **3)** 3 **4)** 4 **5)** 5 **6)** bilo kojeg stepena $n\in\mathbb{N}$ **7)** ništa od prethodno navedenog
- Pri delenju polinoma $p(x)=x^4+3x^3+2x^2-3x+1$ polinomom $q(x)=x^3+x^2+1$ se dobija količnik ________________ i ostatak ________________
- Za kompleksne brojeve $z=-2-2i$ i $w=-4+3i$ je
  $z+w=$ ________, $zw=$ ________, $\frac{z}{w}=$ ________,
  $|z|=$ ________, $\overline{w}=$ ________, $\arg z=$ ________.
- Za matrice $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}$ je (napisati crtu ako ne postoji)

  $\det A=$ $A^{-1}=$ $AB=$ $2A-3B=$

- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr}x & - & 3y & + & z & = & 2\\ 2x & - & 6y & + & z & = & 1\end{array}$ je
  1) određen **2)** kontradiktoran **3)** 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen

- Napisati skup rešenja sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -3 \\ x & - & 4y & = & 5 \end{array}$

  $\mathcal{R} =$

- Za vektore $\vec{a} = (-2, 2, -1)$, $\vec{b} = (-3, 1, -2)$ i $\vec{c} = (0, -1, -2)$ je

  $1\vec{a} =$ ____________________, $|\vec{a}| =$ ____________________,

  $\vec{a} + \vec{b} =$ ____________________, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____________________,

  $\vec{a} \times \vec{b} =$ ____________________, $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] =$ ____________________

- Zaokružiti baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3 = \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\right)$:

  1) $\{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0)\}$ **2)** $\{(1,0,0), (2,0,0), (3,0,0)\}$

  3) $\{(1,0,0), (2,2,0), (3,3,3)\}$ **4)** $\{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ **5)** $\{(-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1)\}$

  6) $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)\}$ **7)** $\{(2,2,2), (0,2,2), (0,0,2), (0,0,0)\}$ **8)** ništa od prethodno navedenog

- Slobodni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni (normalni) ako i samo ako:

  1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ **3)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno nezavisni **4)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni

  5) $Lin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ je potprostor prostora slobodnih vektora **6)** $\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{a} = k\vec{b}$ ili $\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{b} = k\vec{a}$

  7) $\vec{a} = \vec{0} \ \vee \ \vec{b} = \vec{0}$ **8)** ništa od prethodno navedenog

- Zaokružiti linearne transformacije:

  1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (0, 0)$

  2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = \left(\sqrt{x - y + 2z}, 0, \sqrt{-x + y + 2z}\right)$

  3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (5x - 3y + z, 0)$

  4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (\ln(3) \cdot x - y, x - y, -x + y)$

  5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, x)$

  6) ništa od prethodno navedenog

ZADACI

1. Znajući da je $\sqrt{2}i$ jedan kompleksni koren polinoma
   $p(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 16x + 8$,
   faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

2. Diskutovati po $a, b \in \mathbb{R}$ i rešiti po $x, y, z \in \mathbb{R}$ sistem jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b^2 \\ x & + & ay & + & az & = & 1 \end{array}$$

3. Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, -4)$, i neka je linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{b}$.

   (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni.

   (b) Odrediti $f(x, y, z)$, i napisati matricu linearne transformacije f.

REŠENJA:

1. $\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)=x^2+2$. Delenjem polinoma p sa x^2+2 dobijamo $p\left(x\right)=\left(x^2+2\right)\left(x^4-2x^3+5x^2-8x+4\right)$. Kandidati za racionalne korene polinoma $q\left(x\right)=x^4-2x^3+5x^2-8x+4$ su $\pm1,\pm2,\pm4$, a Hornerovom šemom dobijamo $\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & 5 & -8 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & \end{array}$, te je
$p\left(x\right)=\left(x^2+2\right)\left(x^4-2x^3+5x^2-8x+4\right)=$
$=\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)^2\left(x^2+4\right)=\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)(x-1)^2(x-2i)(x+2i)$.

2. Nakon što prvu jednačinu oduzmemo od druge i treće, a zatim drugu oduzmemo od treće, dobijamo ekvivalentan sistem
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & (a-1)y & & & = & b^2-1 \\ & & & & (a-1)z & = & 1-b^2 \end{array},$$
odakle sledi
   (1) za $a\neq1$ je sistem određen, i skup rešenja je $R_S=\left\{\left(1,\dfrac{1-b^2}{a-1},\dfrac{b^2-1}{a-1}\right)\right\}$;
   (2) za $a=1$ je sistem ekvivalentan sa
   $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b^2-1 \end{array},$$
   te imamo podslučajeve:
   (2.1) za $b=\notin\{-1,1\}$ je sistem kontradiktoran ($R_S=\emptyset$);
   (2.2) za $b\in\{-1,1\}$ je sistem ekvivalentan sa $x+y+z=1$, te je 2 puta neodređen i skup rešenja mu je $R_S=\{\,(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta)\mid\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.

3. (a) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni jer je $\vec{b}=-2\vec{a}$.
   (b) $\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2y+z,-2x+z,-x-y)$,
   $\vec{v}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ -2 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec{v}\times(-2\vec{a})=-2(\vec{v}\times\vec{a})$
   $=(-4y-2z,4x-2z,2x+2y)$,
   $f\left(x,y,z\right)=(2y+z,-2x+z,-x-y)+(-4y-2z,4x-2z,2x+2y)$
   $=(-2y-z,2x-z,x+y)$,
   $M_f=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.