SIIT - MATEMATIKA 1 **KOLOKVIJUM 1**

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **28.11.2015**

PREDISPITNE OBAVEZE

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti ima na skupu $\{2,4,8\}$ relacija $\alpha = \{(2,2),(2,4),(2,8)\}$: R S A T

- Za skup $A = \{1,2,3\}$ i funkcije $f : A \to A$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $g : A \to A$, $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, izračunati (precrtati ako ne postoji)

  $f \circ f : A \to A,\ f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$, $f \circ g : A \to A,\ f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$,

  $g \circ f : A \to A,\ g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$,

  $f^{-1} : A \to A,\ f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$, $g^{-1} : A \to A,\ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$,

  Funkcija $f : A \to A$ je: **1)** injektivna **2)** sirjektivna

  Funkcija $g : A \to A$ je: **3)** injektivna **4)** sirjektivna

- Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ je: **1)** injektivna **2)** sirjektivna

  Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ je: **3)** injektivna **4)** sirjektivna

- Operacija sabiranja $+$ u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je: **1)** komutativna **2)** asocijativna **3)** idempotentna **4)** ima neutralni element **5)** ima svojstvo da svaki element ima sebi inverzni

- Zaokružiti iskaze koji su tačni u Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ za sve $x,y,z \in B$:

  1) $x+y = x\cdot y$ **2)** $x+y = y+x$ **3)** $x+1 = 1$ **4)** $x(yz) = (xy)z$ **5)** $x+x = x\cdot 1$

TEST

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti imaju relacije α, β i γ na skupu $\mathbb{N}$.

  $\alpha = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; xy > 0 \right\}$: R S A T

  $\beta = \{(x,1) \mid x \in \mathbb{N}\}$: R S A T

  $\gamma = \{(x,x+2) \mid x \in \mathbb{N}\}$: R S A T

- Za relaciju „deli” $|$ na skupu $\{2,3,6,12\}$, navesti najmanji, minimalne, najveći i maksimalne elemente:

  najmanji: minimalni:

  najveći: maksimalni:

- Ispitati (zaokružiti) osobine injektivnost („1-1”) i sirjektivnost („na”) koje imaju sledeće funkcije:

  1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$: „1-1” „na”

  2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x+1$: „1-1” „na”

  3) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2+1}$: „1-1” „na”

  4) $f : (0,\infty) \to (0,\infty),\ f(x) = \dfrac{1}{x}$: „1-1” „na”

  5) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$: „1-1” „na”

- Operacija množenja $\cdot$ brojeva na skupu $\{-1,1\}$ je:

  1) komutativna **2)** asocijativna **3)** idempotentna **4)** ima neutralni element **5)** ima nulu

- Zaokružiti grupe: **1)** $(\mathbb{Z},+)$ **2)** $(\mathbb{Z},\cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z},-)$ **4)** $(\mathbb{Z},:)$
  5) $((0,1),+)$ **6)** $([0,1),+)$ **7)** $((0,1),\cdot)$ **8)** $([0,1],\cdot)$ **9)** $((0,\infty),\cdot)$

- Popuniti Kejlijevu tablicu grupoida $(\mathbb{Z}_4, \cdot_4)$:

$\cdot_4$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

- Zaokružiti polja:

  1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ **4)** $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ **6)** $([0, \infty), +, \cdot)$

- Koji od navedenih iskaza su tačni (zaokružiti) za sve $a, b, c \in B$ u Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

  1) $(a+b)c = ca + cb$ **2)** $aa + a = a + a + a$ **3)** $aa + a' = 1$ **4)** $a \leq 0$ **5)** $a \leq 1$
  6) $a' \leq 0$ **7)** $a' \leq 1$ **8)** $a + a' = a'a$ **9)** $a + a' = 1$ **10)** $a + b = b + a$

- Napisati $SDNF$ sledećih Bulovih izraza:

  1) $xy'(x' + xz) =$

  2) $(xy' + z)'(x' + x'y) =$

ZADACI

1. Date su funkcije $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^x}$ i $g : D_g \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$.
   (a) Odrediti domene D_f i D_g funkcija f i g.
   (b) Ispitati injektivnost i sirjektivnost funkcija f i g.
   (c) Izračunati (ako postoji) $(f \circ g)(x)$.

2. Za uređeni par $([0, \infty), *)$, gde je binarna operacija $*$ skupa $[0, \infty)$ definisana sa $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$, ispitati zatvorenost operacije, asocijativnost, komutativnost, idempotentnost, egzistenciju neutranog elementa i egzistenciju inverznih elemenata.

3. Naći sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije
   $f(x, y, z, u) = xyzu' + xyz'u' + x'yzu' + x'yz'u' + x'y'zu + x'y'zu' + x'y'z'u + x'y'z'u'$.

REŠENJA:

1. (a) Kako je $e^x > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, sledi da je $D_f = \mathbb{R}$.
   $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\} = [-2, \infty)$.

   (b) Funkcije f i g nisu sirjektivne jer npr. ne postoji $x \in D_f$ takvo da je $f(x) = \sqrt{e^x} = -1$, i ne postoji $x \in D_g$ takvo da je $g(x) = \sqrt{x+2} = -1$.
   Funkcija f je injektivna jer je
   $f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; \sqrt{e^{x_1}} = \sqrt{e^{x_2}} \;\Rightarrow\; e^{x_1} = e^{x_2} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.
   Funkcija g je injektivna jer je
   $g(x_1) = g(x_2) \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2} \;\Rightarrow\; x_1 + 2 = x_2 + 2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$.

   (c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+2}\right) = \sqrt{e^{\sqrt{x+2}}}$.

2. (a) Zatvorenost operacije $*$ je očigledna jer za $x, y \in [0, \infty)$ je $\sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty)$.

   (b) Operacija $*$ jeste asocijativna jer za
   $$L = (x * y) * z = \sqrt{x^2 + y^2} * z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
   $$D = x * (y * z) = x * \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
   imamo da je $L = D$.

   (c) Komutativnost operacije $*$ je očigledna jer je
   $x * y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$.

   (d) Operacija $*$ nije idempotentna jer je npr. $2 * 2 = \sqrt{8} \neq 2$.

   (e) Neutralni element je $0 \in [0, \infty)$ jer za sve $x \in [0, \infty)$ važi
   $0 * x = x * 0 = \sqrt{x^2 + 0^2} = x$.

   (f) Inverzni element za 0 je naravno 0, a za sve ostale $x > 0$ ne postoji $x' \geq 0$ takvo da je
   $x * x' = \sqrt{x^2 + (x')^2} = 0$ (jer je $x^2 > 0$).

3.

	x	x	x'	x'	
z			$\star$		u
z	$\star$		$\star$	$\star$	u'
z'	$\star$		$\star$	$\star$	u'
z'			$\star$		u
	y	y'	y'	y	

Proste implikante: $x'y'$, yu', $x'u'$.
Minimalne disjunktivne normalne forme:
$MDNF = x'y' + yu'$.