SIIT - MATEMATIKA 1 | KOLOKVIJUM 2

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________________ **26.01.2015**

PREDISPITNE OBAVEZE

- $(x^2-3x-1)(x^3+2x^2+1)=$ ______________________________
- Za kompleksne brojeve $z=-3+2i$ i $w=1-i$ je
  $z-w=$ ________, $|z|=$ ________, $\overline{z}=$ ________,
  $R_e(z)=$ ________, $I_m(z)=$ ________.
- Za matrice $A=\begin{bmatrix}1&-2\\-3&4\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2&1\\-1&3\end{bmatrix}$ je

  $-2A=$ $\qquad$ $\det A=$ $\qquad$ $A+B=$

- Napisati skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr}x&-&4y&=&3\\2x&-&7y&=&-2\end{array}$

  $\mathcal{R}=$
- Za vektore $\vec{a}=(2,0,-3)$ i $\vec{b}=(-3,-2,-1)$ je

  $2\vec{a}+3\vec{b}=$ ____________, $|\vec{a}|=$ ____________, $3\vec{a}=$ ____________
- Napisati matrice M_f i M_g linearnih transformacija
  $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y,z)=(-x+2z,3x-2y-6z,x+y+z)$: $\quad M_f=$

  $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y,z)=(-x+2z,3x-2y-6z)$: $\quad M_g=$

TEST

- Nesvodljiv polinom sa koeficijentima iz polja $\mathbb{R}$ *može* biti stepena:
  1) 1 **2)** 2 **3)** 3 **4)** 4 **5)** 5 **6)** bilo kojeg stepena $n\in\mathbb{N}$ **7)** ništa od prethodno navedenog
- Pri delenju polinoma $p(x)=x^5+2x^3-2x^2-3x+1$ polinomom $q(x)=x^3+x+1$ se dobija
  količnik ____________________ i ostatak ____________________
- Za kompleksne brojeve $z=2-2i$ i $w=-1+3i$ je
  $z+w=$ ________, $zw=$ ________, $\frac{z}{w}=$ ________,
  $|z|=$ ________, $\overline{w}=$ ________, $\arg z=$ ________.
- Za matrice $A=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-3\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2&1\\3&2\end{bmatrix}$ je

  $\det A=$ $\qquad$ $A^{-1}=$ $\qquad$ $AB=$ $\qquad$ $2A-3B=$

- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr}x&-&3y&+&z&=&2\\2x&-&6y&-&z&=&1\end{array}$ je
  1) određen **2)** kontradiktoran **3)** 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen
- Napisati skup rešenja sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr}x&-&3y&=&2\\x&-&4y&=&4\end{array}$

  $\mathcal{R}=$

- Za vektore $\vec{a} = (-3, 4, 0)$, $\vec{b} = (-4, 1, 2)$ i $\vec{c} = (-3, -1, -2)$ je

  $-3\vec{a} =$ ____________________, $|\vec{a}| =$ ____________________,

  $\vec{a} + \vec{b} =$ ____________________, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____________________,

  $\vec{a} \times \vec{b} =$ ____________________, $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] =$ ____________________

- Zaokružiti baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^3 = \left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot\right)$:

  1) $\{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0)\}$ **2)** $\{(1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0)\}$

  3) $\{(1,0,0), (2,0,0), (3,0,0)\}$ **4)** $\{(1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ **5)** $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

  6) $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)\}$ **7)** $\{(2,2,2), (0,2,2), (0,0,2)\}$

- Slobodni vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su paralelni ako i samo ako:

  1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ **2)** $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ **3)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno nezavisni **4)** $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni

  5) $Lin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ je potprostor prostora slobodnih vektora **6)** $\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{a} = k\vec{b}$ ili $\exists k \in \mathbb{R},\ \vec{b} = k\vec{a}$

  7) $\vec{a} = \vec{0} \ \vee \ \vec{b} = \vec{0}$ **8)** ništa od prethodno navedenog

- Zaokružiti linearne transformacije:

  1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \left(\sqrt{x - y + 2z}, 0, \sqrt{-x + y + 2z}\right)$

  2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (5x - 3y + z, 0)$

  3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (\ln(3) \cdot x - y, x - y, -x + y)$

  4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (x, x)$

  5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = (0, 0)$

ZADACI

1. Izračunati vrednosti parametara $a, b, c \in \mathbb{R}$ za koje je 2 bar dvostruki, a 1 bar jednostruki koren polinoma $p(x) = x^6 - 7x^5 + 18x^4 - 19x^3 + ax^2 + bx + c$, a zatim za te vrednosti parametara faktorisati polinom p nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

2. U zavisnosti od realnih parametara $a, b \in \mathbb{R}$ diskutovati i rešiti sistem jednačina
$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 1 \\ bx & + & by & = & a \end{array}$$

3. Neka je $\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, -4)$, i neka je linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{b}$.

   (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni.

   (b) Odrediti $f(x, y, z)$, i napisati matricu linearne transformacije f.

REŠENJA:

1. $$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & -7 & 18 & -19 & a & b & c \\
\hline
2 & 1 & -5 & 8 & -3 & a-6 & 2a+b-12 & \boxed{\text{4a+2b+c-24}}=0 \\
2 & 1 & -3 & 2 & 1 & a-4 & \boxed{\text{4a+b-20}}=0 & \\
1 & 1 & -2 & 0 & 1 & \boxed{\text{a-3}}=0 & &
\end{array}$$

Rešavanjem dobijenog sistema jednačina dobijamo $a=3$, $b=8$ i $c=-4$. Za ove vrednosti parametara je $p(x)=(x-2)^2(x-1)\big(x^3-2x^2+1\big)$. Kandidati za racionalne korene polinoma $q(x)=x^3-2x^2+1$ su ±1, te proverom dobijamo

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -1 & -1 & 0
\end{array}.$$

Sledi da je

$p(x)=(x-2)^2(x-1)(x-1)\big(x^2-x-1\big)=(x-2)^2(x-1)^2\big(x^2-x-1\big)$.

Koreni polinoma x^2-x-1 su $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\left\{\dfrac{1-\sqrt5}{2},\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right\}$, te je

$$p(x)=(x-2)^2(x-1)^2\left(x-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\right)$$

faktorizacija polinoma p nad oba polja $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

2. Oduzimanjem prve od druge jednačine dobijamo

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 1 \\ bx & + & by & = & a \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 1 \\ (b-a)x & & & = & a-1 \end{array},$$

odakle sledi sledeća diskusija:

(1) za $b\neq0$ i $b\neq a$ sistem je određen, i $R_S=\left\{\left(\left(\dfrac{a-1}{b-1}\right),\dfrac{1}{b}\left(1-a\dfrac{a-1}{b-1}\right)\right)\right\}$;

(2) za $a=b=0$ sistem je kontradiktoran, tj. $R_S=\emptyset$, jer je ekvivalentan sa sistemom $0=1\wedge0=-1$;

(3) za $b=a\neq0$ imamo $\begin{array}{ccccc} ax & + & ay & = & 1 \\ & & 0 & = & a-1 \end{array}$ te imamo podslučajeve:

(3.1) za $b=a\notin\{0,1\}$ je sistem kontradiktoran;

(3.2) za $b=a=1$ je sistem ekvivalentan sa $x+y=1$, te je jedan puta neodređen i $R_S=\{(\alpha,1-\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$;

(4) za $b=0$ i $a\neq0$ imamo $\begin{array}{ccc} ax & = & 1 \\ -ax & = & a-1 \end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{ccc} ax & = & 1 \\ 0 & = & a \end{array}$, te je sistem u ovom slučaju kontradiktoran.

3. (a) Vektori $\vec a$ i $\vec b$ su linearno zavisni jer je $\vec b=-2\vec a$.

(b) $\vec v\times\vec a=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x & y & z\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2y+z,-2x+z,-x-y)$,

$$\vec v\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x & y & z\\ -2 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec v\times(-2\vec a)=-2(\vec v\times\vec a)$$
$$=(-4y-2z,4x-2z,2x+2y),$$

$$f(x,y,z)=(2y+z,-2x+z,-x-y)+(-4y-2z,4x-2z,2x+2y)$$
$$=(-2y-z,2x-z,x+y),$$

$$M_f=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$