MATEMATIKA 1 **KOLOKVIJUM 2**

Prezime, ime, br. indeksa: ____ **24.01.2013**

PREDISPITNE OBAVEZE

- $(x^2 - 3x - 1)(x^3 + 2x - 4) =$ ____
- Za kompleksne brojeve $z = 2 + 2i$ i $w = -1 + i$ je

  $z + w =$ __________, $|z| =$ __________, $\overline{z} =$ __________, $R_e(z) =$ __________.
- Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ je

  $\det A =$ $A + B =$
- Napisati skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 2 \\ 2x & - & 5y & = & 1 \end{array}$

  $\mathcal{R} =$
- Za vektore $\vec{a} = (2, 1, -3)$ i $\vec{b} = (2, 2, 1)$ je

  $\vec{a} + \vec{b} =$ ____________, $|\vec{a}| =$ ____________, $3\vec{a} =$ ____________
- Napisati matricu M_f linearne transformacije
  $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x - y - 6z, -x + y + 2z)$: $M_f =$

TEST

- Za koju vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je broj -2 koren polinoma $p(x) = 2x^5 + ax^3 + 2x - 4$?

  $a \in \{$__________________________$\}$
- Pri delenju polinoma $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 4$ polinomom $q(x) = x - 2$ se dobija

  količnik __________________________ i ostatak __________________________
- Za kompleksne brojeve $z = 2 + 2i$ i $w = -1 + i$ je

  $zw =$ __________, $\frac{z}{w} =$ __________, $\arg z =$ __________, $z + w =$ __________.
- Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ je

  $A^{-1} =$ $AB =$
- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 6y & - & z & = & 1 \end{array}$ je

  1) određen **2)** kontradiktoran **3)** 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen
- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ 2x & - & 6y & + & 2z & = & 4 \end{array}$ je

  1) određen **2)** kontradiktoran **3)** 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen

- Za vektore $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$ i $\vec{c} = (2, 2, 1)$ je

  $3\vec{b} =$ ____________________, $\left|\vec{b}\right| =$ ____________________,

  $\vec{a} + \vec{b} =$ ____________________, $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ____________________,

  $\vec{a} \times \vec{b} =$ ____________________, $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] =$ ____________________

- Zaokružiti linearne transformacije:

  1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y + 2z + 5, 3x - y - 6z, -x + y + 2z)$

  2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y + z, x - y + 2z, -x + y + 2z)$

  3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y, 3x - y, -x + y)$

  4) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x - y - 6z)$

  5) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y + 2z, 0)$

  6) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \left(x^2 + y^3 + z, 2, x + y + z\right)$

ZADACI

1. Faktorisati polinom $p(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 40x + 60$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

   Rešenje: Kandidati za racionalne korene polinoma P su ±1, ±2, ±3, ±5, ±4, ±6, ±10, ±15, ±12, ±20, ±30, ±60. Njihovom proverom dobijamo

	1	−1	−3	7	−40	60
1	1	0	−3	4	−36	24
−1	1	−2	−1	8	−48	12
2	1	1	−1	5	−30	$\boxed{0}$
2	1	3	5	15	$\boxed{0}$	
2	1	5	15	45		
−2	1	1	3	9		
−3	1	0	5	$\boxed{0}$		

   odakle redom sledi

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x-2)\left(x^4 + x^3 - x^2 + 5x - 30\right) = (x-2)^2\left(x^3 + 3x^2 + 5x + 15\right) \\
&= (x-2)^2(x+3)\left(x^2+5\right) \\
&= (x-2)^2(x+3)\left(x - \sqrt{5}\mathrm{i}\right)\left(x + \sqrt{5}\mathrm{i}\right),
\end{aligned}
$$

   gde su poslednja dva izraza redom faktorizacije polinoma p nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

2. (a) Naći skup rešenja sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & z & = & 3 \end{array}$

   (b) U zavisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ diskutovati sistem linearnih jednačina

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & + & z & = & 1 \\
-x & + & y & + & az & = & -2 \\
2x & + & 2y & + & az & = & 3
\end{array}
$$

   Rešenje:

   (a) Dodavanjem prve jednačine pomnožene sa -2 drugoj, i zamenom druge i treće kolone dobijamo ekvivalentan sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & z & + & 2y & = & 2 \\ & & z & & & = & -1 \end{array}$ koji je 1 puta neodređen. Za $y = \alpha$ zamenom unatrag dobijamo $z = -1$ i $x = -2\alpha$, te je $\mathcal{R}_S = \{(-2\alpha + 1, \alpha, -1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Dodavanjem prve jednačine drugoj, i dodavanjem prve jednačine pomnožene sa -2 trećoj dobijamo ekvivalentan sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & (a+1)z & = & -1 \\ & & & & (a-2)z & = & 1 \end{array}$, te je za $a \neq 2$ sistem određen, a za $a = 2$ je kontradiktoran.

3. Neka je $\vec{v}=(x,y,z)$, $\vec{a}=(1,-1,2)$, $\vec{b}=(-2,2,-4)$, i neka je linearna transformacija $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definisana sa $f(\vec{v})=\vec{v}\times\vec{a}+\vec{v}\times\vec{b}$.

   (a) Ispitati da li su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni.

   (b) Odrediti $f(x,y,z)$, i napisati matricu linearne transformacije f.

   Rešenje: (a) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni jer je $\vec{b}=-2\vec{a}$.

   (b) $\vec{v}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=(2y+z,-2x+z,-x-y)$,

   $\vec{v}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ -2 & 2 & -4\end{vmatrix}=\vec{v}\times-2(\vec{a})=-2(\vec{v}\times\vec{a})=(-4y-2z,4x-2z,2x+2y)$,

   $f(x,y,z)=(2y+z,-2x+z,-x-y)+(-2y-z,2x-z,x+y)$,

   $M_f=\begin{bmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.