MATEMATIKA 1 **KOLOKVIJUM 1**

Prezime, ime, br. indeksa: ________________________________ **14.12.2012**

PREDISPITNE OBAVEZE

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti ima na skupu $\{a,b,c\}$ relacija $\alpha = \{(a,b),(b,c),(a,a)\}$: R S $\boxed{\text{A}}$ T
- Za funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x$ izračunati
  $f\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ f)(x) = \underline{4x}$
  $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x) = \underline{6x}$
- Zaokružiti komutativne grupe: **1)** $(\mathbb{N},+)$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(\mathbb{Z},+)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{Q},+)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\mathbb{R},+)$
- Zaokružiti polja: **1)** $(\mathbb{N},+,\cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$
- Zaokružiti iskaze koji su tačni u Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$ za sve $x,y,z\in B$:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ $x+y=y+x$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $x+x=x$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $x(y+z)=xy+xz$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $x+yz=(x+y)(x+z)$

TEST

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti imaju relacije α, β i γ na skupu $\mathbb{Z}$.
  $\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid xy=0\}$: R $\boxed{\text{S}}$ A T
  $\beta = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid xy=1\}$: R $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{T}}$
  $\gamma = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid x^2=y^2\}$: $\boxed{\text{R}}$ $\boxed{\text{S}}$ A $\boxed{\text{T}}$
- Zaokružiti injektivne funkcije:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$
  $\boxed{\textbf{4)}}$ $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=x^3$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$
- Za funkcije $f = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\end{pmatrix}$ iz skupa $A=\{1,2,3,4\}$ u samog sebe izračunati
  $f^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ $f\circ g = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&3&3&3\end{pmatrix}$ $g\circ f = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\end{pmatrix}$ $f\circ f = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$
- Za skupove $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{1,2\}$ izračunati
  1) $|\{f \mid f:A\to B\}| = \underline{2^3=8}$ **2)** $\left|\{f \mid f:A\overset{1-1}{\to}B\}\right| = \underline{0}$ **3)** $\left|\{f \mid f:A\overset{na}{\to}B\}\right| = \underline{8-2=6}$
  4) $|\{f \mid f:B\to A\}| = \underline{3^2=9}$ **5)** $\left|\{f \mid f:B\overset{1-1}{\to}A\}\right| = \underline{3\cdot 2=6}$ **6)** $\left|\{f \mid f:B\overset{na}{\to}A\}\right| = \underline{0}$
- Zaokružiti grupe:
  $\boxed{\textbf{1)}}$ $(\mathbb{Z},+)$ **2)** $(\mathbb{Z},\cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z},-)$ **4)** $((0,\infty),+)$ **5)** $([0,\infty),+)$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $((0,\infty),\cdot)$ **7)** $([0,\infty),\cdot)$
- Neka je $(G,\cdot)$ komutativan, asocijativan grupoid sa neutralnim elementom e. Zaokružiti iskaze koji su tačni za sve $x,y,z\in G$: **1)** $x\cdot x=x$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $x\cdot y = y\cdot(x\cdot e)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $x\cdot(y\cdot x)=(x\cdot x)\cdot y$
  4) $e\cdot(x\cdot e)=e\cdot e$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $e\cdot e=e$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot z)\cdot y$
- Popuniti Kejlijevu tablicu grupoida $(\mathbb{Z}_4,\cdot_4)$:

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

- Zaokružiti polja:

  1) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ **6)** $(\mathbb{R},\cdot,+)$

- U polju $(\mathbb{Z}_7,+_7)$ izračunati: $(3^{-1}+2)^{-1}-4\cdot 2=$ _/_ $-(2+2)\cdot 4^{-1}+2\cdot 1^{-1}=$ _1_

- Koji od navedenih iskaza su tačni (zaokružiti) za sve $a,b\in B$ u Bulovoj algebri $(B,+,\cdot,',0,1)$:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ $(a+b)'=a'b'$ **2)** $(a+b)'=a'+b'$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $a+b=b+a$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $ab=ba$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $a(a+a)=a$
  6) $a(a+a)=1$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $1+1=1$ $\boxed{\textbf{8)}}$ $0+1=1$ **9)** $a+1=a$

ZADACI

1. Neka je $f:A\to B$, $f(x)=\sqrt{3-x}$. Odrediti maksimalan skup $A\subseteq\mathbb{R}$ i minimalan skup $B\subseteq\mathbb{R}$ za koje je funkcija $f:A\to B$ dobro definisana. Ispitati sirjektivnost i injektivnost funkcije f. Izračunati inverznu funkciju f^{-1} funkcije f, ukoliko postoji.

   Rešenje:

   $A=(-\infty,3]$, $\qquad B=[0,\infty)$.

   Funkcija f je sirjektivna po konstrukciji skupa B.

   Kako je za $x_1,x_2\in A=(-\infty,3]$

   $f(x_1)=f(x_2) \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3-x_1}=\sqrt{3-x_2} \quad\Leftrightarrow\quad 3-x_1=3-x_2 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=x_2$

   sledi da je funkcija f injektivna.

   Kako je

   $y=f(x)=\sqrt{3-x} \quad\Leftrightarrow\quad y^2=3-x \quad\Leftrightarrow\quad x=3-y^2,$

   sledi da je inverzna funkcija $f:B\to A$ definisana sa $f^{-1}(x)=3-x^2$.

2. Na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je definisana binarna operacija $*$ sa

   $$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x*y=x+y-xy.$$

   Ispitati asocijativnost, komutativnost, idempotentnost, egzistenciju neutralnog i inverznih elemenata, kao i egzistenciju nilpotentnog elementa za operaciju $*$.

   Rešenje:

   Operacija $*$ jeste asocijativna jer je $L=D$, gde je

   $L=(x*y)*z=(x+y-xy)*z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z=$
   $\quad=x+y+z-xy-xz-yz+xyz,$

   $D=x*(y*z)=x*(y+z-yz)=x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)=$
   $\quad=x+y+z-yz-xy-xz+xyz.$

   Takođe je i komutativna jer je

   $x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*z.$

   Idempotentna nije jer je npr. $3*3=3+3-3\cdot 3=-3\neq 3$.

   Neutralni element je 0 jer je $0*x=0+x-0\cdot x=x$, i $x*0=x+0-x\cdot 0=x$.

   Inverzni element elementa x je x' ako je

   $x*x'=0 \quad\Leftrightarrow\quad x+x'-x\cdot x'=0 \quad\Leftrightarrow\quad x'(1-x)=-x \quad\Leftrightarrow\quad \left(x\neq 1\ \wedge\ x'=\frac{x}{x-1}\right)\in\mathbb{R},$

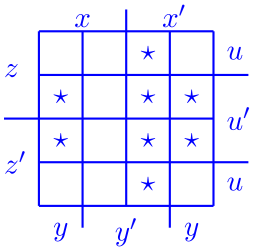
   ali za element 1 ne postoji inverzni element jer je $1*1'=1+1'-1\cdot 1'=1\neq 0$ za svako $1'$.

   Nilpotentni element je 1 jer je $1*x=1+x-1\cdot x=1$, i $x*1=x+1-x\cdot 1=1$.

3. Naći sve proste implikante i sve minimalne DNF Bulove funkcije

   $f(x,y,z,u)=xyzu'+xyz'u'+x'yzu'+x'yz'u'+x'y'zu+x'y'zu'+x'y'z'u+x'y'z'u'.$

   Rešenje:



Proste implikante: $x'y'$, yu', $x'u'$.
Minimalne disjunktivne normalne forme:
MDNF $= x'y' + yu'$.