**KOLOKVIJUM 2**

**Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **22.01.2012**

## PREDISPITNE OBAVEZE

- Koji su od navedenih brojeva koreni polinoma $P(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x - 10$ (zaokružiti):

  $0 \quad -1 \quad \boxed{2} \quad -2 \quad 4 \quad 10$

- Koji od navedenih iskaza su tačni (zaokružiti) za sve $a, b \in B$ u Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

  $\boxed{\mathbf{1)}}$ $(a+b)' = a'b'$ $\boxed{\mathbf{2)}}$ $a+b = b+a$ **3)** $a+a' = 0$ $\boxed{\mathbf{4)}}$ $a+a' = 1$ **5)** $a+a = 1$ $\boxed{\mathbf{6)}}$ $a+1 = 1$

- Pri delenju polinoma $P(x) = (x-3)(x^4+1)$ polinomom $Q(x) = x^4 + 1$ dobija se

  količnik $\underline{\quad x-3 \quad}$ i ostatak $\underline{\quad 0 \quad}$

- Za kompleksne brojeve $z = 4 + 5i$ i $w = -1 + i$ je

  $z + w = \underline{\quad 3+6i \quad}$, $|z| = \underline{\quad \sqrt{41} \quad}$, $\overline{z} = \underline{\quad 4-5i \quad}$, $R_e(z) = \underline{\quad 4 \quad}$.

- Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ je

  $\det A = 9$ $\qquad$ $A + B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

- Napisati skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 3y & = & 5 \end{array}$

  $\mathcal{R} = \{(1, -1)\}$

## TEST

- Koji od navedenih iskaza su tačni (zaokružiti) za sve $a, b, c \in B$ u Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

  **1)** $a + ab = b$ $\boxed{\mathbf{2)}}$ $a + ab = a$ $\boxed{\mathbf{3)}}$ $a + bc = (a+b)(a+c)$ **4)** $a + b' = a'b$ **5)** $(ab)' = a'b'$

- Napisati u obliku $SDNF$ Bulov izraz

  $(x + y')' + x'(z + yz) = \underline{\quad x'yz + x'yz' + x'y'z \quad}$

- Deljenjem polinoma $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 - 3$ polinomom $Q(x) = x^2 + x + 1$ se dobija

  količnik $\underline{\quad 2x^3 - 5x^2 + 3x + 3 \quad}$ i ostatak $\underline{\quad -6x - 6 \quad}$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je broj $-2$ koren polinoma $P(x) = x^3 + 3x^2 - ax + 4$?

  $a \in \{\underline{\quad -4 \quad}\}$

- Za kompleksne brojeve $z = 4 + 5i$ i $w = -1 + i$ je

  $z + w = \underline{\quad 3+6i \quad}$, $zw = \underline{\quad -9-i \quad}$, $\frac{z}{w} = \underline{\quad \frac{1}{2} - \frac{9}{2}i \quad}$, $|z| = \underline{\quad \sqrt{41} \quad}$,

  $\arg(w) = \underline{\quad \frac{3\pi}{4} \quad}$, $\overline{z} = \underline{\quad 4-5i \quad}$, $R_e(z) = \underline{\quad 4 \quad}$, $I_m(z) = \underline{\quad 5 \quad}$.

- Izračunati $\sqrt[3]{-1+i} = \{\underline{\quad \sqrt[6]{2}e^{i\frac{3\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \quad \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} \quad}\}$

- Izračunati inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

- Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ izračunati

$\det B = 79$ $\qquad$ $AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -18 \\ -5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

$CB = \begin{bmatrix} 14 & 23 & -12 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $-2 \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -4 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 6z & = & 10 \\ x & - & y & + & 3z & = & 5 \end{array}$ je:

**1)** kontradiktoran **2)** određen **3)** 1 puta neodređen $\boxed{\textbf{4)}}$ 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen

- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 6z & = & 9 \\ x & - & y & + & 3z & = & 5 \end{array}$ je:

$\boxed{\textbf{1)}}$ kontradiktoran **2)** određen **3)** 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen

- Za koju vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 4y & = & 1 \\ x & - & ay & = & 1 \end{array}$ određen:

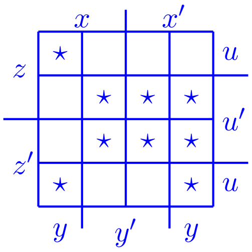
$a \in$ $\underline{\quad \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad}$

---

ZADACI

1. Naći sve proste implikante i minimalne DNF Bulove funkcije $f$ date izrazom u obliku $SDNF$,
$f(x, y, z, u) = xyzu + xyz'u + xy'zu' + xy'z'u' + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu' + x'y'z'u'$

**Rešenje:**




Proste implikante: $y'u'$, $x'u'$, $xyu$, $yz'u$, $x'yz'$.
Minimalne disjunktivne normalne forme:
$\text{MDNF}_1 = y'u' + x'u' + xyu + yz'u$,
$\text{MDNF}_2 = y'u' + x'u' + xyu + x'yz'$.

2. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu: $\quad (2+i)^3 + 2R_e\left(\frac{\bar{z}+1}{2}\right) - iI_m\left(\frac{2+z}{1-i}\right) + \bar{z} = 5 + 5i.$

**Rešenje:** Neka je $z = x + yi$, gde je $x, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$R_e\left(\frac{\bar{z}+1}{2}\right) = R_e\left(\frac{x-yi+1}{2}\right) = \frac{x+1}{2}$,

$I_m\left(\frac{2+z}{1-i}\right) = I_m\left(\frac{2+x+yi}{1-i}\right) = I_m\left(\frac{(2+x+yi)(1+i)}{2}\right) = \frac{2+x+y}{2}$,

$(2+i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 = 2 + 11i.$

Uvrštavanjem u jednačinu sledi

$2 + 11i + 2\frac{x+1}{2} - i\frac{2+x+y}{2} + x - iy = 5 + 5i,$

odnosno

$3 + 2x + \left(10 - \frac{x+3y}{2}\right)i = 5 + 5i.$

Izjednačavanjem realnog dela kompleksnog broja na levoj strani jednakosti sa realnim delom kompleksnog broja na desnoj strani jednakosti, i izjednačavanjem njihovih imaginarnih delova dobijaju se realne jednačine $3 + 2x = 5$ i $x + 3y = 10$, po nepoznatim $x, y \in \mathbb{R}$, čijim rešavanjem dobijamo $x = 1$ i $y = 3$. Dakle, rešenje polazne kompleksne jednačine je $z = 1 + 3i$.

3. (a) Rešiti po $x, y, z \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \end{array}$

**Rešenje:** Ako prvu jednačinu dodamo na drugu, a zatim prvu jednačinu pomnoženu sa $-2$ dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$. Zatim, oduzimanjem druge jednačine od treće dobijamo ekvivalentan sistem u trougaonom obliku $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$, odakle vidimo da je on 1 puta neodređen, i zamenom unatrag dobijamo $z = \alpha \in \mathbb{R}$, $y = \alpha - 1$ i $x = -\alpha + 4$, odnosno skup rešenja sistema je $\mathcal{R} = \{(-\alpha + 4, \alpha - 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(b) Diskutovati po parametru $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ -x & - & 3ay & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & az & = & 5 \end{array}$$

**Rešenje:** Ako prvu jednačinu dodamo na drugu, a zatim prvu jednačinu pomnoženu sa $-2$ dodamo na treću, dobijamo ekvivalentan sistem $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & (2-3a)y & + & z & = & 1 \\ & & -y & + & (2-a)z & = & 1 \end{array}$. Zamenom druge i treće jednačine, a zatim, dodavanjem druge jednačine pomnožene sa $2 - 3a$ trećoj jednačini dobijamo ekvivalentan sistem u trougaonom obliku $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & -y & + & (2-a)z & = & 1 \\ & & & & (3a^2 - 8a + 5)z & = & 3 - 3a \end{array}$.

Kako je $3a^2 - 8a + 5 + 0$ za $a_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \{3, 5\}$, dobijamo sledeće slučajeve:

(1) Za sve $a \notin \{3, 5\}$ je sistem (jednoznačno) određen.

(2) Za $a = 3$ je sistem ekvivalentan sa $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & -y & - & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & -6 \end{array}$,

te je u ovom slučaju kontradiktoran.

(3) Za $a = 3$ je sistem ekvivalentan sa $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & & -y & - & 3z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 12 \end{array}$,

te je u ovom slučaju takođe kontradiktoran.