KOLOKVIJUM 1

Prezime, ime, br. indeksa: ______________________ **04.02.2012**

PREDISPITNE OBAVEZE

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti ima relacije $\alpha = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ na skupu $\{1,2,3\}$: R S $\boxed{\text{A}}$ T

- Zaokružiti bijektivne funkcije: $\boxed{\mathbf{1)}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1$ $\boxed{\mathbf{2)}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+1$ **3)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ **4)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2$ **5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$

- Inverzna funkcija funkcije $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ je funkcija $f^{-1}:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$, $f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$

- Broj varijacija sa ponavljanjem od 5 elemenata klase 3 je $\overline{V}_3^5 = \underline{5^3=125}$

  Broj varijacija bez ponavljanja od 5 elemenata klase 3 je $V_3^5 = \underline{5\cdot4\cdot3=60}$

- Zaokružiti komutativne grupe: $\boxed{\mathbf{1)}}$ $(\mathbb{R},+)$ **2)** $(\mathbb{R},\cdot)$ $\boxed{\mathbf{3)}}$ $(\mathbb{Z},+)$ **4)** $(\mathbb{Z},\cdot)$

- Zaokružiti prstene: $\boxed{\mathbf{1)}}$ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\boxed{\mathbf{2)}}$ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ $\boxed{\mathbf{3)}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$

TEST

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti imaju relacije α, β i γ na skupu $\mathbb{R}$.

  $\alpha=\{(x,y)\,|\,y\ge x+1\}$: R S $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{T}}$

  $\beta=\{(x,y)\,|\,y=x^2\}$: R S $\boxed{\text{A}}$ T

  $\gamma=\{(x,y)\,|\,x\cdot y=0\}$: R $\boxed{\text{S}}$ A T

- Zaokružiti sirjektivne funkcije:

  1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ $\boxed{\mathbf{2)}}$ $f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$ **3)** $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$

  $\boxed{\mathbf{4)}}$ $f:[0,\infty)\to[0,\infty),\ f(x)=x^2$ **5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$ $\boxed{\mathbf{6)}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+5$

- Za funkcije $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ i $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&3\end{pmatrix}$ iz skupa $A=\{1,2,3,4\}$ u samog sebe izračunati

  $f^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ $f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&3&1&1\end{pmatrix}$ $g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&3&1&1\end{pmatrix}$ $f\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$

- Za skupove $A=\{1,2\}$ i $B=\{a,b\}$ izračunati

  1) $|\{f\,|\,f:A\to B\}| = \underline{2\cdot2=4}$ **2)** $\left|\{f\,|\,f:A\overset{1-1}{\to}B\}\right| = \underline{2\cdot1=2}$ **3)** $\left|\{f\,|\,f:A\overset{na}{\to}B\}\right| = \underline{2\cdot1=2}$

  4) $|\{f\,|\,f:B\to A\}| = \underline{2\cdot2=4}$ **5)** $\left|\{f\,|\,f:B\overset{1-1}{\to}A\}\right| = \underline{2\cdot1=2}$ **6)** $\left|\{f\,|\,f:B\overset{na}{\to}A\}\right| = \underline{2\cdot1=2}$

- **1)** Broj kombinacija bez ponavljanja od 8 elemenata klase 6 je $C_6^8 = \underline{\binom{8}{6}=\frac{8!}{6!\cdot2!}=28}$

  2) Broj kombinacija sa ponavljanjem od 8 elemenata klase 6 je $\overline{C}_6^8 = \underline{\binom{8+6-1}{6}=\frac{13!}{6!\cdot7!}=1716}$

- Zaokružiti grupe:

  $\boxed{\mathbf{1)}}$ $(\mathbb{Z},+)$ **2)** $(\mathbb{Z},\cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z},-)$ **4)** $((0,\infty),+)$ **5)** $([0,\infty),+)$ $\boxed{\mathbf{6)}}$ $((0,\infty),\cdot)$ **7)** $([0,\infty),\cdot)$

- Zaokružiti podgrupe grupe $(\mathbb{R},+)$:

  $\boxed{\mathbf{1)}}$ $(\mathbb{Z},+)$ **2)** $(\mathbb{Z},\cdot)$ **3)** $(\mathbb{N},+)$ **4)** $((0,\infty),+)$ **5)** $([0,\infty),+)$ $\boxed{\mathbf{6)}}$ $(\{0\},+)$ $\boxed{\mathbf{7)}}$ $(\mathbb{Q},+)$

- Neka je $(G,\cdot)$ komutativan, asocijativan grupoid sa neutralnim elementom e. Zaokružiti iskaze koji su tačni za sve $x,y,z\in G$: **1)** $x\cdot x=x$ $\boxed{\mathbf{2)}}$ $x\cdot y=y\cdot(x\cdot e)$ $\boxed{\mathbf{3)}}$ $x\cdot(y\cdot x)=(x\cdot x)\cdot y$ **4)** $e\cdot(x\cdot e)=e\cdot e$ $\boxed{\mathbf{5)}}$ $e\cdot e=e$ $\boxed{\mathbf{6)}}$ $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot z)\cdot y$
- Popuniti Kejlijevu tablicu grupoida $(\mathbb{Z}_3,\cdot_3)$:

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- Zaokružiti polja:

  1) $(\mathbb{N},+,\cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ $\boxed{\mathbf{3)}}$ $(\mathbb{R},+,\cdot)$ $\boxed{\mathbf{4)}}$ $(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ **5)** $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$ **6)** $(\mathbb{R},\cdot,+)$
- U polju $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ izračunati: $(2^{-1}+2)^{-1}-1\cdot 2=$ __2__ $-(2+0)\cdot 1^{-1}+2\cdot 1^{-1}=$ __0__

ZADACI

1. Date su funkcije $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ i $g:A\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x}$.

   (a) Odrediti maksimalne domene $A\subseteq\mathbb{R}$ i $B\subseteq\mathbb{R}$ funkcija f i g.

   (b) Ispitati sirjektivnost i injektivnost funkcije f.

   (c) Izračunati $(f\circ g)(x)$.

   (d) Izračunati $f^{-1}(x)$ i $g^{-1}(x)$ ako postoje (ako ne postoje, obrazložiti zašto).

   Rešenje:

   (a) $A(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ (jer mora biti $\sqrt{x^2-1}\neq 0$ i $x^2-1\geq 0$).
   $B=\mathbb{R}$ (jer je eksponencijalna funkcija definisana na celom skupu $\mathbb{R}$).

   (b) Funkcija f nije sirjektivna jer je $\sqrt{x^2-1}>0$ i $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$ za sve $x\in A$, te za $y\leq 0$ ne postoji $x\in A$ takvo da je $f(x)=y$. Injektivna takođe nije jer je npr. $f(-2)=f(2)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ za $-2\neq 2$.

   (c) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{e^{-2x}-1}}$, za $e^{-2x}-1>0$, odnosno $e^{-2x}>1$, odnosno $-2x>0$, odnosno $x<0$.

   (d) Funkcija $f^{-1}(x)$ ne postoji jer funkcija f nije bijektivna (nije ni injektivna ni sirjektivna). Funkcija $g^{-1}:\mathbb{R}\to B=\mathbb{R}$ takođe ne postoji jer g nije sirjektivna funkcija, jer je $e^t>0$ za $\forall t\in\mathbb{R}$, te za $y\leq 0$ ne postoji $x\in\mathbb{R}$ takvo da je $g(x)=y$. Ali, funkcija g je injektivna, jer je kompozicija injektivnih funkcija $y=-x$ i $y=e^t$, tako da za funkciju $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $g(x)=e^{-x}$ postoji inverzna funkcija $g^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g^{-1}(y)=-\ln y$ (jer je $e^{-x}=y\ \Leftrightarrow\ -x=\ln y\ \Leftrightarrow\ x=-\ln y$).

2. Na koliko različitih načina se može izabrati 8 karata iz špila od 52 karte tako da među izabranim kartama bude

   (a) tačno 2 sedmice i 3 keca,

   (b) tačno 2 sedmice i bar 3 keca?

   Rešenje: Označimo sa s_i broj načina izbora i sedmica, sa k_j broj načina izbora j kečeva, a sa o_k broj načina izbora k karata među kojima nema ni sedmica ni kečeva (takvih karata u špilu ima $52-4-4=44$). Koristeći pravilo proizvoda izračunavamo

   (a) $s_2k_3o_3=\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{3}=317856.$

   (b) $s_2k_3o_3+s_2k_4o_2=\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{44}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{44}{2}=317856+5676=323532.$

3. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i

$*$	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	1	2	3	4
3	4	3	1	2
4	3	4	2	1

Za strukturu $(A, *)$ ispitati (sa obrazloženjem)

(a) komutativnost operacije $*$,

(b) idempotentnost operacije $*$,

(b) egzistenciju neutralnog elementa,

(b) egzistenciju inverznih elemenata.

Rešenje:

(a) Operacija $*$ je komutativna jer je tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

(b) Operacije $*$ nije idempotentna jer je npr. $3 * 3 = 1 \neq 3$.

(b) Neutralnog element postoji i to je 2, jer su vrsta i kolona elementa 2 jednaki graničnoj vrsti i graničnoj koloni.

(b) Neutralni element je 2, te su inveryni elementi redom $1^{-1} = 1$ (jer je $1 \cdot 1 = 2$), $2^{-1} = 2$ (neutralni element je uvek sam sebi inverzni element), $3^{-1} = 4$ (jer je $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 2$), $4^{-1} = 3$ (jer je $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 2$).

$\boxed{\text{KOLOKVIJUM 2}}$

Prezime, ime, br. indeksa: ____ **04.02.2012**

PREDISPITNE OBAVEZE

- Koji od navedenih iskaza su tačni (zaokružiti) za sve $a, b \in B$ u Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

  1) $(ab)' = a'b'$ **2)** $a + b = ab$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $a + a' = 1$ **4)** $aa' = 1$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $1 + 1 = 1$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $a + 1 = 1$

- Pri delenju polinoma $P(x) = (x^2 + 3)(x^4 - 1)$ polinomom $Q(x) = x^2 + 3$ dobija se

  količnik $\underline{\quad x^4 - 1 \quad}$ i ostatak $\underline{\quad 0 \quad}$

  Skup svih realnih korena polinoma $P(x)$ je $\underline{\quad \{ \ -1, \ 1 \ \} \quad}$

- Za kompleksne brojeve $z = 1 - 5i$ i $w = -1 + 2i$ je

  $z + w = \underline{\quad -3i \quad}$, $z - w = \underline{\quad 2 - 7i \quad}$, $|z| = \underline{\quad \sqrt{26} \quad}$,

  $\overline{z} = \underline{\quad 1 + 5i \quad}$, $R_e(z) = \underline{\quad 1 \quad}$, $I_m(z) = \underline{\quad -5 \quad}$.

- Za matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ je

  $2 \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & -10 & 18 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $A + B = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 11 \\ -2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

- Napisati skup rešenja $\mathcal{R}$ sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 4y & = & 5 \end{array}$

  $\mathcal{R} = \emptyset$

TEST

- Koji od navedenih iskaza su tačni (zaokružiti) za sve $a, b, c \in B$ u Bulovoj algebri $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$:

  1) $a + a'' = 1$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $a + a'' = a$ **3)** $a + a'' = 0$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $a(b + c) = ba + ca$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $(ab)' = a' + b'$

- Za $A = \{a, b, c\}$ i Bulovu algebru $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$, zaokružiti njene podalgebre:

  1) $(\{\{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, \overline{\ }, \{a\}, \{b, c\})$ **2)** $(\{\{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\{\emptyset, A\}, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$
  $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\{\emptyset, A, \{a\}, \{b, c\}\}, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$ **5)** $(\{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$
  6) $(\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \overline{\ }, \emptyset, A)$

- Deljenjem polinoma $P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 1$ polinomom $Q(x) = x^3 - x + 1$ se dobija

  količnik $\underline{\quad x^2 - 2x \quad}$ i ostatak $\underline{\quad x^2 + 2x - 1 \quad}$

- Za koje vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je broj 2 koren polinoma $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2ax + 6a$?

  $a \in \{\underline{\quad -10 \quad}\}$

- Za kompleksne brojeve $z = -2 + 5i$ i $w = -2 - 2i$ je

  $z + w = \underline{\quad -4 + 3i \quad}$, $zw = \underline{\quad 14 - 6i \quad}$, $\dfrac{z}{w} = \underline{\quad -\dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{4}i \quad}$, $|z| = \underline{\quad \sqrt{29} \quad}$,

  $\arg(w) = \underline{\quad -\frac{3}{4}\pi \quad}$, $\overline{z} = \underline{\quad -2 - 5i \quad}$, $R_e(z) = \underline{\quad -2 \quad}$, $I_m(z) = \underline{\quad 5 \quad}$.

- Izračunati, u skupu kompleksnih brojeva, $\sqrt[4]{-16} = \{\underline{\ 2e^{\frac{\pi}{4}i}, \ 2e^{\frac{3\pi}{4}i}, \ 2e^{-\frac{3\pi}{4}i}, \ 2e^{-\frac{\pi}{4}i}, \ }\}$

- Izračunati inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$:

  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$

- Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ izračunati

  $\det B = 74$ $\qquad AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -17 \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$

  $CB = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -24 \end{bmatrix}$ $\qquad -2 \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

- Sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 5z & = & 10 \\ x & - & y & + & 3z & = & 5 \end{array}$ je:

  1) kontradiktoran **2)** određen $\boxed{\textbf{3)}}$ 1 puta neodređen **4)** 2 puta neodređen **5)** 3 puta neodređen

- Skup rešenja sistema linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 2 \\ 2x & - & 2y & = & 4 \end{array}$ je: $\{(\alpha+2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

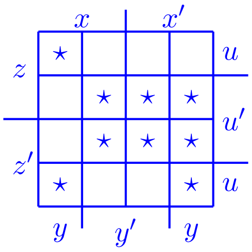
- Za koju vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ je sistem linearnih jednačina $\begin{array}{rcrcr} x & - & 4y & = & 1 \\ x & - & a^2y & = & 3 \end{array}$ određen:

  $a \in$ $\mathbb{R} \setminus \{\ -2,\ \ 2\ \}$

ZADACI

1. Naći sve proste implikante i minimalne DNF Bulove funkcije f date izrazom u obliku $SDNF$,
   $f(x,y,z,u) = xyzu + xyz'u + xy'zu' + xy'z'u' + x'yzu' + x'yz'u + x'yz'u' + x'y'zu' + x'y'z'u'$

   Rešenje:

   Proste implikante: $y'u'$, $x'u'$, xyu, $yz'u$, $x'yz'$.
   Minimalne disjunktivne normalne forme:
   $\text{MDNF}_1 = y'u' + x'u' + xyu + yz'u$,
   $\text{MDNF}_2 = y'u' + x'u' + xyu + x'yz'$.

2. Rešiti po $z \in \mathbb{C}$ jednačinu: $\quad (2+i)^2 + 2R_e\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\bar{z} - 2iz = 1 - 2i.$

   Rešenje:

   $(2+i)^2 = 3+4i, \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i,$

   te je data jednačina ekvivalentna sa

   $3 + 4i + 2R_e(i)\,\bar{z} - 2iz = 1 - 2i \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 4i + 2 \cdot 0 \cdot \bar{z} - 2iz = 1 - 2i \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad 3 + 4i - 2iz = 1 - 2i \quad \Leftrightarrow \quad -2iz = -2 - 6i \quad \Leftrightarrow \quad iz = 1 + 3i \ / \cdot (-i) \quad \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad -i^2 z = -i - 3i^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3 - i.$

3. (a) Izračunati inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) Diskutovati po parametru $a \in \mathbb{R}$ sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & - & az & = & 3 \end{array}$$

Rešenje:

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} & 1 & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

(b) Dodavanjam prve jednačine na drugu, i dodavanjem prve jednačine pomnožene sa -2 trećoj dobijamo ekvivalentan sistem $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & - & y & + & (6-a)z & = & -1 \end{array}$.

Oduzimanjem druge jednačine od treće dobijamo sistem u trougaonom obliku

$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ & - & y & - & z & = & 1 \\ & & & & (7-a)z & = & -2 \end{array}$, odakle sledi da

(1) za $a = 7$ je sistem kontradiktoran;

(2) za $a \neq 7$ je sistem određen.