**KOLOKVIJUM 1**

**Prezime, ime, br. indeksa:** ______________________________ **10.12.2011**

## PREDISPITNE OBAVEZE

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti imaju relacije $\alpha$ i $\beta$ na skupu $\{1,2,3\}$.

  $\alpha = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$: R S $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{T}}$ $\qquad$ $\beta = \{(1,1),(2,2)\}$: R $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{T}}$

- Za funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ iz skupa $A = \{1,2,3\}$ u samog sebe izračunati

  $$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Koliko ima 3-cifrenih brojeva čije su sve cifre neparni brojevi, i

  **1)** cifre mogu biti jednake: $\underline{5^3 = 125}$ **2)** sve cifre su različite: $\underline{5 \cdot 4 \cdot 3 = 60}$

- Zaokružiti komutativne grupe: **1)** $(\mathbb{R}, \cdot)$ **2)** $(\mathbb{Z}, \cdot)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{Z}, +)$

- Zaokružiti polja: **1)** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

## TEST

- Zaokružiti koje od osobina Refleksivnosti, Simetričnosti, Antisimetričnosti i Tranzitivnosti imaju relacije $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ na skupu $\mathbb{R}$.

  $\alpha = \{(x,y) \mid x + y = 0\}$: R $\boxed{\text{S}}$ A T

  $\beta = \{(x,y) \mid x - y = 1\}$: R S $\boxed{\text{A}}$ T

  $\gamma = \{(x,y) \mid x \cdot y \leq 0\}$: R $\boxed{\text{S}}$ A T

- Zaokružiti injektivne funkcije:

  **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ **2)** $f : \mathbb{R} \to [0,\infty),\ f(x) = x^2$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

  $\boxed{\textbf{4)}}$ $f : [0,\infty) \to [0,\infty),\ f(x) = x^2$ **5)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x+5$

- Za funkcije $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ iz skupa $A = \{1,2,3,4\}$ u samog sebe izračunati

  $$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Za skupove $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{a,b\}$ izračunati

  **1)** $|\{f \mid f : A \to B\}| = \underline{2^3 = 8}$ **2)** $\left|\{f \mid f : A \overset{1-1}{\to} B\}\right| = \underline{0}$ **3)** $\left|\{f \mid f : A \overset{na}{\to} B\}\right| = \underline{6}$

  **4)** $|\{f \mid f : B \to A\}| = \underline{3^2 = 9}$ **5)** $\left|\{f \mid f : B \overset{1-1}{\to} A\}\right| = \underline{3 \cdot 2 = 6}$ **6)** $\left|\{f \mid f : B \overset{na}{\to} A\}\right| = \underline{0}$

- **1)** Broj kombinacija bez ponavljanja od 8 elemenata klase 5 je $C_5^8 = \underline{\binom{8}{5} = 56}$

  **2)** Broj kombinacija sa ponavljanjem od 8 elemenata klase 5 je $\overline{C}_5^8 = \underline{\binom{8+5-1}{5} = 792}$

- Zaokružiti grupoide sa neutralnim elementom:

  $\boxed{\textbf{1)}}$ $(\mathbb{Z}, +)$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(\mathbb{Z}, \cdot)$ **3)** $(\mathbb{Z}, -)$ **4)** $((0,\infty), +)$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $([0,\infty), +)$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $((0,\infty), \cdot)$ $\boxed{\textbf{7)}}$ $([0,\infty), \cdot)$

- Neka je $(G, \cdot)$ komutativan, asocijativan grupoid sa neutralnim elementom $e$. Zaokružiti iskaze koji su tačni za sve $x, y, z \in G$: **1)** $x \cdot x = x$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $x \cdot y = y \cdot (x \cdot e)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot x) \cdot y$

  **4)** $e \cdot (x \cdot e) = e \cdot e$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $e \cdot e = e$ $\boxed{\textbf{6)}}$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y$

- Popuniti Kejlijevu tablicu grupoida $(\mathbb{Z}_4, +_4)$:

| $+_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

- Zaokružiti prstenove:

  **1)** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{2)}}$ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{3)}}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{4)}}$ $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ $\boxed{\textbf{5)}}$ $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ **6)** $(\mathbb{R}, \cdot, +)$

- U polju $(\mathbb{Z}_5, +_5)$ izračunati: $(3^{-1} + 2)^{-1} - 4 \cdot 2 = \underline{\ 1\ }$ $\quad -(2+2) \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 1^{-1} = \underline{\ 1\ }$

---

ZADACI

1. Neka je $f : A \to B$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{3-x}$. Odrediti maksimalan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ i minimalan skup $B \subseteq \mathbb{R}$ za koje je funkcija $f : A \to B$ dobro definisana. Ispitati sirjektivnost i injektivnost funkcije $f$. Izračunati $(f \circ f)(x)$.

   **Rešenje:**

   (a) Očigledno je $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

   (b) Za svako $y \in \mathbb{R}$ je

   $$y \in B \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\ f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\ \frac{2x+1}{3-x} = y \ / \cdot (3-x) \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\ 2x+1 = y(3-x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A,\ x(2+y) = 3y-1,$$

   pri čemu poslednja jednačina za $y = -2$ nema rešenja, a za $y \neq -2$ postoji $x \in A$ takvo da je $x = \dfrac{3y-1}{2+y} \in A$ tj.

   $$x = \frac{3y-1}{2+y} \neq 3 \ / \cdot (2+y) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3y-1 \neq 3(2+y) = 6+3y \quad \Leftrightarrow \quad -1 \neq 6,$$

   što je tačno. Dakle, $B = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

   (c) Kako je

   $$f(x_1) = f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x_1+1}{3-x_1} = \frac{2x_2+1}{3-x_2} \ / \cdot (3-x_1)(3-x_2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad (2x_1+1)(3-x_2) = (2x_2+1)(3-x_1) \quad \Leftrightarrow \quad 6x_1 - x_2 - 2x_1x_2 + 3 = 6x_2 - x_1 - 2x_1x_2 + 3 \quad \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \quad 6x_1 - x_2 = 6x_2 - x_1 \quad \Leftrightarrow \quad 6(x_1 - x_2) = x_2 - x_1 \quad \Leftrightarrow \quad 7(x_1 - x_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,$$

   sledi da je funkcija $f$ injektivna.

   (d) Funkcija $f$ je sirjektivna po konstrukciji skupa $B$.

   (e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\dfrac{2x+1}{3-x}) = \dfrac{2\frac{2x+1}{3-x} + 1}{3 - \frac{2x+1}{3-x}} = \dfrac{\frac{2(2x+1)+3-x}{3-x}}{\frac{3(3-x)-(2x+1)}{3-x}} = \dfrac{3x+5}{-5x+8}$.

2. U kutiji se nalazi pet crnih kuglica koje su numerisane brojevima 1, 3, 5, 7 i 9, i četiri bele kuglice koje su numerisane brojevima 2, 4, 6 i 8. Vuku se tri kuglice odjednom.
   (a) Na koliko različitih načina se mogu izvući tri crne kuglice?
   (b) Na koliko različitih načina se mogu izvući tri kuglice istih boja?
   (c) Na koliko različitih načina se mogu izvući tri kuglice tako da je zbir brojeva na njima paran broj?

   **Rešenje:**

   (a) $\dbinom{5}{3} = 10$.

   (b) $\dbinom{5}{3} + \dbinom{4}{3} = 10 + 4 = 14$.

   (c) $\dbinom{4}{3} + \dbinom{4}{1} \cdot \dbinom{5}{2} = 4 + 4 \cdot 10 = 44$.

3. Ispitati SVE aksiome polja za strukturu $(A, \oplus, \odot)$, gde je $A = \mathbb{R}^2$, i za sve $(a, b), (c, d) \in A$ je

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d), \qquad (a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d).$$

**Rešenje:**

(a) Ispitujemo par $(A, \oplus)$.

(a.1) Zatvorenost operacije $\oplus$ na $A$: za sve $(a, b), (c, d) \in A$ (tj. sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) je
$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \in A$ (jer $a + c, b + d \in \mathbb{R}$).

(a.2) Asocijativnost operacije $\oplus$: za sve $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$ (tj. sve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$) je
$((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (e, f) = (a + c, b + d) \oplus (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) =$
$= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a, b) \oplus (c + e, d + f) = (a, b) \oplus ((c, d) \oplus (e, f))$.

(a.3) Komutativnost operacije $\oplus$: za sve $(a, b), (c, d) \in A$ (tj. sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) je
$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) \oplus (a, b)$.

(a.4) Postoji neutralni element $(0, 0) \in A$ jer za sve $(a, b) \in A$ važi
$(0, 0) \oplus (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)$ i $(a, b) \oplus (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$.

(a.5) Za svako $(a, b) \in A$ postoji inverzni element $(-a, -b) \in A$ jer važi
$(-a, -b) \oplus (a, b) = (-a + a, -b + b) = (0, b)$ i $(a, b) \oplus (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$.

(b) Ispitujemo par $(A, \odot)$.

(b.1) Zatvorenost operacije $\odot$ na $A$: za sve $(a, b), (c, d) \in A$ (tj. sve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) je
$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd) \in A$ (jer $ac, bd \in \mathbb{R}$).

(b.2) Asocijativnost operacije $\odot$: za sve $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$ (tj. sve $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$) je
$((a, b) \odot (c, d)) \odot (e, f) = (ac, bd) \odot (e, f) = ((ac)e, (bd)f) =$
$= (a(ce), b(df)) = (a, b) \odot (ce, df) = (a, b) \odot ((c, d) \odot (e, f))$.

(c) Ispitujemo distributivnost $\odot$ prema $\oplus$. Leva distributivnost važi jer za sve $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$ imamo
$(a, b) \odot ((c, d)) \oplus (e, f)) = (a, b) \odot (c + e, d + f) = (a(c + e), b(d + f)) =$
$= (ac + ae, bd + bf) = (ac, bd) \oplus (ae, bf) = ((a, b) \odot (c, d)) \oplus ((a, b) \odot (e, f))$.
Iz leve distributivnost $\odot$ prema $\oplus$ i komutativnosti operacije $\odot$ sledi i desna distributivnost $\odot$ prema $\oplus$.

(d) Ispitujemo par $(A \setminus \{(0, 0)\}, \oplus)$.

(d.1) Operacija $\odot$ nije zatvorena na $A \setminus \{(0, 0)\}$ jer za npr. $(2, 0), (0, 2) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ imamo $(2, 0) \odot (0, 2) = (0, 0) \notin A \setminus \{(0, 0)\}$.

(d.2) Asocijativnost operacije $\odot$ važi na $A \setminus \{(0, 0)\}$ jer važi na $A$.

(d.3) Komutativnost operacije $\odot$ važi na $A \setminus \{(0, 0)\}$ jer važi na $A$.

(d.4) Postoji neutralni element $(1, 1) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ jer za sve $(a, b) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ važi
$(1, 1) \oplus (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b)$ i $(a, b) \oplus (1, 1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a, b)$.

(d.5) Nema svako $(a, b) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ inverzni element u $A \setminus \{(0, 0)\}$. Na primer, inverzni element za $(-2, 3) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ je $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \in A \setminus \{(0, 0)\}$, dok npr. inverzni element za $(0, 3) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ ne postoji jer za svako $(a, b) \in A \setminus \{(0, 0)\}$ imamo $(0, 3) \odot (a, b) = (0, 3b) \neq (1, 1)$.

Iz (a), (b) i (c) sledi da $(A, \oplus, \odot)$ jeste prsten, ali nije polje zbog (d.1) (kao i zbog (d.5)).