

MATEMATIKA 1

ZADACI ZA VEŽBU

1. Kompleksni brojevi

1. Izračunati: a) $\sqrt{i^{2004} - 2}$, b) $\frac{(1+i)^{100}}{2+i}$, c) $\sqrt{-7+24i}$.

2. Rešiti jednačinu:

a) $\begin{vmatrix} z & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \bar{z} \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, b) $\frac{z+3}{3z-1} = -i$, c) $|z| + z = 2 + i$,

d) $z^3 + 27 = 0$, e) $\frac{zi+1}{2+i} + \bar{z}i = \frac{11}{5} - i\frac{18}{5}$.

3. (a) Odrediti kompleksan broj z koji zadovoljava uslov $z - 2\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{1-i}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}-2z}{i}\right) = 2i$.

(b) Izračunati $\sqrt[4]{-81}$ u algebarskom obliku.

4. Dat je kompleksan broj $z = e^{\frac{\pi}{8}i}$.

(a) Odrediti kompleksan broj $\omega = \frac{\sqrt{2}z^4(\sqrt{2} - (\bar{z})^2)}{z^8 - i}$.

(b) Naći $\sqrt[3]{-8z^4}$ u algebarskom obliku.

5. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da važi $(z+2+i)^3 = (1+i)^{201}e^{i\frac{\pi}{4}}$ i predstaviti ih u algebarskom obliku.

6. (a) Naći kompleksni broj z iz uslova $\frac{zi+1}{2+i} + \bar{z}i = \frac{11}{5} - i\frac{18}{5}$.

(b) Izračunati $(1+i)^{2010} - (i-1)^{2011}$.

7. Rešiti jednačinu $z^3 + 8i = 0$, rešenja predstaviti u algebarskom obliku, i prikazati ih u kompleksnoj ravni.

2. Sistemi linearnih jednačina i matrice

1. Rešiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

2. Dat je sistem linearnih jednačina
$$\begin{aligned} x + ay + 3z &= 1 \\ ax + 2ay + 3az &= -a \\ -x + ay + 3az &= 2a \end{aligned}$$

(a) U zavisnosti od realnih parametra a i diskutovati prirodu rešenja datog sistema i rešiti ga u slučaju neodređenosti.

(b) Za $a = 1$ rešiti dati sistem matricnom metodom.

3. Odrediti realne parametre a i b tako da sledeći sistem jednačina bude neodređen
$$\begin{aligned} 2x - y + az &= 2 \\ ax + y + 2z &= 4 \\ (a+2)x + 2y - 4z &= b. \end{aligned}$$

4. U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutovati prirodu rešenja datog sistema

a) $\begin{aligned} ax + 2y - 2az &= b \\ x - y + az &= 1 \\ 2x + ay + 2az &= -b \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} ax + z &= 1 \\ x + by + z &= 0 \\ x + az &= 1 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 2(a+1)x + az &= 1 \\ (a-1)x + y - 2z &= b \\ 2x + 2ay + az &= 5 \end{aligned}$

i rešiti ga u slučaju neodređenosti.

5. (a) U zavisnosti od realnog parametra a diskutovati prirodu rešenja datog sistema
$$\begin{aligned} 2x + ay + 3z &= 2 \\ ax - 2y + 4z &= 6 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

(b) Za $a = 2$ rešiti prethodni sistem matricnom metodom.

6. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešiti matricnu jednačinu $XAB + 2X = C$.