MATEMATIKA 1

ZADACI ZA VEŽBU

2016/17

1.Polinomi i racionalne funkcije

1. Dat je polinim $p(x) = 3x^6 + 19x^5 + 51x^4 + 75x^3 + 62x^2 + 26x + 4$.

   (a) Naći sve nule polinoma $p(x)$.

   (b) Faktorisati polinom $p(x)$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

   (c) Napisati polinom $p(x)$ po stepenima od $x + 1$.

2. Odrediti koeficijente a i b tako da polinom $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax + b$ pri deljenju sa $x^2 + 3$ daje ostatak 5.

3. (a) Napisati normiran polinom $p(x)$ najmanjeg stepena za koji važi da su 0 , 3 i $2i$ njegovi jednostruki koreni.
   (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 7x}{P(x)}$.

4.
   (a) Naći sve realne nule polinoma $p(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

   (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $q(x) = \frac{x^2-x+1}{p(x)}$.

5. Dat je polinom $p(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.

   (a) Odrediti sve njegove nule i faktorisati ga nad skupom realnih brojeva.

   (b) Napisati polinom $p(x)$ po stepenima od $x + 2$.

   (c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju$r(x) = \frac{x-1}{p(x)}$.

6.
   (a) Odrediti realne parametre a ,b i c tako da polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ bude deljiv sa $x + i$, a da pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2 .

   (b) Faktorisati polinom $p(x)$ nad skupom realnih i nad skupom kompleksnih brojeva.

   (c) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $q(x) = \frac{1}{p(x)}$.

7.
   (a) Odrediti normiran polinom $p(x)$ četvrtog stepena koji ima dvostruku nulu -2 i jednostruku nulu $1 - 2i$.

   (b) Rastaviti na zbir parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x^2+5x+32}{p(x)}$.

8. Odrediti realne parametre a i b tako da -1 i 2 budu koreni polinoma $p(x) = x^4 + (a + 1)x^3 - 9x^2 + bx + 12$, a zatim za te vrednosti a i b faktorisati polinom $p(x)$ nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ i rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \frac{x+3}{p(x)}$.

9. (a) Oderediti sve nule polinoma $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$ i faktorisati ga nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.
   (b) Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju $r(x) = \dfrac{4x + 5}{x^2\,(x - 5)}$.

10. Rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju:

    (a) $r(x) = \dfrac{4x^3 + 9x^2 + 4x + 19}{(x + 1)^2(x^2 - 4x + 5)}$;

    (b) $r(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + x - 4}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)}$;

    (c) $r(x) = \dfrac{x - 2}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x}$.

2. Vektori

1. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{b} = (0,2,0)$, $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{a} + 5\overrightarrow{b}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Odrediti realan parametar α tako da vektori $\overrightarrow{p}$ i $\overrightarrow{q}$ budu normalni.

2.

   (a) Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{b} = (-2,0,1)$. Izračunati površinu paralelograma i dužine dijagonala paralelograma određenog ovim vektorima.

   (b) Odrediti realan parametar t, tako da vektori $\overrightarrow{p} = (1, t+1, 4)$ i $\overrightarrow{q} = (t, 4, 8)$ budu: $i)$ kolinearni , $ii)$ ortogonalni.

3. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = (2,-3,6)$, $\overrightarrow{b} = (p,0,-2)$ i $\overrightarrow{c} = (q,0,2)$.

   (a) Odrediti $p \in R$ tako da vektor $\overrightarrow{b}$ bude dva puta većeg intenziteta od vektora $\overrightarrow{a}$.

   (b) Odrediti $q \in R$ tako da vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{c}$ budu normalni.

4. Odrediti realan broj x tako da vektori $\overrightarrow{a} = (1, x-1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (3,1,2)$ i $\overrightarrow{c} = (4,4,x-1)$ budu koplanarni (pripadaju istoj ravni).

5.

   (a) Izračunati intenzitet vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{p} - 3\overrightarrow{q}$, ako je $|\overrightarrow{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{q}| = 3$ i $\measuredangle(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) = \frac{\pi}{4}$.

   (b) Odrediti vrednost realnog parametra m tako da vektori $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = m\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ budu normalni.

2. Analitička geometrija

1. Data je ravan $\alpha : x - 2y + z = -5$ i prave $p : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{3}$ i $q : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.

   (a) Odrediti presečnu tačku P pravih p i q.

   (b) Odrediti presečnu tačku Q prav p i ravni α.

   (c) Odrediti ravan γ koja sadrži tačku P i paralelna je sa ravni α.

2. Data je prava $p : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-8}{4} = \dfrac{z-1}{a}$. Odrediti realni parametar a tako da prava p

   (a) seče pravu $q : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$, i naći tačku preseka.

   (b) bude paralelna ravni $\alpha : x - y + 3z = 5$.

   (c) bude normalna na ravan $\beta : 2x - 8y + 4z - 2 = 0$.

3. Data su prave $p : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ i $q : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}$.

   (a) Pokazati da se prave p i q seku.

   (b) Napisati jednačinu ravni α koja je određena pravama p i q.

4. Date su tačka $A(1,-4,-1)$, prava $p : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{-1}$ i ravan $\alpha : 3x + 5y - 2z = 4$.

   (a) Odrediti projekciju tačke A na ravan α.

   (b) Odrediti u kom odnosu se nalaze prava p i ravan α, i ako se seku odrediti tačku preseka.

5. Ispitati medjusobni položaj pravih $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ i $q : \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{0}$ i ako se seku naći tačku preseka i odrediti ravan u kojoj se nalaze.

6. Date je prava $p : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-6}{5}$, i tačka $M(2,6,-3)$. Naći:

   (a) jednačinu prave q koja sadrži tačku M , i paralelna je pravoj q .

   (b) ravan α koja sadrži prave p i q .

7.

(a) Odrediti jednačinu prave p koja prolazi kroz tačku $P(2,3,0)$ i ima vektor pravca $\overrightarrow{p} = (3,2,4)$.
(b) Odrediti jednačinu prave q koja prolazi kroz tačku $Q(1,2,0)$ i paralelna je sa pravom p .
(c) Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži prave p i q .

8.

(a) Napisati jednačinu prave p koja sadrzi tacku $P(1,0,3)$, i paralelna je pravoj $q : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$.
(b) Odrediti ravan α koja sadrzi prave p i q .
(c) Odrediti tacku prodora prave $r : \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{7}$ kroz ravan α . NAPOMENA: prodor je presek prave i ravni.

9. Date su prave $p : \quad \frac{x-2}{\lambda} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}$ i $q : \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$.

(a) Odrediti realan parametar λ , tako da se prave p i q seku.
(b) Za tako nađeno λ naći presek pravih p i q .
(c) Napisati jednačinu ravni α određene pravama p i q .
(d) Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz koordinatni početak i normalna je na ravan α .

10. Date su prave $p : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{-2}$ i $q : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ i ravan $\alpha : -3x + 2y - z = 0$. Odrediti:

(a) tačku M koja predstavlja presek pravih p i q;
(b) tačku N koja predstavlja presek prave p i ravni α;
(c) pravu r koja sadrži tačke M i N.